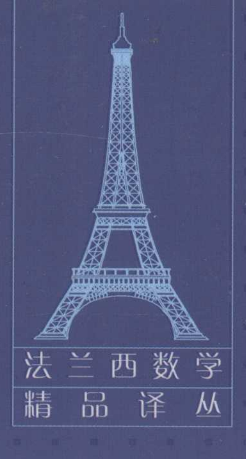


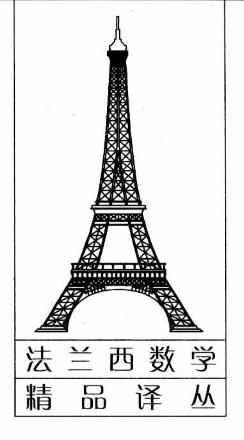
法兰西数学
精品译丛

广义函数论

□ L. 施瓦兹 著
□ 姚家燕 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



数学天元基金资助项目

广义函数论

Guangyi Hanshulun

□ L. 施瓦兹　著
□ 姚家燕　译

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

图字: 01-2008-2671

Laurent Schwartz

Théorie des distributions

图书在版编目(CIP)数据

广义函数论/(法)施瓦兹著;姚家燕译. —北京:高等教育出版社,2010.3

(法兰西数学精品译丛/李大潜主编)

ISBN 978-7-04-028417-1

Ⅰ.广… Ⅱ.①施… ②姚… Ⅲ.①广义函数-研究 Ⅳ.①O177.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 023110 号

策划编辑 王丽萍 **责任编辑** 李 陶 **封面设计** 张 楠

责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	高等教育出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2010年3月第1版
印　　张	22	**印　　次**	2010年3月第1次印刷
字　　数	400 000	**定　　价**	59.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 28417-00

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 作出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦兹及利翁斯等等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑, 根源于改革开放国策所带来的强大推动, 也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助. 在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的薰

陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学 (包括纯粹数学与应用数学) 的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008 年 5 月

译者的话

翻译是苦事, 也是乐事. 揣摩原著者的真实思想不得其解是苦事, 传神地转述书中精髓使读者得以分享数学之美则是乐事.

本书的作者 Laurent Schwartz (洛朗 · 施瓦兹, 1915 – 2002) 为法国科学院院士, 第二代布尔巴基学派的重要成员, 广义函数 (distribution) 理论的奠基人. 正是由于他在广义函数方面的原创性工作使他于 1950 年获得"菲尔兹奖". Laurent Schwartz 是获得该奖的第一位法国人, 被认为是 20 世纪最伟大的法国数学家之一 [①].

本书是关于广义函数的第一本专著. 全书共分九章, 第一章定义并讨论了广义函数的各种基本性质, 指出局部可积函数和测度均为特殊的广义函数, 尤其阐明了著名的"Dirac 函数 δ"其实是一个测度而不是函数, 从而为 Dirac 测度在量子力学以及其它学科中的广泛应用打下了坚实的数学基础; 第二章研究广义函数的导数, 证明了任意广义函数均无穷可导且有无穷多个原函数; 第三章研究广义函数空间的各种拓扑性质以及广义函数的局部结构, 证明了任意广义函数在局部上均为某一个连续函数的导数; 第四、五、六章分别讨论广义函数之间的张量积、乘法和卷积, 指出任意两个广义函数之间一般无法做乘法; 第七章研究周期广义函数的 Fourier 级数, 引入了缓增广义函数并研究了它们的 Fourier 变换; 第八章讨论广义函数的 Laplace 变换; 第九章研究微分流形上的广义函数 – 微分形式, 也即所谓的"流".

本书系统总结、高度概括了当时与广义函数论有关的许多重要理论和原始思想, 在其法文版第一版出版 59 年后的今天仍有理论价值和参考价值, 尤其适合于数学专业高年级本科生或研究生研读.

---

① Laurent Schwartz 同时也是法国著名的政治活动家和蝴蝶标本收藏家. 关于他的传奇人生, 有兴趣的读者也可阅读他的自传: Un mathématicien aux prises avec le siècle. Odile Jacob (1997). 该书有英文版: A mathematician grappling with his century. Birkhäuser Basel (2000).

限于当时的排版条件, 原书中有不少打印错误, 我们在翻译过程均不加说明地予以纠正. 我们也给出了不少脚注来帮助读者理解正文的内容. 另外, 我们还借助网络搜索工具检索了原著中的所有参考文献, 尽可能订正了所发现的错误, 并按照现在通用的文献格式进行了重新编排.

在我们翻译本书的各个不同阶段, 法国南巴黎大学的 Alano Ancona 教授和 Jacques Peyrière 教授曾帮助解决许多数学上的困惑, 林莉老师和田庆生教授在语言修饰方面给予了许多指导和帮助, 杨明先生在 Latex 排版方面提供了不少技术支持, 高等教育出版社的李陶老师和胡乃冏老师仔细通读了本书的全文并给出许多有益的建议和修改意见. 在这里对他 (她) 们一并表示最诚挚的谢意! 最后我们还要感谢高等教育出版社的王丽萍老师, 没有她的不懈努力和卓有成效的工作, 本书的中文版可能永远也不会问世!

引 论

1. 五十多年以前, 工程师 Heaviside[①] 在一篇大胆的学术论文中引入了他的符号计算法则, 利用一些没有得到证实的数学计算来求解物理问题. 此后, 这种符号计算或者说是运算演算, 得到了不断发展, 并成为电学家们理论研究的基础. 工程师们系统地使用此方法, 虽然每个人对它都有各自的理解, 但在使用时均或多或少地感到心安理得; 于是上述符号计算方法就成了一种"虽不严格但却很成功的"技巧. 自 Dirac[②] 引入在 $x=0$ 以外处为零而在 $x=0$ 处为无穷且使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\ dx = +1$$

的著名函数 $\delta(x)$ 后, 符号计算公式就更不为强调严格性的数学家们所接受. 不但声称在 $x<0$ 时等于 0, 而在 $x \geqslant 0$ 时等于 1 的 Heaviside 函数 $Y(x)$ 的导函数就是其定义本身在数学上就矛盾的 Dirac 函数 $\delta(x)$, 还要谈论这个缺乏实际存在意义的函数的导数 $\delta'(x)$, $\delta''(x)$, ..., 所有这些都超出了我们的容忍极限. 但怎么解释这些方法所取得的成功呢? 每当这种矛盾现象出现时, 很少不因此产生一种新的、经过修改后就可以用来解释物理学家们的语言的数学理论; 那甚至是数学和物理取得进步的重要源泉. 事实上, 已有许多关于符号计算的解释; 而这主要归功于 Carson 和 van der Pol[③]. 然而, 虽然这些解释在数学上是完全严格的, 但它们并不能够满足物理学家们的要求, 因为它们或者借助于 Laplace 变换, 由此完全改变了问题, 或者排除了函数 δ 及其各阶导数并使得一些已取得不容置疑成功的方法不再有效.

---

① HEAVISIDE [1].
② DIRAC [1].
③ CARSON [1], VAN DER POL – NIESSEN [1].

2. 我们将函数的概念, 首先是推广到测度, 随后是推广到广义函数. 可知 δ 是一个测度而不是一个函数, 而 δ' 则是一个广义函数而不是一个测度. 此外, 磁位势的理论研究者在很久以前就已开始使用偶极子, 双层等等, 但这都是些比较孤立、其定义还值得怀疑的东西, 与电学家们的符号计算没有什么联系. 我们将在本书的第一章中给出广义函数的一般定义.

3. 接下来需建立与通常微分计算法则以及符号计算法则协调一致的广义函数的计算法则. 首先须引入好的导数定义. 相当奇怪的是, 完全独立于前面的考虑, 上述新定义早已被一点一点地引入到偏微分方程理论中. 我们可将偏微分方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

的解的一般表达式写成 $U = f(x+y)+g(x-y)$; 但仅当 f 和 g 均两阶可导时, 这样的函数 U 才能满足上述偏微分方程. 在相反的情形, 我们可约定称 U 为上述方程的"广义解". 许多作者都曾独立地给出了这些广义解的一般定义 (当广义解是一个函数时, 这些定义与我们的定义一致): Leray ① (在其关于偏微分方程的"湍流"解的博士论文中), Hilbert – Courant ②, Bochner ③ ("弱解") 和本人工作 ④. 须指出的是, 虽然我们如前面所说那样将 U 定义为偏微分方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

的广义解, 但我们却没有给记号 $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ 赋予一个确切的意义. 同样是关于偏微分方程, 基于类似想法, Soboleff, Friedrichs 和最近的 Kryloff ⑤ 都研究了函数的"广义导数"(该定义同我们的一致, 但仅限于函数的广义导数还是函数这一情形). 我们将在第二章中定义广义函数的求导并研究其性质. 在那里我们将会十分自然地重新得到 Hadamard 先生 ⑥ 同样还是在偏微分方程理论中所引入的"有限部分": 发散积分的有限部分定义了与位势理论中的多层很不一样的、新的广义函数.

4. 为处理 Fourier 级数与 Fourier 积分理论中依然还是十分困难的收敛性问题, 非常有必要引入重要的数学工具. Fourier 级数引发了求和方法的发展, 但这些方法却并没有带来一个令人满意的解决方案, 因为总是需要区分 Fourier 级数与不是 Fourier 级数的三角级数. 就 Fourier 积分而言, 无论是以直接还是隐晦方式, 广义函数的引入都是不可避免的. Bochner 方法, Carleman 方法 (解析 Fourier 变换),

---

① LERAY [1], pp. 204 – 209.

② HILBERT – COURANT [1], 第 2 卷, p. 469.

③ BOCHNER [2]; 以及 [3], pp. 158 – 182.

④ SCHWARTZ [5]. 该论文正好发表在广义函数出现之前, 甚至可以说是广义函数的源头.

⑤ SOBOLEFF [1], [2]; FRIEDRICHS [1]; KRYLOFF [1]. 在前面注记中所指出的那些论文当中的某些出现在广义函数之后, 但由于印刷、国际交流、或者是本人工作发表的滞后等方面的原因所产生的时间差, 导致这些论文的作者并不知道广义函数. 也见 SOBOLEFF [4] 中的泛函.

⑥ HADAMARD [1], pp. 184 – 215.

Beurling 方法 (调和 Fourier 变换)① 均与我们的十分接近. Bochner 的“广义函数”实际上是被定义成在通常意义下不一定可导的连续函数的导数; 而我们第三章中的定理 21 正是表明, 广义函数在局部上就是连续函数的导数. 我们觉得这样的性质作为定理而得到比作为定义而得到更可取 (因为求导顺序以及涉及的连续函数均不能唯一确定, 尤其在多变量的情形)②. 我们将在第七章中讨论广义函数的 Fourier 变换: 就运算 $\mathscr{F}$ 和 $\overline{\mathscr{F}}$ 的连续性与互反性而言, 所得结果不可能更好了.

5. 最后, 广义函数也在一个完全不同的领域中起作用. 在代数拓扑中, 微分流形的同调或者由“奇异链”给出或由微分形式给出, 其中一边是“边缘”运算, 而另外一边则是“外微分”运算. 由此产生的自然想法是将这两类东西进行综合. 正是 de Rham 先生③ 产生了引入“流”以及一种求导运算的想法, 前者同时包含链和微分形式作为其特殊情形, 而后者则恰好使得对链的求导为边缘运算而对微分形式的求导为外微分运算 (或许会相差一个符号). 流的理论被简化、改进成流形上的广义函数 - 微分形式理论, 后一理论同样也包含了 P. Gillis 的结果④. de Rham 在他最近的一本书中讲述了关于 (广义函数 - 微分形式意义下的) 流的一整套理论⑤. 我们将在这个新版的第九章中讨论流.

6. 我们所列举的广义函数的祖先和近亲肯定是不完全的 (比如说, 变分计算中所用到的 L. C. Young⑥ 的广义曲面, Fantappié⑦ 的解析泛函, Mikusinski⑧ 的算子, 均源于类似的思想).

我们想通过这些例子来说明广义函数不完全是一个“革命性的创新”. 许多读者将在其中发现一些他们所熟悉的思想. 该理论以简单、正确的方式并入了一些应用在各种不同领域中、非常繁杂但时常却是错误的方法; 这是一种综合和简化. 当然这种综合需从头做起. 首先要正确定义广义函数这类新东西, 系统地研究它们使它们能在日常使用中站住脚. 更有甚者. 在我们所给的那些例子中, 广义函数常以隐晦方式出现在针对专家的著作中 (由此导致同样的广义函数在不同理论中使用时, 有时会被同一作者认为是不同的). 我们的广义函数则相反比较初等, 这使得它们可用来作为每个理论开始时的基础. 我们认为, 就教学角度而言, 初学者首先从广义函数的角度来学习偏微分方程, 位势和调和函数, 卷积, Fourier 级数和积分, 会比较有利. 特别是我们讨论这些问题的章节仅需很少的预备知识. 另外我们已出版针对理工类大学三年级学生的教程《物理中的数学方法》(SCHWARTZ [14]), 其中就包含了关于广义函数及其主要性质的一个比较初等的介绍.

---

① BOCHNER [1], pp. 110 – 140; CARLEMAN [1], pp. 36 – 52; BEURLING [1], pp. 9 – 14.
② H. KÖNIG [1] 和 S. SILVA [1] 重新借助 Bochner 的定义对广义函数作了一个纯代数的介绍.
③ DE RHAM [1], [2].
④ GILLIS [1].
⑤ DE RHAM [3]. 也见 KODAIRA – DE RHAM [1].
⑥ YOUNG [1].
⑦ FANTAPPIÉ [1].
⑧ 特别是 MIKUSINSKI [1], [2].

7. 本著作不是一篇学术论文而是一本书, 一本关于广义函数的专著. 这就解释了其篇幅之长. 就这点而言, 它甚至还不够长; 很多性质都只是作了介绍而没有证明. 特别是许多定理常利用一些非常类似仅需在技术上做些微改动的方法来证明; 此时我们将只证一次, 当然, 如果让读者自己来做那些必要的修改, 我们事实上没有叙述任何未经完全证明的东西. 对于重要的定理, 我们会出证明的所有细节, 而对于那些更为精细和次要的定理, 我们的证明将会比较简练; 因此我们有时会对容易的东西给出详细证明, 而对难的却只是给出证明概要, 这看起来有些矛盾, 但由此却使得表述更加清楚明白, 整体上看起来也更为容易. 同样地, 在叙述定理时, 我们更喜欢那些简单、结果也较弱的陈述而不是那些结论很强 (因此也更难懂) 的定理; 不过我们会在评注或证明过程中给出相关定理更为精细的表述.

须指出的是, 我们对例子中的那些计算并没有作详细解释. 它们当中的某些曾在一些经典著作 ① 里讨论过, 但其余的则是无处可见. 如果我们给出相关细节将会极大地增加本书的篇幅, 而所涉及的困难却都只是技术层面上的.

我们在每章开始的内容提要中指出了该章最重要的结果, 其余的则可在第一次阅读时一览而过, 也就是说它们在使用时仅有参考文献的价值.

节和定理按章编号. 用三元记号来标记公式, 依次表示章, 节及公式的编号.

8. 阅读本书任何理论部分均需相当好的点集拓扑和泛函分析 (拓扑向量空间) 的知识. 从事技术工作的人员可忽略这些问题. 但在此方面仍有一个严重的困难: 这里遇到的向量空间决不会是 Banach 空间, 而是一些有可数邻域基的局部凸完备向量空间 (Fréchet 空间) 或者甚至是一些更为复杂的空间 (Fréchet 空间的正向极限), 以及这些空间的对偶空间.

我们曾经不得不经常应用一些这样的定理, 它们在 Banach 空间里是经典的, 在上述更为一般的空间里依然成立, 但其证明在本书第一版出版时尚未发表. 这个缺陷现已被填补上, 而我们则将始终给出一些非常恰当的参考文献. 事实上, 如今已有大量讨论上述空间的泛函分析方面的书.

9. 就此而言, 有必要在这里明确地指出某些说法的含义. 要想保证完全正确, 必须要在所有收敛性问题中使用 H. Cartan ② 的滤子. 但为了不加重正文的负担, 我们则采用了比较 “朴素的” 语言.

我们将会说: “广义函数 T_j 收敛于 0”, 就好像所涉及的是一列序列 T_j (该序列依赖于整数参数 j 且当 $j \to \infty$ 时趋近于 0), 但大家应该将之理解为所讨论的是一个任意的收敛滤子. 相反地, 某些定理仅对序列成立, 此时我们则会说: “若一列广义函数列 T_j 收敛于 0”. 在许多实际的问题中, 序列 (或至少是基有界或可数的滤子) 就足够用了, 而针对一般滤子的定理比针对序列的更难证明; 因此我们有时会对任意滤子来陈述定理的内容但只满足于对序列给出证明.

① 比如说 WATSON [1].

② BOURBAKI [1], 第 1 章第 2, 6 节.

我们曾针对双线性型引入了亚连续[①]的概念 (第三章, 定理 11); 大多数遇到的双线性型都为亚连续但不连续. 很可能在所有的应用中只要有亚连续性就足够了. 这就解释了为什么当也有连续性时, 我们有时在叙述中指出连续性但仅证明更为简单的亚连续性. 另外, Dieudonné – Schwartz 的一篇论文[②]给出了从一个过渡到另外一个的方法 (*若 E, F, G 三个都是 Fréchet 空间或都是自反 Fréchet 空间的对偶空间, 则从 $E \times F$ 到 G 的任意亚连续双线性映射均为连续*).

10. 我们之前关于广义函数的出版物都是一些包含主要结果但不带任何证明的摘要[③]. 在此还可加上 Halperin 的书[④]. 另外, König 和 Sebastião e Silva 的一些论文[⑤]也借助抽象代数的方法给出了广义函数的定义和性质.

我们认为在这里列出仅在其中应用了广义函数的著作并没有什么益处, 不过我们将会指出那些研究广义函数本身的工作.

1° 无穷可微流形上的流, 即广义函数 – 微分形式, 在 de Rham 的一本书[⑥]中得到了详细讨论, 在那里大家还可找到关于微分流形本身, 以及 Riemann 空间上的调和形式的研究; 在这个新版中, 它们构成了第 9 章的内容.

2° 局部紧群上的广义函数曾先后被 Riss 和 Bruhat 所研究[⑦].

3° 广义函数的变量替换曾经被 Cugiani 和 Albertoni, 以及 Scarfiello 所研究[⑧]. 我们将在这个新版的第 9 章第 5 节里讨论这部分内容.

4° 关于广义函数的乘法, 提请大家注意我们的一篇短文[⑨]以及 König 的一篇论文[⑩], 前者证明了广义函数之间一般不能做乘法 (甚至在可能异于广义函数论的任何理论中, 只要假设总可以求导并存在一个元素 δ, 则一定不能做乘法运算), 后者则给出了建立在完全不同想法之上的乘法. 如今看来, 乘法运算的普遍不存在性是量子场论最主要的数学困难之一.

5° 广义函数的 Laplace 变换出现在本书第一版出版之后; 相关论文发表在纪念 Marcel Riesz 的书[⑪]中. 在此我们感谢 Lund 大学非常友好地允许我们将该文再现在这个新版的第 8 章中.

6° 核, 即与算子相关的两个变量的广义函数, 拓扑张量积以及核空间, 都曾被 Grothendieck 和我们自己所研究[⑫].

---

① 我们现在将以前第一版中所谓的“分别连续”改称为“亚连续”.

② DIEUDONNÉ – SCHWARTZ [1], p. 96, 定理 9.

③ SCHWARTZ [1], [2], [3].

④ HALPERIN [1].

⑤ KÖNIG [1], SEBASTIÃO E SILVA [1].

⑥ DE RHAM [3].

⑦ RISS [1]; BRUHAT [1].

⑧ ALBERTONI – CUGIANI [1]; SCARFIELLO [1].

⑨ SCHWARTZ [6].

⑩ KÖNIG [2].

⑪ SCHWARTZ [7′].

⑫ SCHWARTZ [7], [9], [10], [11]; GROTHENDIECK [1], [2].

7° Gel'fand 及其学派的 "广义函数" 是我们的广义函数的拓广, 它们在偏微分方程中得到了大量应用. 关于它们, 现在已有好几本内容详实的优秀著作 ①, 同时介绍它们以及广义函数的丰富性质.

8° Martineau 的解析泛函 ②, Roumieu 的广义广义函数 ③, 以及 Sato 的超广义函数 ④ 都是广义函数或一些平行理论的各种拓广, 它们均出现在本书第一版之后, 并构成了对我们在前面第 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6° 条中关于先前或当代发展所作介绍的补充. 另外, 许多现代著作也介绍了广义函数, 它们或是为了讨论广义函数本身, 或是为了某些应用的目的 ⑤.

11. 本书第三版的第 2 章至第 7 章与第二版的相同; 但第 8 章与第 9 章是新的.

① Gel'fand, Shilov, Graev, Vilenkin [1].

② Martineau [1].

③ Roumieu [1].

④ Sato [1].

⑤ 除了在本页及前面所有被引用的文献之外, 我们还在下面指出另外的一些, 但我们并不号称囊括了所有的相关文献: Arsac [1]; A. Friedman [1]; B. Friedman [1]; Courant – Hilbert [1]; Edwards [1]; Erdelyi [1], [2]; Garsoux [1]; Hörmander [3]; Liverman [1]; Marinescu [1]; Treves [1]; Yosida [1]. (译者注: A. Friedman [1], B. Friedman [1], Erdelyi [1], [2], Garsoux [1], Liverman [1], Marinescu [1] 并没有被作者列在书后的参考文献中.)

目　录

第一章 广义函数的定义与一般性质

内容提要 本章包含了为理解后面的内容所必需的记号和定义.

在引入 n 维空间中与变量有关的记号之后, 我们将马上在第 1 节中介绍测度. 测度 μ 曾在过去被定义成关于集合的完全可加函数, 现在则将它定义成在某些紧集外面为零的连续函数 φ 所构成的空间 $(\mathcal{C})$ 上的泛函

$$\mu(\varphi) = \iint \cdots \int \varphi \, d\mu .$$

上述泛函必须要在第 4 页里所指出的意义下线性和连续. 所有测度构成的空间就是空间 $(\mathcal{C})$ 的对偶空间 $(\mathcal{C}')$. 我们将在第 5 页里定义连续函数 φ 以及测度 μ 的支集, 此概念将被推广到广义函数, 从而使我们可以进行一些纯局部的研究. 测度的概念是函数概念的推广 (p. 5), 因为我们可将局部可积函数 $f(x)$ 与密度为 $f(x)$ 且满足

$$\mu(\varphi) = \iint \cdots \int f(x)\varphi(x) \, dx$$

的测度 μ 一一对应起来. Dirac 测度 δ (p. 6) 被引入波动力学时称为 Dirac 函数, 但它实际上不是一个函数.

我们将在第 2 节中定义广义函数. 若想定义“偶极子”(p. 7), 则必然要将它与泛函 $T(\varphi) = \varphi'(0)$ 联系起来, 这里假设 φ 可导. 由此自然会想到引入具有紧支集的无穷可导函数 φ 所组成的空间 $(\mathscr{D})$ 来取代 $(\mathcal{C})$, 定理 1 和定理 2 (p. 8) 给出了以后会经常用到的该空间的一些性质 (空间 $(\mathscr{D})$ 在 $(\mathcal{C})$ 中的稠密性以及单位分解); 广义函数 T 因此是对任意 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 有定义且在适当意义下连续的线性泛函 (p. 10). 所有广义函数组成的空间就是 $(\mathscr{D})$ 的对偶空间 $(\mathscr{D}')$. 测度, 更不必说函数, 都是特殊的广义函数 (定理 3, p. 10).

在第 3 节我们将支集 (p. 12) 的概念推广到广义函数并研究后者的局部性质. "分片粘贴" 原理 (定理 4, p. 12) 使我们得以从局部过渡到整体: 一旦知道了广义函数在每点邻域内的局部性质, 也就知道了该广义函数的整体性质.

在第 4 节我们研究了非负广义函数并证明它们必为测度 (定理 5, p. 13), 由此得到一个可用来证明某些广义函数为测度的判别准则.

第 5 节有些特别. 它包含了一些仅作了简单介绍且在后面很少会用到的推广, 不过其中的第 3° 段 (p. 15) 还是会偶尔用到.

§1. 函数概念的推广: 测度的概念

记号 我们拟推广 n 个实变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的复值函数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的概念①.

记 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维向量空间, 其中每个点 x 由它的 n 个坐标 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 来确定. 我们将一劳永逸地作如下约定:

1° $x+y$ 是坐标为 $x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n$ 的点; 而 kx 是坐标为 $kx_1, kx_2, \ldots, kx_n$ 的点 (这里 k 为实数).

2° $x \geqslant 0$ 意味着 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$. 而 $x \geqslant y$ 表示 $x - y \geqslant 0$.

3° $|x|$ 表示欧氏范数 $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$; 当不会造成任何混淆时, 我们也会将之记作 r. 而 $|x-y|$ 就是两点 x 和 y 之间的欧氏距离.

我们将用 dx 表示超体积元 $dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$. 我们同样也需要简化函数的求偏导记号: p 表示非负整数组 $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 中的最大元记作 P (p 的秩), 和式 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ 记作 $|p|$ (p 的阶); 而 D^p 则表示求偏导记号

$$D^p = \frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \cdots \partial x_n^{p_n}}.$$

我们将令

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}, \quad \frac{\partial^m}{\partial x^m} = \frac{\partial^{mn}}{\partial x_1^m \partial x_2^m \cdots \partial x_n^m}. \tag{1.1.1}$$

当然, $p+q$ 表示整数组

$$(p_1+q_1, p_2+q_2, \ldots, p_n+q_n),$$

而 $p \geqslant q$ 则意味着 $p_1 \geqslant q_1, \ldots, p_n \geqslant q_n$. 最后还要用 $p!$ 表示数 $p_1! p_2! \cdots p_n!$, 而用 x^p 表示数 $x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$. 函数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的 Maclaurin 展式因此可简化成

$$f(x) = \sum_p D^p f(0) \frac{x^p}{p!}. \tag{1.1.2}$$

① 习惯上用记号 f 表示函数, 用记号 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示函数 f 在点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 处的值. 当不会产生任何混淆时, 我们有时也会说: 函数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 而不是函数 f.

我们也将记 $\mathrm{C}_p^q = \mathrm{C}_{p_1}^{q_1}\mathrm{C}_{p_2}^{q_2}\cdots\mathrm{C}_{p_n}^{q_n}$, 其中

$$\mathrm{C}_{p_i}^{q_i} = \frac{p_i\,!}{q_i\,!\,(p_i - q_i)\,!}\,.$$

这些记号虽然不太严密, 但它们却可以极大地简化后面的陈述.

测度 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的复值测度 μ 是“关于集合的完全可加函数”; 它将 $\mathbb{R}^n$ 的任意一个有界 Borel 集 A [①] (特别地, 将任意一个有界开集或闭集) 与一个被称为该集合的测度的复数 $\mu(A)$ 对应起来, 且具有下列性质:

若 A 为有界 Borel 集且为可数多个两两不相交的 Borel 集 A_i 的并, 则

$$\mu(A) = \sum_i \mu(A_i)\,,$$

其中第二项中的和式为绝对收敛. 若 φ 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上且在一个紧集外为零的复值连续函数, 则测度 μ 将它与一个复数对应起来, 该复数就是积分:

$$\mu(\varphi) = \iint\cdots\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu\,. \tag{1.1.3}$$

我们将用 $(\mathcal{C})$ [②] 来表示所有这些函数 φ 的集合. 我们当然也可以对别的一些在整个空间上可能都不为零的不连续函数 φ 来定义 $\mu(\varphi)$; 那些可以通过经典的延拓方法来定义 $\mu(\varphi)$ 的函数 φ 被称为是关于测度 μ 可积的.

关于测度 μ 可积的函数类自然会依赖于 μ; 但可以肯定的是, 若 φ 连续 (甚至只需为 Borel 函数) 且在一个紧集外为零, 那么它对任意的测度 μ 均可积.

测度 μ 被称为是实的, 若每个集合的测度都是实的, 或等价地说, 若对于任意实值函数 $\varphi \in (\mathcal{C})$, 其值 $\mu(\varphi)$ 均为实数.

若 μ 为任意的复测度, 它可以被分解成实部和虚部,

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2\,,$$

其中 μ_1 和 μ_2 为实测度, 并对于任意实值函数 $\varphi \in (\mathcal{C})$, 量 $\mu_1(\varphi)$ 和 $\mu_2(\varphi)$ 由关系式

$$\mu(\varphi) = \mu_1(\varphi) + i\mu_2(\varphi) \tag{1.1.4}$$

来确定.

---

① 我们将这样的最小函数集称为 Borel 域, 一方面它包含所有连续函数, 另一方面, 若它包含某个收敛的函数列, 则它一定也包含该函数列的极限. 属于该 Borel 域的函数被称为 Borel 函数. 一个集合被称为是 Borel 集, 若其示性函数为 Borel 函数.

② 在本书的第一版中我们将空间记作 $(\mathcal{C})$, $(\mathscr{D})$, $(\mathscr{E})$, $(\mathscr{S})$ 等, 但在日常使用中括号都被丢掉了, 有鉴于此, 从新增的第 8 章和第 9 章开始, 这些空间将被记作 $\mathcal{C}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}$ 等.

测度 μ 被称为是非负的, 若每个集合的测度都是非负实数, 而这又等价于说, 若对任意非负实函数 $\varphi \in (\mathcal{C})$, 都有 $\mu(\varphi) \geqslant 0$. 任意实测度都是两个非负测度之差.

对任意 $\varphi \in (\mathcal{C})$ 所定义的泛函 $\mu(\varphi)$ 具有下列性质:

1° 它是线性的:

$$\begin{cases} \mu(\varphi_1 + \varphi_2) = \mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2), \\ \mu(k\varphi) = k\mu(\varphi), \quad k \text{ 为复数}. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

2° 它在下述意义下"连续":

若连续函数 φ_j 均在 $\mathbb{R}^n$ 的一个固定紧子集 K 外为零并且一致收敛于 $\varphi \in (\mathcal{C})$, 那么 $\mu(\varphi_j)$ 收敛于 $\mu(\varphi)$.

在第 3 章我们将在 $(\mathcal{C})$ 上引入一个拓扑, 使得测度就是拓扑空间 $(\mathcal{C})$ 上的连续线性型. 由于该拓扑的定义有些复杂, 我们在这里仅满足于下面的讨论. 设 $(\mathcal{C}_K)$ 为所有在 $\mathbb{R}^n$ 上连续且在 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集 K 外为零的函数 φ 组成的向量空间. 则 $(\mathcal{C})$ 为所有 $(\mathcal{C}_K)$ 的并. 我们将在 $(\mathcal{C}_K)$ 上赋予一个一致收敛拓扑: 若 $\varphi_j \in (\mathcal{C}_K)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于 0, 则称它们在 $(\mathcal{C}_K)$ 里收敛于零. 向量空间 $(\mathcal{C}_K)$ 在被赋予范数

$$\|\varphi\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)|$$

后就变成了一个 Banach 空间. 上面所谈的"连续性"则等于说 μ 在每个 $(\mathcal{C}_K)$ 上的限制是连续的. 当不引起任何混淆时, 我们将会简单地说: μ 在 $(\mathcal{C})$ 上连续.

反过来, 根据 F. Riesz① 的一个著名定理, 对 $(\mathcal{C})$ 上的任意连续线性型 $L(\varphi)$, 我们都可以赋予一个唯一确定的测度 μ 使得 $L(\varphi) = \mu(\varphi)$.

Riesz 定理现在已越来越重要. 如今将测度 μ 定义成 $(\mathcal{C})$ 上的连续线性型已变得非常必要; 当有需要时, 我们可从泛函 $\mu(\varphi)$ 出发, 逆用以前的方法来重新得到集合的完全可加函数 $\mu(A)$; 但在多数时候, 这样做甚至是毫无益处的, 而借助 $\mu(\varphi)$ $[\varphi \in (\mathcal{C})]$ 比通过 $\mu(A)$ 更容易让我们理解和认识 μ 的性质②.

所有这些测度 μ 构成了一个向量空间 (我们可以将两个测度相加并将一个测度乘以一个复数); 我们将该空间记作 $(\mathcal{C}')$.

支集 称 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集 F 为 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 f 的支集, 若它是由满足 $f(x) \neq 0$ 的点 $x \in \mathbb{R}^n$ 所组成的集合的闭包. 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一点属于 F 当且仅当 f 在该点的任何邻域内均不恒等于 0.

支集 F 的余集为 $\mathbb{R}^n$ 中使得 f 在其中为零的的最大开子集 (即 $\mathbb{R}^n$ 中使得 f 在其中为零的所有开子集的并).

空间 $(\mathcal{C})$ 中的函数 φ 不是别的, 而是一个具有紧支集的连续函数.

---

① 参见 F. Riesz [1], 以及 Banach [1], p. 60.

② 在 Bourbaki [7] 中所运用的正是此方法.

现在设 μ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的测度. 若对任意的函数 $\varphi \in (\mathcal{C})$, 只要 φ 的支集包含在 Ω 内就必有 $\mu(\varphi) = 0$, 则称 μ 在 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 Ω 内为零. 可证明, 在一族开集内为零的测度在这些开集的并集内也为零.

我们称 $\mathbb{R}^n$ 中如下定义的闭子集 F 为 $\mathbb{R}^n$ 上的测度 μ 的支集 (也称 μ 由 F 所支撑或承载): 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一点属于 F 当且仅当 μ 在该点的任何开邻域内不为零.

支集 F 的余集为 $\mathbb{R}^n$ 中使得 μ 在其中为零的的最大开子集 (即 $\mathbb{R}^n$ 中使得 μ 在其中为零的所有开子集的并).

可见, 每当 μ 的支集与 φ 的支集没有公共点时就有 $\mu(\varphi) = 0$; 甚至当 φ 在 μ 的支集上为零时也是如此.

函数与测度 测度到底在什么地方推广了函数的概念呢? 我们将让 Lebesgue 测度这个特殊测度在 $\mathbb{R}^n$ 上起一个专门作用; 并将超体积元记作 dx 或 $dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$.

设 μ 为 "绝对连续" 测度. 它有一个在任意紧集上关于 Lebesgue 测度可积的 "密度" 函数 $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; 因此对任意有界 Borel 集 A, 我们有

$$(1.1.6) \qquad \mu(A) = \iint \cdots \int_A f(x)\, dx = \iint \cdots \int_A f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n\,,$$

而对任意的函数 $\varphi \in (\mathcal{C})$, 则有

$$(1.1.7) \qquad \begin{cases} \mu(\varphi) = \displaystyle\iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \varphi(x)\, dx \\ \qquad = \displaystyle\iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n\,. \end{cases}$$

函数 f 并不在所有地方都有定义, 而只是几乎处处 (即在某个 Lebesgue 测度为零的集合之外) 有定义.

反过来, 对任意一个在 $\mathbb{R}^n$ 的所有紧子集上可积的函数 f, 我们都可以明确地将它与一个密度为 f 的绝对连续测度对应起来; 该测度由下述关系式

$$(1.1.8) \qquad \mu(\varphi) = \iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \varphi(x)\, dx, \ \ \varphi \in (\mathcal{C})$$

来定义.

这样我们就建立了 $(\mathcal{C}')$ 中由绝对连续测度所组成的向量子空间, 与由在任意的紧集上可积的函数的 "类" 所组成的向量空间之间的一一对应 (这里的一个函数类就是由与同一个函数几乎处处相等的所有函数组成的集合).

我们将利用这个对应来定义一个完全的等同. *在后面, 我们将绝对连续测度 μ 与其密度 f 视为同一.* 我们将总是说 $\mu = f$ 并且对 $\mu(\varphi)$ 和 $f(\varphi)$ 不作任何区别. 而这则意味着我们有关系式 (1.1.8). 于是在任意紧集上均可积且几乎处处有定义的函数就成了一种特殊的测度.

须指出的是, 可从两个完全不同不能混淆的观点来研究连续函数:

一方面, 它是一个通常意义下的函数, 它在每一点 x 处取一个确定的值 $f(x)$; 若其支集为紧集, 则它可被视为 $(\mathcal{C})$ 中的一个元素 φ.

而在另一方面, 它也是一个绝对连续测度 μ 的密度; 它因此可以被定义成一个泛函 $\mu(\varphi) = f(\varphi)$ [公式 (1.1.8)], 从而可被视为 $(\mathcal{C}')$ 中的一个元素 μ.

不管从哪一个观点来看, 上述 f 在 $\mathbb{R}^n$ 中的支集都是一样的.

我们约定将由位于 $\mathbb{R}^n$ 的原点 $x = 0$ 处、质量为 $+1$ 的质点所构成的测度称为 Dirac 测度 δ①. 对任意的函数 $\varphi \in (\mathcal{C})$, 我们有

$$\delta(\varphi) = \varphi(0)\,. \tag{1.1.9}$$

同样地, 我们将位于 $\mathbb{R}^n$ 的点 x_ν 处、质量为 $+1$ 的质点所构成的测度记作 $\delta_{(x_\nu)}$. 此时对任意的函数 $\varphi \in (\mathcal{C})$, 我们有

$$\delta_{(x_\nu)}(\varphi) = \varphi(x_\nu)\,. \tag{1.1.10}$$

由上述可知 δ 为不是函数的测度的最简单例子. 物理学家们之所以要坚持将它称为 Dirac 函数, 是为了在它上面进行某些仅在函数上有定义而在测度上无定义的运算 (例如求导); 而我们正是要让所有这些运算在测度上也可以进行, 为此我们将严格区别是函数的测度和不是函数的测度. 支撑在一条曲线或一个曲面上并在它上面有线密度或面密度的"奇异"测度, 不是一个函数.

也可注意到, 测度的概念严格说来并不是函数概念的推广, 而是在所有紧集上可积的函数的类的概念的推广. 形如 $1/x$ 这样的单变量函数 $(n = 1)$ 并不与任何测度相对应, 这是因为 $1/x$ 在原点 $x = 0$ 的邻域内不可积. 另外提醒大家, 当两个几乎处处相等的函数作为测度来考虑时, 在任何时候都不应将它们区别对待. 若 f 和 g 几乎处处相等, 则我们将之记作 $f = g$. 若在一个零测度集上作修改后 f 变成一个连续函数, 凸函数或调和函数, 我们就说 f 为连续函数, 凸函数或调和函数.

在开集上的限制　我们刚才所说的均可推广到定义在 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 Ω_0 上的测度.

记 $(\mathcal{C}_{\Omega_0})$ 为 $(\mathcal{C})$ 中支撑在开集 Ω_0 上的函数 φ 构成的子空间. 则 Ω_0 上测度就是在每个 $(\mathcal{C}_K)$ 上的限制均连续的 $(\mathcal{C}_{\Omega_0})$ 上的线性型, 这里 K 为包含在 Ω_0 中的紧集. 将这些测度所组成的空间记作 $(\mathcal{C}'_{\Omega_0})$. 开集 Ω_0 上的测度具有与 $\mathbb{R}^n$ 上的测度类似的性质; 我们将取 $\Omega_0 = \mathbb{R}^n$, 而这并不会给研究的一般性带来任何实质性限制. 当然, 开集 Ω_0 上的测度一般并不能被延拓成 $\mathbb{R}^n$ 上的测度. 例如, 函数 $1/x$ (单变量, $n = 1$) 虽在 $\mathbb{R}^1$ 的原点的余集 Ω_0 上定义了一个测度; 但它并不能被延拓成 $\mathbb{R}^1$ 上的测度, 因为它在原点邻域内不可积. 要使 Ω_0 上的测度 μ 能被延拓成 $\mathbb{R}^n$ 上的测度, 当且仅当对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意紧集 K, 积分 $\iint\cdots\int_{K\cap\Omega_0}|d\mu|$ 均有限.

① 该测度通常被称为 Dirac 函数, 其引入是出于波动力学的需要. 参见 DIRAC [1].

§2. 测度概念的推广. 广义函数

很久以前, 物理学家们就已在位势理论中使用了一些比质点更为复杂的概念: "多层" (多极子, 双层). 只有彻底放弃测度为集合的函数的定义而采用其泛函的定义, 物理学家们的这些研究才会有一个确切的意义.

偶极子 位于直线 ($n=1$) 的原点 O, (电或磁) "矩" 为 $+1$ 的 "偶极子" 是什么?

它是由位于横坐标为 ε 的点处以及原点处, 质量分别为 $+\frac{1}{\varepsilon}$ 和 $-\frac{1}{\varepsilon}$ 的两质点所组成的系统在 $\varepsilon>0$ 趋于 0 时的 "极限[①]". 这因此是一个 "测度的极限", 但却不是一个测度. 如果大家想将偶极子定义成集合的可加函数 - 测度, 那将会有许多不可克服的困难: 任何一个区间的测度都将等于零, 除非该区间有一个端点为原点, 而此时其测度无法确定.

借助测度的泛函定义, 由两质点所组成的系统 T_ε 可被定义为

$$T_\varepsilon(\varphi)=\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon},\quad \varphi\in(\mathcal{C}). \tag{1.2.1}$$

由此可知, 若 φ 可导, 则让 $\varepsilon\to 0$ 取极限后, 偶极子必然会被定义成泛函

$$T(\varphi)=\varphi'(0). \tag{1.2.2}$$

于是与偶极子相对应的线性型 $T(\varphi)$ 仅在由 $(\mathcal{C})$ 中所有在原点处可导的函数 φ 组成的稠密子空间上有定义; 另外这也是一个 "不连续的" 线性型, 因为, 即便 $\varphi_j(x)$ 一致收敛于 0, 其导数 $\varphi_j'(x)$ 也不一定收敛于 0. 这促使我们考虑 $(\mathcal{C})$ 的一些子空间. 为了能研究任意阶的 "多层", 我们因此只能考虑无穷可导的 函数 φ.

空间 $(\mathscr{D})$ 我们将记 $(\mathscr{D})$ 为具有紧支集的无穷可导 n 元实变量复值函数 φ 所组成的向量空间. 若 $(\mathscr{D}^m)$ 为具有紧支集的 m 阶连续可导函数所组成的向量空间, 则 $(\mathscr{D})$ 为所有这些 $(\mathscr{D}^m)$ 的交集.

须指出的是, 除了函数 0 外, 在 $(\mathscr{D})$ 中还有别的函数 φ, 该结果虽经典但却并非完全显然. 那些不恒于零但其各阶导数在其支集的边界上为零的函数 φ, 其实一点也不初等! 我们将在下面介绍这些函数的一些性质.

引理. 对任意的 $\varepsilon>0$, 我们均可以找到一个非负函数 $\rho_\varepsilon(x)\in(\mathscr{D})$, 它的支集为闭球 $B_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n:\ r=|x|\leqslant\varepsilon\}$ 且当 $r<\varepsilon$ 时 $\rho_\varepsilon(x)>0$, 另外 $\rho_\varepsilon(x)$ 还满足

$$\iint\cdots\int\rho_\varepsilon(x)\,dx=+1. \tag{1.2.3}$$

① 一旦我们在广义函数空间上建立了拓扑 (参见第 3 章), 这就成了一个真正的极限.

事实上, 只需取

$$\rho_\varepsilon(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } r\geqslant\varepsilon,\\ \frac{k}{\varepsilon^n}\exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2-r^2}\right), & \text{若 } r<\varepsilon,\end{cases}\tag{1.2.4}$$

其中常数 k 满足

$$k\iint\cdots\int_{r\leqslant 1}\exp\left(\frac{-1}{1-r^2}\right)dx=1.\tag{1.2.5}$$

定理 1. *若 K 为 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集而 H 为 K 在 $\mathbb{R}^n$ 中的紧邻域, 则 $(\mathcal{C}_K)$ 中的任意元素均为 $(\mathscr{D})$ 中元素所组成的序列在 $(\mathcal{C}_H)$ 中的极限.*

我们因此可以泛泛地说, 空间 $(\mathscr{D})$ 在 $(\mathcal{C})$ 中稠密.

事实上, 若 $\varphi\in(\mathcal{C})$, 则其"正则化" [①]

$$\begin{cases}\varphi*\rho_\varepsilon(x)=\iint\cdots\int\varphi(\xi)\,\rho_\varepsilon(x-\xi)\,d\xi\\ \quad =\iint\cdots\int\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,\rho_\varepsilon(x_1-\xi_1,\ldots,x_n-\xi_n)\,d\xi_1\cdots d\xi_n\end{cases}\tag{1.2.6}$$

具有紧支集 (包含在 φ 的支集 K 的 ε–邻域内) 且无穷可导 (可在积分号下立刻求导), 因此属于 $(\mathscr{D})$. 另外, 鉴于 (1.2.3), 我们有:

$$\varphi*\rho_\varepsilon(x)-\varphi(x)=\iint\cdots\int\left[\varphi(\xi)-\varphi(x)\right]\rho_\varepsilon(x-\xi)\,d\xi.\tag{1.2.7}$$

由于仅当 $|x-\xi|<\varepsilon$ 时才会有 $\rho_\varepsilon(x-\xi)\neq 0$, 并且还存在着随 ε 一起趋于 0 的实数 $\eta_\varepsilon>0$ (φ 的振幅) 使得当 $|x-\xi|\leqslant\varepsilon$ 时有 $|\varphi(\xi)-\varphi(x)|\leqslant\eta_\varepsilon$, 可见 (1.2.7) 中的第二项可被 η_ε 控制. 因此 $\varphi\in(\mathcal{C}_K)$ 正是 $\varepsilon\to 0$ 时 $\varphi*\rho_\varepsilon\in(\mathscr{D})$ 在 $\mathcal{C}_H$ 中的极限.

单位分解 [②] **定理 2.** *对于 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集 Ω 的任意开覆盖 $\{\Omega_i\}$, 其中 i 跑遍某个有限或无限的指标集 I, 均可以找到定义在 Ω 上、依赖于同样指标集 I 且满足下列性质的无穷可导函数 α_i:*

(1.2.8)
- *a)* 函数 $\alpha_i\geqslant 0$; 并且 α_i (在 Ω 中) 的支集包含在 Ω_i 中;
- *b)* 在 Ω 的任意紧子集上, 仅有有限多个 α_i 不恒为零, 且在 Ω 中有

$$\sum_i\alpha_i(x)\equiv 1.$$

① 正则化是卷积的一个比较常见的应用, 我们将会在第 6 章中详细地讨论广义函数的正则化. 参见 A. WEIL [1], 第 3 章.

② 凡与覆盖, Urysohn 定理, 单位分解有关问题, 见 DIEUDONNÉ [2], 以及 BOURBAKI [2], 第 4 节.

这些函数 α_i 构成了一个单位分解, 也即将函数 1 分解成一些具有很小支集的无穷可微非负函数之和. 该分解被称为从属于覆盖 $\{\Omega_i\}$的分解.

首先假设覆盖 $\{\Omega_i\}$ 为局部有限[①] 且所有这些 Ω_i 均在 Ω 中相对紧. 由此可知我们可以找到一个新的局部有限覆盖 $\{\Omega'_i\}$, 它依赖同样的指标集且从属于前一个, 也就是说 $\overline{\Omega'_i} \subset \Omega_i$. 我们还将选取从属于 $\{\Omega'_i\}$ 的新覆盖 $\{\Omega''_i\}$. 设 β_i 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个取值介于 0 和 1 之间, 在 $\overline{\Omega''_i}$ 上等于 1 但在 Ω'_i 的余集上等于 0 的连续函数 (可利用 Urysohn 延拓方法来定义). 由于 $\overline{\Omega'_i}$ 为紧集, 则当 $\varepsilon_i > 0$ 足够小时 $\overline{\Omega'_i}$ 的 ε_i–闭邻域会被包含在 Ω_i 中, 故借助前面引理中所定义的函数 ρ_{ε_i} 而得到的正则化

$$\gamma_i = \beta_i * \rho_{\varepsilon_i} \in (\mathscr{D}) \tag{1.2.9}$$

在 $\overline{\Omega''_i}$ 上大于 0 且它在 $\mathbb{R}^n$ 中的支集包含在 Ω_i 中. 在 Ω 的每点 x 处, 和式 $\sum_\nu \gamma_\nu(x)$ 均有定义, 并且在点 x 的紧邻域上该和式中甚至仅有有限项不恒等于零; 上述和式因此无穷可导且由于那些 Ω''_i 构成了 Ω 的一个覆盖, 它也在 Ω 上处处大于 0. 于是

$$\alpha_i(x) = \gamma_i(x) \bigg/ \left(\sum_\nu \gamma_\nu(x)\right) \tag{1.2.10}$$

满足所有想要的性质.

现设 $\{\Omega_i\}$ 为一个任意的开覆盖. 由于 Ω 为仿紧, 我们因此可以找到一个更细、依赖于另一指标集 J 的局部有限覆盖 (Ω_j) 以及一个从 J 到 I 的映射 $j \to i(j)$ 使得每个 Ω_j 均在 Ω 中相对紧且对任意的 $j \in J$, 都有 $\Omega_j \subset \Omega_{i(j)}$. 由我们刚才的讨论, 存在与覆盖 (Ω_j) 相对应的单位分解 (α_j). 对任意的 $i \in I$, 令

$$\alpha_i = \sum_{i(j)=i} \alpha_j \,.$$

由于 Ω 中的每点 x 均有一邻域使得在该邻域上仅有有限多个 α_j 不恒为零, 故 α_i 也在 Ω 上无穷可导, 它 (在 Ω 中) 的支集恰好是使得 $i(j) = i$ 的那些 α_j 的支集的并, 因而也包含在 Ω_i 中. 于是这些 α_i 具有想要的所有性质.

拓扑空间 $(\mathscr{D}_K)$　我们将记 $(\mathscr{D}_K)$ 为由 $(\mathscr{D})$ 中所有支集包含在 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集 K 中的函数 φ 组成的子空间. 我们将在 $(\mathscr{D}_K)$ 上赋予一个比 $(\mathcal{C}_K)$ 的诱导拓扑更细的拓扑. 我们称函数 $\varphi_j \in (\mathscr{D}_K)$ 在 $(\mathscr{D}_K)$ 中收敛于 0, 若函数 φ_j 及其各阶导数在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于 0. 换句话说, 对每个固定的整数组 $p_1 \geqslant 0, p_2 \geqslant 0, \ldots, p_n \geqslant 0$, 偏导数

$$\frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n}}{(\partial x_1)^{p_1}(\partial x_2)^{p_2}\cdots(\partial x_n)^{p_n}}\,\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

① 一个开覆盖被称为是局部有限的, 若任意紧集仅与该覆盖中的有限多个开集相交.

关于 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 一致收敛于 0 (但对于偏导数的全体却没有任何一致性的要求). 该拓扑可由一族半范 N_p 来定义:

$$\mathrm{N}_p(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^p \varphi(x)|\,,\ \text{其中}\ p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)\,.$$

我们同样可引入 $(\mathscr{D}^m)$ 的子空间 $(\mathscr{D}_K^m)$ 并在它的上面赋予一个仅涉及阶不大于 m 的偏导数的类似拓扑. 如果现在来重新考察定理 1 的证明, 大家将会发现, 若 D^p 是一个阶为 $|p| \leqslant m$ 的求偏导而 $\varphi \in (\mathscr{D}_K^m)$, 则通过在积分号 $\int$ 下求导可得

$$D^p(\varphi * \rho_\varepsilon) = D^p \varphi * \rho_\varepsilon\,,$$

将定理 1 的证明应用于 $D^p\varphi$ 就可证明, 当 ε 趋于 0 时 $\varphi * \rho_\varepsilon$ 的所有阶不大于 m 的导数均一致收敛于 φ 的相应导数; 换句话说, 正如 $(\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{D}^0) = (\mathscr{C})$ 中稠密一样, 该空间也"在 $(\mathscr{D}^m)$ 中稠密".

广义函数 *一个广义函数 T 因此是一个定义在 $(\mathscr{D})$ 上且在每一个 $(\mathscr{D}_K)$ 上连续的线性型, 这里 K 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集.* 出于简便, 我们也说它是 $(\mathscr{D})$ 上的连续线性型.

按通常说法, 广义函数 T 因此是对所有 (有紧支集的无穷可微) 函数 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 有定义且具有下列性质的泛函 $\varphi \to T(\varphi)$ 或 $T.\varphi$ 或 $\langle T, \varphi\rangle$ (给每个 φ 赋予一个复数):

a) T 为线性泛函:

$$\left\{\begin{aligned} &T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2)\,, \\ &T(k\varphi) = kT(\varphi)\,,\ \text{这里}\ k\text{为复数}\,; \end{aligned}\right. \tag{1.2.11}$$

b) T 为"连续"泛函:

若所有 $\varphi_j \in (\mathscr{D})$ 的支集均包含在 $\mathbb{R}^n$ 的一个固定紧子集中, 并且它们本身以及它们的各阶导数均在 $\mathbb{R}^n$ 上一致趋于 0, 则这些复数 $T(\varphi_j)$ 趋于 0.

所有的广义函数 T 合起来构成了一个向量空间 (可将两个广义函数进行相加并将一个广义函数乘以一个复数), 我们将之记作 $(\mathscr{D}')$.

空间 $\mathbb{R}^n$ 上的测度 μ 定义了一个特殊广义函数, 因为 $\mu(\varphi)$ 关于 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 线性, 并且 $\mu(\varphi)$ 不仅在被赋予了前面所定义的拓扑的 $(\mathscr{D}_K)$ 上连续, 它甚至还在被赋予了由 $(\mathscr{C}_K)$ 所诱导的较粗拓扑的 $(\mathscr{D}_K)$ 上连续. 换句话说, 如果支集包含在 $\mathbb{R}^n$ 的一个固定紧集中的 $\varphi_j \in (\mathscr{D})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于 0, 即便对它们的导数没有任何要求, 这些 $\mu(\varphi_j)$ 依然会收敛于 0. 反之亦然:

广义函数与测度 **定理 3.** *为使广义函数 T 能被一个测度 μ 来定义, 当且仅当它在每个被赋予了由 $(\mathscr{C}_K)$ 所诱导的拓扑的空间 $(\mathscr{D}_K)$ 上连续. 此时 μ 可被唯一确定.*

正如上面所说, 定理中的条件必要. 下证该条件的充分性. 为此, 设 H 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧子集. 如果 T 在被赋予了由 $(\mathcal{C}_H)$ 所诱导的拓扑的 $(\mathscr{D}_H)$ 上连续, 则它可被唯一地延拓成 $(\mathscr{D}_H)$ 在 $(\mathcal{C}_H)$ 中的闭包 $\overline{(\mathscr{D}_H)}$ 上的连续线性型 $\overline{T}_H$. 若 $H_1 \supset H_2$, 则 $\overline{(\mathscr{D}_{H_1})} \supset \overline{(\mathscr{D}_{H_2})}$ 且 $\overline{T}_{H_1}$ 延拓 $\overline{T}_{H_2}$. 于是这些不同延拓 $\overline{T}_H$ 合起来就定义了 T 在所有 $\overline{(\mathscr{D}_H)}$ 的并集上的延拓 $\overline{T}$; 由定理 1 可知这个并集正是 $(\mathcal{C})$, 而 $\overline{T}$ 则是 $(\mathcal{C})$ 上的线性型且在每个 $(\mathcal{C}_K)$ 上的限制均连续 [因为当 H 为 K 的邻域时 $\overline{(\mathscr{D}_H)}$ 包含 $(\mathcal{C}_K)$], 也就是说是一个测度 μ, 而 T 正是由该测度出发所定义的广义函数; 另外, 这样的测度也是唯一的.

我们由此证明在测度空间 $(\mathcal{C}')$ 与广义函数空间 $(\mathscr{D}')$ 的一个子空间之间存在着一个一一对应. 正如在第 1 节中所做的那样, 我们将由一个测度所定义的广义函数与该测度完全等同. 故测度是特殊的广义函数; 在每个紧集上可积的函数 f (其定义仅差一个零测集) 则是一个特殊测度, 因此更是一个如下定义的特殊广义函数

$$f(\varphi) = \iint \cdots \int f(x)\varphi(x)\,dx\,,\ \varphi \in (\mathscr{D}). \tag{1.2.12}$$

由公式 (1.2.2) 所定义的偶极子为不是测度的广义函数的最简单的例子, 因为若原点位于 K 的内部, 则该偶极子是被赋予了由 $(\mathcal{C}_K)$ 所诱导的拓扑的 $(\mathscr{D}_K)$ 上的不连续的线性型. 同样可知, 由定义在 $(\mathscr{D}^m)$ 上且在每个 $(\mathscr{D}^m_K)$ 上的限制均连续的线性型所构成的空间 $(\mathscr{D}'^m)$, 可与 $(\mathscr{D}')$ 的一个子空间等同起来. 偶极子属于 $(\mathscr{D}'^1)$. 属于 $(\mathscr{D}'^m)$ 的广义函数将被称为是阶不大于 m 的广义函数.

§3. 局部化原理. 广义函数的支集

在某个开集内为零的广义函数 称广义函数 T 在 $\mathbb{R}^n$ 的开集 Ω 内为零, 若 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 的支集包含在 Ω 时 $T(\varphi) = 0$. 称两广义函数 T_1, T_2 在 Ω 内相等, 若 $T_1 - T_2$ 在 Ω 内为零. 该定义使我们得以像对待测度或函数那样, 从局部的观点来考察广义函数; 我们因此可以针对 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 Ω 来表述广义函数之间的等式, 而无需知道它们在整个空间 $\mathbb{R}^n$ 上的任何性质.

如同对测度那样, 我们将研究 $\mathbb{R}^n$ 的开集 Ω_0 上的广义函数. 我们将记 $(\mathscr{D}_{\Omega_0})$ 为由 $(\mathscr{D})$ 中所有支集包含在 Ω_0 中的函数 φ 构成的子空间. 开集 Ω_0 上的广义函数是一个定义在 $(\mathscr{D}_{\Omega_0})$ 上且在每一个 $(\mathscr{D}_K)$ 上的限制均连续的线性型, 这里 K 为包含在 Ω_0 中的紧集. 由这些广义函数所组成的空间将记作 $(\mathscr{D}'_{\Omega_0})$.

当然, 开集 Ω_0 上的广义函数 T 不一定能延拓成 $\mathbb{R}^n$ 上的广义函数 T. 例如可证明 $\exp(1/x)$ 这样对 $x>0$ 有定义的函数不能延拓成实直线 $\mathbb{R}^1$ 上的广义函数.

称一个广义函数在一点的邻域内为零, 若它在包含该点的某个开集内为零.

仅仅能在一个开集内考察广义函数还很不够, 还必须要能够从一个广义函数的局部信息出发, 通过"分片粘贴"来得到其整体信息.

“分片粘贴”原理　**定理 4.** 设 $\{\Omega_i\}$ 为一族开集 (指标集 I 有限或无限), 其并为 Ω; 而 $\{T_i\}$ 为一族依赖同一指标集 I 的广义函数, 每个广义函数 T_i 定义在开集 Ω_i 上; 另外还假设当 Ω_i 和 Ω_j 有非空交集时 T_i 和 T_j 在上述交集上重合. 则在 Ω 上存在唯一一个在每个 Ω_i 上与 T_i 重合的广义函数 T.

利用定理 2 (单位分解) 可在 Ω 上找到满足 (1.2.8) 中所有条件的函数 $\alpha_i \in (\mathscr{D}_\Omega)$. 将 α_i 的支集记为 K_i. 现设 $\varphi \in (\mathscr{D}_\Omega)$. 在 $\mathbb{R}^n$ 上, 我们有

$$\varphi = \sum_i (\alpha_i \varphi)\,. \tag{1.3.1}$$

右边和式中只有有限项不恒为零, 这是因为仅有有限多个 α_i 在 φ 的紧支集上不恒为零. 因此, 若 T 存在, 则它必然可被完全确定, 因为它满足

$$T(\varphi) = \sum_i T(\alpha_i \varphi) = \sum_i T_i(\alpha_i \varphi)\,. \tag{1.3.2}$$

反过来, 上述公式将 $T(\varphi)$ 定义成 $(\mathscr{D}_\Omega)$ 上的线性型. 该线性型在每个 $(\mathscr{D}_K)$ 上的限制均连续, 这里 $K \subset \Omega$ 为紧集; 因为若 φ 在 $(\mathscr{D}_K)$ 中收敛于 0, 则每个 $\alpha_i\varphi$ 也在 $(\mathscr{D}_{K\cap K_i})$ 中收敛于 0, 因此 $T_i(\alpha_i\varphi)$ 收敛于 0; 但 φ 的支集总是包含在紧集 K 中, 因此仅有有限多个固定的 i 出现在公式 (1.3.2) 中, 故 $T(\varphi)$ 趋于 0; 从而 T 为 Ω 上广义函数. 我们还将证明在 Ω_i 中 $T = T_i$. 为此设 $\varphi \in (\mathscr{D}_\Omega)$ 且其支集包含在 Ω_i 中; 则 $\alpha_j\varphi$ 的支集必然会包含在交集 $\Omega_i \cap \Omega_j$ 中, 但 T_i 和 T_j 在这个交集上重合, 于是我们有 $T_i(\alpha_j\varphi) = T_j(\alpha_j\varphi)$, 进而就有

$$T_i(\varphi) = \sum_j T_i(\alpha_j \varphi) = \sum_j T_j(\alpha_j \varphi) = T(\varphi)\,. \tag{1.3.3}$$

广义函数 T 因此具有所要求的所有性质.

在 T_i 均为零这一特殊情形, 广义函数 $T = 0$ 就是上述问题的唯一解; 换句话说, 在一族开集内为零的广义函数在其并集内也为零. 等价地: 在开集 Ω 的每点邻域内均为零的广义函数在 Ω 内也为零.

评注. 针对 $(\mathscr{D}')$ 所证明的定理事实上对 $(\mathscr{D}'^m)$ 也成立. 如果广义函数 $T \in (\mathscr{D}')$ 在一族开集 Ω_i 上的阶不大于 m, 则它在这些开集的并集 Ω 上的阶也不大于 m.

广义函数的支集　定理 4 使我们得以能够定义一个广义函数 T 的支集. 广义函数 T 在其中为零的所有开集的并集事实上也是一个 T 在它里面为零的开集, 且是最大的那一个; 其余集就是 T 的支集, 因此就是 T 在它外面为零的最小闭集. 正如我们曾针对测度所说的那样, 我们也可以说: 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一点 x 属于 T 的支集 F 当且仅当 T 在 x 的任何开邻域内均不为零.

一个广义函数的支集可以是 $\mathbb{R}^n$ 的任意闭子集. 若 T 和 φ 的支集没有公共点, 那么 $T(\varphi)=0$. 我们以后甚至还将证明, 如果 φ 及其各阶导数在 T 的支集上为零, 则 $T(\varphi)=0$ (第 3 章定理 33). 若 T 为测度 μ, 则其支集就是它作为测度时所定义的支集. 事实上, 若 Ω_1 和 Ω_2 分别是 μ 作为测度和广义函数时的支集的余集, 那么

a) 若 $\varphi\in(\mathscr{C}_{\Omega_1})$ 时 $\mu(\varphi)=0$, 则当 $\varphi\in(\mathscr{D}_{\Omega_1})$ 时上式更成立, 这表明 $\Omega_2\supset\Omega_1$.

b) 若 $\varphi\in(\mathscr{D}_{\Omega_2})$ 时 $\mu(\varphi)=0$, 则当 $\varphi\in(\mathscr{C}_{\Omega_2})$ 且 H 为 φ 的支集 K 在 Ω_2 中的紧邻域时, 由定理 1 知 φ 为 $(\mathscr{D}_H)$ 在 $(\mathscr{C}_H)$ 中极限点, 又 μ 在 $(\mathscr{D}_H)$ 上为零, 从而我们就有 $\mu(\varphi)=0$. 因此 $\Omega_1\supset\Omega_2$.

对所有涉及局部性的问题, 开集 Ω_0 上的广义函数与 $\mathbb{R}^n$ 上的广义函数均具有相同性质. 我们将总是取 $\Omega_0=\mathbb{R}^n$, 而这不会对研究的一般性带来任何实质限制.

§4. 非负广义函数

我们称广义函数 T 为*实广义函数*, 若对任意实值函数 $\varphi\in(\mathscr{D})$, 其值 $T(\varphi)$ 均为实数. 如同测度一样, 任意一个广义函数也可分解成实部和虚部:

$$T=T_1+iT_2\,,$$

其中 T_1 和 T_2 为实广义函数使得对任意实值函数 $\varphi\in(\mathscr{D})$, 均成立

$$T(\varphi)=T_1(\varphi)+iT_2(\varphi)\,.$$

我们称广义函数 $T\geqslant 0$ (非负), 若当 $\varphi\in(\mathscr{D})$ 且满足 $\varphi\geqslant 0$ 时, 均有 $T(\varphi)\geqslant 0$. 我们称广义函数 T_1 不小于广义函数 T_2 (记作 $T_1\geqslant T_2$), 如果 $T_1-T_2\geqslant 0$, 也就是说当 $\varphi\geqslant 0$ 时, 总有 $T_1(\varphi)\geqslant T_2(\varphi)$.

定理 5. *非负广义函数必为非负测度.*

为此, 设 T 为非负广义函数. 下面我们将证明它是被赋予了由 $(\mathscr{C}_K)$ 所诱导的拓扑的 $(\mathscr{D}_K)$ 上的连续线性型. 假设 $\varphi_j\in(\mathscr{D}_K)$ 在 $(\mathscr{C}_K)$ 中趋于 0: 它们一致趋于 0 且其支集包含在 $\mathbb{R}^n$ 的固定紧子集 K 中. 设 $\psi\in(\mathscr{D})$ 是一个在 $\mathbb{R}^n$ 上非负且在 K 上不小于 1 的固定函数. 则我们有:

$$|\varphi_j(x)|\leqslant\varepsilon_j\psi(x)\,,\tag{1.4.1}$$

其中 ε_j 趋于 0.

令 $\varphi_j(x)=u_j(x)+iv_j(x)$, 这里 u_j 和 v_j 为 $(\mathscr{D})$ 中的实值函数且满足

$$-\varepsilon_j\psi\leqslant u_j\leqslant\varepsilon_j\psi\,,\quad -\varepsilon_j\psi\leqslant v_j\leqslant\varepsilon_j\psi\,,\tag{1.4.2}$$

从而由 $T \geqslant 0$ 可得:

$$(1.4.3) \qquad -\varepsilon_j T(\psi) \leqslant T(u_j) \leqslant \varepsilon_j T(\psi), \quad -\varepsilon_j T(\psi) \leqslant T(v_j) \leqslant \varepsilon_j T(\psi),$$

我们因此就有

$$(1.4.4) \qquad |T(u_j)| \leqslant \varepsilon_j T(\psi, \quad |T(v_j)| \leqslant \varepsilon_j T(\psi), \quad |T(\varphi_j)| \leqslant 2\varepsilon_j T(\psi).$$

这就证明了, 正如我们打算证明的那样, 这些 $T(\varphi_j)$ 趋于 0.

于是由定理 3 可知 T 是一个测度 μ. 另外, 当 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 且满足 $\varphi \geqslant 0$ 时, 我们还有 $\mu(\varphi) \geqslant 0$; 若 $\varphi \in (\mathcal{C})$ 为任意非负函数, 正则化 $\varphi * \rho_\varepsilon \in (\mathscr{D})$ 且非负 (定理 1), 故

$$\mu(\varphi * \rho_\varepsilon) \geqslant 0.$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时, 这些 $\varphi * \rho_\varepsilon$ 在某个 $\mathcal{C}_H$ 中收敛于 φ, 于是 $\mu(\varphi) \geqslant 0$, 从而 μ 为非负测度. 这就是所要证明的.

该定理非常重要, 因为可被用来证明某些广义函数是测度. 若 f 为上调和函数, 则 $\Delta f \leqslant 0$, 因此为非正测度, 由此可得 Riesz 分解 (见第 6 章第 10 节定理 30).

上述定理同时还表明在 $(\mathscr{D}')$ 上引入的序结构仅有非常有限的价值: 它没有走出测度的框架. 如果 T 不是一个测度, 它不仅没有符号, 也不能与任何测度进行比较, 而且也不是两个非负广义函数之差.

但我们在局部上可以比较广义函数. 在每点邻域内非负的广义函数为非负广义函数; 在开集 Ω 内非负的广义函数是一个在 Ω 内非负的测度. (但定义在 $\mathbb{R}^n$ 上且在 Ω 中非负的广义函数 T, 却可能在 Ω 中等于一个不能延拓成 $\mathbb{R}^n$ 上的测度的非负测度. 参见第 23 页评注中的例子.)

§5. 各种推广

1° 向量值广义函数 设 E 为完备的局部凸拓扑向量空间, 其中元素被称为向量并用粗体字母表示. 我们将会时常用到 $\mathbb{R}^n$ 上的向量值函数 $\boldsymbol{f}(x)$ 的概念; 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 其值 $\boldsymbol{f}(x)$ 为 E 中的向量. 连续、可微、解析函数的概念可立刻推广到这里. 进而就可以将这些函数推广成向量值广义函数 $\boldsymbol{T}$, 使得对任意有紧支集的无穷可导数值函数 $\varphi(x)$ (因此是目前一直在讨论的同一空间 $(\mathscr{D})$ 中的元素), 其值 $\boldsymbol{T}(\varphi)$ 为 E 中的向量. 向量值广义函数就是一个从 $(\mathscr{D})$ 到 E 上的连续线性映射. 一个连续的向量值函数 $\boldsymbol{f}(x)$ 可借助下面常用的公式来定义一个这样的向量值广义函数

$$(1.5.1) \qquad \boldsymbol{f}(\varphi) = \iint \cdots \boldsymbol{f}(x)\varphi(x)\, dx.$$

只要对 E 作一些必要的补充假设, 本书中关于复值广义函数的大多数代数结果均可推广到向量值广义函数[①]. 相反地, 对于那些拓扑问题则会有不少新困难.

2° 我们依旧假设 E 为局部凸的完备向量空间, 其对偶记为 E'. 我们将用 $\langle e, e' \rangle$ 来表示 $e \in E$ 和 $e' \in E'$ 之间的点积. 设 T 为数值广义函数, 因此属于直到这里一直都在讨论的广义函数空间 $(\mathscr{D}')$. 则不仅对数值函数 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 可定义 $T(\varphi)$, 对在 E 中取值且有紧支集的无穷可导函数 $\boldsymbol{\varphi}(x)$ 也可同样定义. 此时 $T(\boldsymbol{\varphi}) = T.\boldsymbol{\varphi}$ 为 E 中的向量, 且对任意的 $e' \in E$, 还满足

$$\left\langle (T.\boldsymbol{\varphi}), e' \right\rangle = T.\left\langle \boldsymbol{\varphi}, e' \right\rangle. \tag{1.5.2}$$

上述公式反过来将 $T.\boldsymbol{\varphi}$ 定义成 E 的弱完备化即 E' 的代数对偶 E'^* 中的元素; 可以证明 $T.\boldsymbol{\varphi}$ 恰好属于 E[②].

若 T 为数值函数 $f(x)$ 或 Dirac 测度 δ, 则我们将有

$$f.\boldsymbol{\varphi} = \iint \cdots \int f(x)\boldsymbol{\varphi}(x)\, dx\,, \tag{1.5.3}$$

$$\delta.\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(0)\,. \tag{1.5.4}$$

3° 无穷可微流形上的广义函数 设 V^n 为 n 维无穷可微流形. 在它上面可定义广义函数来推广函数、甚至是微分形式或者任意属性的张量场. 广义函数 – 微分形式被称为流. 我们将在第 9 章研究它们. 这里仅限于考虑 V^n 上具有紧支集的无穷可导数值函数所组成的空间 $(\mathscr{D})_{V^n}$. 我们将从 $(\mathscr{D})_{V^n}$ 出发来定义 V^n 上的广义函数的空间 $(\mathscr{D}')_{V^n}$; 它有一些与 $(\mathscr{D}')_{\mathbb{R}^n}$ 类似的性质. 但也有一些重要的区别:

a) 只有在 V^n 上定义了无穷可微求导场也即向量场后, 我们才能在 V^n 上定义求偏导 [参见公式 (2.3.35)].

b) 一个测度 μ 是一个特殊广义函数, 但一个函数 $f(x)$ 却不再能定义一个特殊广义函数. 仅在固定一个特殊体积元 dx 后, 一个函数才可定义一个特殊广义函数.

设 U^m 和 V^n 分别为 m 维和 n 维无穷可微流形. 若 $y = H(x)$ 为从 U^m 到 V^n 的无穷可微映射且在无穷远处连续, 也即使得 V^n 的每一个紧子集的逆像也是 U^m 的紧子集, 则对任意的 $\varphi \in (\mathscr{D})_{V^n}$, 可定义其转置像 $H^*\varphi$; 它是 $(\mathscr{D})_{U^m}$ 中的函数:

$$H^*\varphi(x) = \varphi[H(x)]\,, \quad \forall\, x \in U^m\,. \tag{1.5.5}$$

① 参见 Schwartz [9] 和 [10].

② 参见 Schwartz [9].

由此可定义 U^m 上的广义函数 T 在 H 下的直接像; 它是 V^n 上的广义函数 HT:

$$HT.\varphi = T.H^*\varphi, \quad \forall\, \varphi \in (\mathscr{D})_{V^n}. \tag{1.5.6}$$

特别地, 如果 H 及其逆均为无穷可微的同胚, 则 H 在 $(\mathscr{D}')_{U^n}$ 和 $(\mathscr{D}')_{V^n}$ 之间定义了一个同构. 若 U^m 为 V^n 中正则浸入子流形, 则可将 H 取作从 U^m 到 V^n 的恒等映射. 故 $\varphi = H^*\bar{\varphi}$ 为 V^n 上函数 $\bar{\varphi}$ 在 U^m 上的限制, 而 $\overline{T} = HT$ 则是 U^m 上广义函数 T 在 V^n 上的延拓; 对任意的 $\bar{\varphi} \in (\mathscr{D})_{V^n}$, 由定义可知

$$\overline{T}(\bar{\varphi}) = T(\varphi).$$

第二章　广义函数的求导

内容提要　第 1 节中定义了与连续可微函数的通常求导相一致的广义函数的求导:

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) \quad [公式\ (2.1.6)].$$

所有的广义函数 (特别地, 所有的局部可积函数) 均为无穷可导并且我们还可以交换求导的次序 (p. 19). 正是这个基本性质解释了为什么要引入广义函数.

第 2 节给出了一些单变量情形下 ($n = 1$) 的导数的例子. 第一个例子最为重要, 它揭示了函数的间断点所能产生的影响, 大家可发现间断点将以质点的形式出现在该函数的导数中: Heaviside 函数 $Y(x)$ (p. 20) 的导数为 Dirac 测度 δ (2.2.3), 后者的各阶导数 δ', δ'', ... 均可以被严格定义: $\delta^{(p)}(\varphi) = (-1)^p \varphi^{(p)}(0)$ (2.2.5). 这就解释了为什么符号计算中的许多经典方法是正确的.

第二个例子更为微妙 (p. 21); 它以自然方式引入了应用于偏微分方程理论中的 Hadamard 有限部分理论, 以及 Cauchy 主值; 公式 (2.2.31) 中的赝函数 Y_m 将会在第 6 章第 5 节关于非整数阶求导那部分内容中用到, 它们还将是我们在偏微分方程理论所遇到的一些公式的最为简洁的表达式.

第 3 节给出了一些 n 维空间中的求导的例子. Ostrogradsky 公式, Stokes 公式, 以及 Green 公式因此都有了新的解释. 例 2 尤其重要. 大家知道函数

$$(1/r)^{n-2} \quad [\ 当\ n = 2\ 时为\ \log(1/r)\ ]$$

在原点以外的区域内为调和函数; 我们将要在例 2 中计算 $\Delta(1/r)^{n-2}$, 并还将得知它等于 $-N\delta$ (即在原点处放有质量为 $-N$ 的质点) (2.3.10); 该公式将是 Poisson 公式以及位势和下调和函数研究的基础. 本节中的其它例子在应用中同样重要, 但大家最好还是在第一次阅读时一览而过, 仅在它们被引用时才来查阅.

第 4 节讨论在一维 ($n=1$) 的情形如何求原函数. 定理 1 (p. 33) 将关于函数的一个经典结果推广到广义函数. 任意一个广义函数有无穷多个原函数, 这些原函数彼此之间仅相差一个常数.

第 5 节将一维的结论拓广到任意 n 维, 而定理 4 (p. 35) 则推广了定理 1.

第 6 节讨论如何寻求多个偏导数 $\frac{\partial T}{\partial x_j}=S_j$ 已知的广义函数 T; 在该节中引入了经典的相容性条件 $\frac{\partial S_i}{\partial x_j}=\frac{\partial S_j}{\partial x_i}$ (2.6.2) [定理 6, p. 39].

除了我们刚才指出了那些一般性质外, 第 4, 5, 6 节也包含了由广义函数的各阶导数出发来给出广义函数本身性质的一些特殊定理 (定理 2, 3, 5, 7). 寻求原函数的问题整个是独立的, 在后面也不会被用到.

§1. 导数的定义

正则函数的导数 对任意的广义函数 T, 我们将定义它关于变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的"偏导数"广义函数; 我们将用记号 T'_{x_k} 或 $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ 来表示 T 关于 x_k 的偏导数 (若 $n=1$, 则将之记作 $\frac{dT}{dx}$ 或 T'). 要想让导数的概念有价值, 则当 T 为 (通常意义下) 有连续偏导数的连续函数 f 时, 其偏导数 $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ 就必须为 $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. 我们将在这里给一个虽直接但有些人为的定义. 我们将在第 3 章第 4 节再给一个与通常概念更为一致的定义.

对任意的 $\varphi\in(\mathscr{D})$, 由 (1.2.12) 有

$$(2.1.1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi) &= \iint\cdots\int \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n) \\ &\qquad\qquad \varphi(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_k\cdots dx_n \\ &= \int\cdots\int dx_1\cdots dx_{k-1}dx_{k+1}\cdots dx_n\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x_k}\,\varphi\,dx_k\right). \end{aligned}\right.$$

括号里的积分可用分部积分来计算; 由于 φ 在某个紧集外为零, 故全积分为零:

$$(2.1.2)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x_k}\,\varphi\,dx_k=-\int_{-\infty}^{+\infty} f\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\,dx_k\,.$$

$$(2.1.3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi) &= -\int\cdots\int dx_1\cdots dx_{k-1}dx_{k+1}\cdots dx_n\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\,dx_k\right) \\ &= -\iint\cdots\int f\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\,dx\,. \end{aligned}\right.$$

最终

$$(2.1.4)\quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi)=f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)$$

[依旧是根据定义 (1.2.12)].

广义函数的导数 当我们考虑的不再是 f 而是任意广义函数 T 时, 上述 f 和 $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ 之间的这个关系式仍然有意义. 由关系式

$$S(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) \tag{2.1.5}$$

所定义的泛函 S 显然是 $(\mathscr{D})$ 上的线性型且在每个 $(\mathscr{D}_K)$ 上连续. 因为若 $\varphi_j \in (\mathscr{D})$ 趋于 0, 则 $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}$ 亦如此, 但 T 在 $(\mathscr{D}_K)$ 上连续, 故 $-T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)$ 趋于 0. 因此 S 是一个新的广义函数, 且由定义就是 $\frac{\partial T}{\partial x_k}$; 于是 $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ 由下面的公式来定义:

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right); \quad \text{即 } T'_{x_k}(\varphi) = -T(\varphi'_{x_k})\,. \tag{2.1.6}$$

上述关系式表明, 在 $(\mathscr{D})$ 和 $(\mathscr{D}')$ 的对偶关系中, 变换

$$\varphi \to -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \quad \text{及} \quad T \to \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

当中的一个是另外一个的转置.

随后我们自然可以考虑高阶导数: *所有的广义函数均为无穷可导. 另外我们还可以交换求导的次序* [因为对函数 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 可交换求导次序] 并且还有

$$D^p T(\varphi) = (-1)^{|p|} T(D^p \varphi)\,. \tag{2.1.7}$$

评注. 在任意紧集上均可积的函数 f 因此无穷可导. 但若它在通常意义下没有导数, 其导数将不是一个函数甚至一般也不是一个测度, 而是一个广义函数. 另外, 若 f 连续且有一个很不正则 (比如说不可积) 的 (通常意义下的) 导数 $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, 该导函数与广义函数导数 $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ 之间并没有一个简单的关系. 这就使得当 f (在通常意义下的) 偏导函数不正则时, 可能会有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k},$$

但对于广义函数导数来说, 我们却总有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}\,.$$

求导运算具有局部性. 只要知道了一个广义函数在 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 Ω 里的性质而无需知道它在整个 $\mathbb{R}^n$ 上的性质, 我们就可以知道该广义函数在 Ω 内的所有导数. 广义函数 T 的广义函数导数的支集包含在 T 的支集中.

§2. 求导的例子. 单变量的情形 $(n = 1)$

我们已经知道, 若 f 为连续函数且其 (通常意义下的) 导函数 f' 连续, 则它的广义函数导数与其导函数重合. 若 f 或其 (通常意义下的) 导函数 f' 不连续, 情况就会变得完全不一样.

例 1. 间断函数. Heaviside 函数 $Y(x)$ 的各阶导数

在电学和符号计算中, 将 $x<0$ 时等于 0 而当 $x>0$ 时等于 $+1$ 的函数 $Y(x)$ 称为单位梯级函数或 Heaviside 函数. 该函数在 $x=0$ 处没有定义, 但这点并不重要, 因为作为广义函数来考虑时, 一个函数仅需几乎处处有定义. 对任意 $\varphi \in (\mathscr{D})$,

$$Y(\varphi)=\int_0^{+\infty}\varphi(x)\,dx\,. \tag{2.2.1}$$

其导数 Y' 被定义为

$$Y'(\varphi)=-Y(\varphi')=-\int_0^{+\infty}\varphi'(x)\,dx=\varphi(0)=\delta(\varphi)\,, \tag{2.2.2}$$

其中 δ 表示 Dirac 测度. 因此我们有

$$Y'=\delta\,. \tag{2.2.3}$$

该公式很久以前就为人所知并应用于符号计算; 但一直都没有得到合理解释.

须指出的是, 在原点的余集 Ω 内, 函数 Y 连续, 其 (通常意义下的) 导函数也连续且为零; 因此在进行任何计算之前就可预见 Y' 的支集为点状, 且退缩为原点.

很容易计算其高阶导数:

$$Y''(\varphi)=\delta'(\varphi)=-\delta(\varphi')=-\varphi'(0)\,. \tag{2.2.4}$$

因此 $Y''=\delta'$ 是放在原点处 “矩” 为 -1 的偶极子. 而更高阶的导数则是 “多极子”; 其 p 阶导数 $\delta^{(p)}$ 被定义为

$$\delta^{(p)}(\varphi)=(-1)^p\varphi^{(p)}(0)\,. \tag{2.2.5}$$

我们可立刻将上述结论推广:

分段正则函数的各阶导数

设 f 为 “分段正则” 函数. 在每个区间 $(x_{\nu-1},\ x_\nu)$ 内 $\left(\lim\limits_{\nu\to\pm\infty}x_\nu=\pm\infty\right)$, 这是一个通常意义下的无穷可导函数; 但 f 及其 (通常意义下的) 各阶导数在每点 x_ν 处为第一类间断. 设 $f_\nu^{(p)}$ 为 f 在通常意义下的 p 阶导数在点 x_ν 处的跳跃. 因此 f 是一个几乎处处有定义的函数 (在由点 x_ν 组成的可数集外处处有定义). 这里有必要区别广义函数 f 的各阶导数 $f',\ f'',\ \ldots,\ f^{(n)}$ 与广义函数 $[f'],\ [f''],\ \ldots,\ [f^{(n)}]$, 后者是一些函数, 在区间 $(x_{\nu-1},\ x_\nu)$ 内等于 f 在通常意义下的相应导数 (但在点 x_ν 处没有定义). 故对于 $f=Y$, 我们有 $f'=\delta$ 且 $[f']=0$. 一般地, 由分部积分立刻可得

$$f'(\varphi)=-f(\varphi')=\sum_\nu\varphi(x_\nu)f_\nu+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\big[f'(x)\big]\,dx\,, \tag{2.2.6}$$

而这又可以写成

$$f' = [f'] + \sum_\nu f_\nu \delta_{(x_\nu)}. \tag{2.2.7}$$

函数 f 的间断点以质点的形式出现在 f 的导数中. 而在更高阶导数中, 它们也永远不会消失. 事实上, 我们可由此逐步导出

$$f^{(p)} = [f^{(p)}] + \sum_\nu f_\nu^{(p-1)} \delta_{(x_\nu)} + \sum_\nu f_\nu^{(p-2)} \delta'_{(x_\nu)} + \cdots + \sum_\nu f_\nu \delta_{(x_\nu)}^{(p-1)}. \tag{2.2.8}$$

例 2. 赝函数. Hadamard 所定义的有限部分

我们将在下面计算当 $x<0$ 时等于 0, 而当 $x>0$ 时等于 $1/\sqrt{x}$ 的函数 $f(x)$ 的导数 (该函数在 $x=0$ 处无定义).

该导数肯定在开集 $(-\infty,\ 0)$ 上等于 0, 而在开集 $(0,\ +\infty)$ 上等于函数 $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$, 因为 $f(x)$ 在这两开集的每个当中均为连续函数且其 (通常意义下的) 导函数连续.

$$\begin{cases} f(\varphi) &= -f(\varphi') = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(x) x^{-1/2}\, dx \\ &= -\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \varphi'(x) x^{-1/2}\, dx. \end{cases} \tag{2.2.9}$$

由分部积分可得:

$$f'(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_\varepsilon^{+\infty} \varphi(x) \left(-\frac{1}{2} x^{-3/2}\right) dx \right]. \tag{2.2.10}$$

由于 $\varepsilon \to 0$ 时 $\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + O(\varepsilon)$, 我们因此最终有

$$f'(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_\varepsilon^{+\infty} \varphi(x) \left(-\frac{1}{2} x^{-3/2}\right) dx + \varphi(0)\varepsilon^{-1/2} \right]. \tag{2.2.11}$$

在这里我们遇到了 Hadamard 先生出于偏微分方程理论的需要而引入的概念: 发散积分的“有限部分”.

设 g 为在每个区间 $(a+\varepsilon,\ b)$ 内可积但在 $(a,\ b)$ 内不可积的函数, 这里 $\varepsilon > 0$. 函数 $g(x)$ 可能是关于 $1/(x-a)$ 的多项式与在 $(a,\ b)$ 内可积的函数 $h(x)$ 之和:

$$g(x) = P\big(1/(x-a)\big) + h(x) = \sum_\nu \frac{A_\nu}{(x-a)^{\lambda_\nu}} + h(x). \tag{2.2.12}$$

我们将在一个更为广泛的意义下来理解多项式这个术语: 一些指数可为任意的复数 λ_ν $(\Re\lambda_\nu \geqslant 1)$ 的单项式之和[①]. 我们甚至应该首先假设这些指数都不是整数.

① 译者注: $\forall z \in \mathbb{C}$, 记号 $\Re z$ 和 $\Im z$ 分别表示复数 z 的实部和虚部.

由此可知我们有

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} g(x)\,dx = I(\varepsilon) + F(\varepsilon)\,. \tag{2.2.13}$$

积分的“无限部分”$I(\varepsilon)$ 为关于 $1/\varepsilon$ 的多项式, 每项的指数均为不是整数的复数:

$$I(\varepsilon) = \sum_{\nu} \frac{A_\nu}{\lambda_\nu - 1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\lambda_\nu - 1}, \tag{2.2.14}$$

而 $F(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon \to 0$ 时有一个有限极限 F. 正是这个量 F 被 Hadamard 先生称为积分

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

的“有限部分”, 而我们则将之记作

$$F = \mathrm{Pf.}\int_a^b g(x)\,dx = -\sum_{\nu} \frac{A_\nu}{\lambda_\nu - 1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_\nu - 1} + \int_a^b h(x)\,dx\,. \tag{2.2.15}$$

该广义积分的主要性质如下:

1° 其定义在变量替换下不变. 若 $x = x(t)$, $t = t(x)$ 为无穷可微同胚, 则我们有

$$\mathrm{Pf.}\int_a^b g(x)\,dx = \mathrm{Pf.}\int_{t(a)}^{t(b)} g[x(t)]\,x'(t)\,dt\,. \tag{2.2.16}$$

2° 现在来计算积分 $\int_a^b g(x)(x-a)^\lambda\,dx$. 当 λ 为复数且其实部 $\Re\lambda > 0$ 充分大时, 这就是一个可积函数的通常积分.

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_a^b g(x)(x-a)^\lambda\,dx \\ &= -\sum_{\nu} \frac{A_\nu}{\lambda_\nu - \lambda - 1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_\nu - \lambda - 1} + \int_a^b h(x)(x-a)^\lambda\,dx\,. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

第一项可解析延拓; 这是整个复平面上的一个关于 λ 的亚纯函数, 它仅有有限多个极点: $\lambda = \lambda_\nu - 1$. 第二项在右半平面 $\Re\lambda > 0$ 上全纯, 且在 $\lambda \to 0$ 时连续.

故 $F(\lambda)$ 在右半平面 $\Re\lambda > 0$ 上亚纯; 又 λ_ν 不为整数, 故 $\lambda \to 0$ 时 $F(\lambda)$ 收敛且其极限为

$$F(0) = -\sum_{\nu} \frac{A_\nu}{\lambda_\nu - 1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_\nu - 1} + \int_a^b h(x)\,dx = \mathrm{Pf.}\int_a^b g(x)\,dx\,. \tag{2.2.18}$$

积分的有限部分就这样作为一个通常积分的解析延拓出现在这里.

3° 若 $\varphi(x)$ 无穷可导, 则函数 $g(x)\varphi(x)$ 在区间 (a, b) 内具有与 g 类似的性质, 我们因此可定义有限部分

$$\mathrm{Pf.} \int_a^b g(x)\varphi(x)\,dx\,.$$

大家可以毫无困难的发现这恰好是一个关于 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 的连续线性型. 因此 $g(x)$ 尽管在 (a, b) 上不可积, 但还是定义了一个我们称为赝函数并记作 $\mathrm{Pf.}\,g$ 的广义函数.

$$\mathrm{Pf.}\,g(\varphi) = \mathrm{Pf.} \int_a^b g(x)\varphi(x)\,dx\,. \tag{2.2.19}$$

我们刚才针对在有限区间 (a, b) 外为零且在点 a 处奇异的函数 g 所讲的, 可推广到一些定义在整个实轴上的函数 g. 若 $g(x)$ 在每个去掉了有限多个点 a_l 的有限区间的紧子集上可积; 且在每点 a_l 的邻域内, 在点 a_l 的左边和右边, 函数 g 均可表示成一个关于 $1/|x-a_l|$ 指数不是整数的复数的多项式与一个可积函数之和 (该多项式在 a_l 的左右两边不必相同), 则我们可以毫无歧义地定义积分

$$\mathrm{Pf.}\,g(\varphi) = \mathrm{Pf.} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx\,, \quad \varphi \in (\mathscr{D}). \tag{2.2.20}$$

(上述积分可分解成一些有限区间上的积分之和, 并且在每一个这样的有限区间上, 函数 g 仅在一个端点处奇异).

由此可知, 若 $g = [f']$ 为第 21 页例 2 中所定义的那个函数 f 在通常意义下的导函数 (也即当 $x<0$ 时 $[f']=0$, 而当 $x>0$ 时 $[f'] = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$), 则由公式 (2.2.11) 所定义的广义函数导数 f' 正好是赝函数 $\mathrm{Pf.}\,[f']$.

$$f'(\varphi) = \mathrm{Pf.} \int_0^{+\infty} \varphi(x)\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)dx = \mathrm{Pf.}\,[f'](\varphi)\,. \tag{2.2.21}$$

重要的评注. 函数 $[f']$ 在通常意义下非正. 但赝函数广义函数 $f' = \mathrm{Pf.}\,[f']$ 不是一个非正广义函数. 当 $\varphi \geqslant 0$ 时不一定会有 $f'(\varphi) \leqslant 0$. 另外 f' 也不是一个测度, 因为 $[f']$ 在原点的邻域内不可积. 但 f' 在原点的余集 Ω 内却正好是一个非正广义函数 (非正测度). 故定义在 $\mathbb{R}^1$ 上的 f' 在 Ω 内非正; 它在 Ω 内等于一个非正测度, 但这个定义在 Ω 内的测度不能延拓成 $\mathbb{R}^1$ 上的测度.

现在来看看当某些指数 λ_ν 为整数时会发生些什么.

1° 依旧令

$$g(x) = \sum_\nu \frac{A_\nu}{(x-a)^{\lambda_\nu}} + h(x) = \sum_{\nu\neq 1} \frac{A_\nu}{(x-a)^{\lambda_\nu}} + \frac{A_1}{x-a} + h(x)\,. \tag{2.2.22}$$

则我们将取

$$I(\varepsilon) = \sum_{\nu\neq 1} \frac{A_\nu}{\lambda_\nu - 1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\lambda_\nu - 1} + A_1 \log\frac{1}{\varepsilon}\,, \tag{2.2.23}$$

以及

$$(2.2.24)\quad F = \mathrm{Pf.}\int_a^b g(x)\,dx = -\sum_{\nu\neq 1}\frac{A_\nu}{\lambda_\nu - 1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_\nu - 1} + A_1\log(b-a) + \int_a^b h(x)\,dx\,.$$

于是 $I(\varepsilon)$ 不再是一个多项式; 而是一个关于 $1/\varepsilon$ 指数可为整数 (但不等于 0) 的复指数多项式与一个对数项之和.

2° 有限部分不再是关于变量替换不变. 事实上

$$(2.2.25)\qquad \mathrm{Pf.}\int_0^1 \frac{dx}{x} = 0\,,\quad \mathrm{Pf.}\int_0^{1/2}\frac{dt}{t} = -\log 2\,,$$

但我们却可以通过无穷可微同胚 $x = 2t$, $t = x/2$ 从一个过渡到另外一个.

3° F 不再是 $F(\lambda)$ 直到 $\lambda = 0$ 的解析延拓.

大家立刻可知当 $\lambda \to 0$ 时 $F(\lambda) \to \infty$; 有限部分

$$\mathrm{Pf.}\int_a^b g(x)\,dx$$

因此是 $F(\lambda) - \frac{A_1}{\lambda}$ 在 $\lambda \to 0$ 时的极限.

这些困难似乎仅当指数 λ_ν 当中的某一个, 比如说 λ_1 等于 1 时才出现; 然而, 若这些指数均不等于 1 但其中却有一个为正整数, 则当我们在对任意的 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 来考察 $g(x)\varphi(x)$ 时, 其中的一个指数也将会等于 1.

单项式赝函数

设 m 为复数, 令 $\mathrm{Pf.}\,(x^m)_{x>0}$ 为如下定义的赝函数广义函数

$$(2.2.26)\quad \begin{cases} \mathrm{Pf.}\,(x^m)_{x>0}\cdot\varphi & = \mathrm{Pf.}\displaystyle\int_0^{+\infty} x^m\varphi(x)\,dx \\ & = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\int_\varepsilon^{+\infty} x^m\varphi(x)\,dx + \varphi(0)\frac{\varepsilon^{m+1}}{m+1} \\ & \qquad + \varphi'(0)\frac{\varepsilon^{m+2}}{m+2} + \cdots + \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\frac{\varepsilon^{m+k+1}}{m+k+1}\Big]. \end{cases}$$

当 $\Re m > -1$ 时记号 Pf. 是多余的, 另外中括号里面求和的项数依赖 m 的值; 当 $m < 0$ 为整数时, 须用 $\log\varepsilon$ 来替代 $\frac{\varepsilon^0}{0}$.

除了小于 0 的整数 m 外, 函数 $[\mathrm{Pf.}\,(x^m)_{m>0}].\varphi$ 关于复变量 m 解析. 当 m 不是一个非正整数时, 我们显然有

$$\frac{d}{dx}[\mathrm{Pf.}\,(x^m)_{m>0}] = \mathrm{Pf.}\,m(x^{m-1})_{x>0}\,. \tag{2.2.27}$$

换句话说, 该赝函数的导数可由单项式的通常求导法则得到. 事实上, 该公式在 $\Re m>0$ 时成立; 因此, 若将出现在上述等式两边的广义函数分别称为 S 和 T, 则当 $\Re m>0$ 时 $S(\varphi)$ 和 $T(\varphi)$ 相等, 且都是关于复变量 m 的解析函数, 因此恒等. 但若 $m=-l$ 为非正整数, 解析延拓的方法不再有效, 而由直接计算可得

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[\mathrm{Pf.}\left(\dfrac{1}{x^l}\right)_{x>0}\right] = \mathrm{Pf.}\left(\dfrac{-l}{x^{l+1}}\right)_{x>0} + (-1)^l\dfrac{\delta^{(l)}}{l!}\,, \\[2ex] \dfrac{d}{dx}\left[\mathrm{Pf.}\left(\dfrac{1}{x^l}\right)_{x<0}\right] = \mathrm{Pf.}\left(\dfrac{-l}{x^{l+1}}\right)_{x<0} - (-1)^l\dfrac{\delta^{(l)}}{l!}\,. \end{cases} \tag{2.2.28}$$

赝函数广义函数 $\mathrm{Pf.}\,\frac{1}{x}$ 为 $\log|x|$ 的导数, 也可写成 $\mathrm{vp.}\,\frac{1}{x}$, 因为我们有

$$\mathrm{Pf.}\,\frac{1}{x}.\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right] = \mathrm{vp.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\,, \tag{2.2.29}$$

vp. 表示 Cauchy 主值, 其存在性由 φ 的可微性来保证.

将 (2.2.28) 中的两个等式合起来可得

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Pf.}\left(\frac{1}{x^l}\right) = \mathrm{Pf.}\left(\frac{-l}{x^{l+1}}\right)\,. \tag{2.2.30}$$

一般地, 我们考虑赝函数族

$$\begin{cases} Y_m = \dfrac{1}{\Gamma(m)}\mathrm{Pf.}\,(x^{m-1})_{x>0}\,, & \text{若 } m \text{ 不是非正整数}, \\[2ex] Y_m = \delta^{(l)}\,, & \text{若 } m=-l\leqslant 0 \text{ 为整数}. \end{cases} \tag{2.2.31}$$

基于单项式赝函数的定义可见, 若 m 趋于一个非正整数, 那么由因子 $1/\Gamma(m)$ 可知 $Y_m(\varphi)$ 依然还是一个关于 m 的连续函数. 因此 $Y_m(\varphi)$ 为复变量 m 的整函数. 另外, 我们总有求导公式:

$$\frac{d}{dx}Y_m = Y_{m-1}\,.$$

这些评注是非整数阶导数和原函数理论的基础 (第 6 章第 5 节).

§3. 求导的例子. 多变量的情形

例 1. 曲面上的间断函数 设 S 为无穷可微的闭超曲面, V 为 S 所围成的闭区域, 而 $f(x)$ 在 V 内为通常意义下的无穷可导函数, 但在 S 的外部为零. 于是 f 及其通常意义下的导数 $[D^p f]$ 沿 S 有着第一类间断点. 我们立刻就有

$$(2.3.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}.\varphi & = -f.\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ & = -\displaystyle\iint\underset{V}{\cdots}\int f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx \\ & = -\displaystyle\int\underset{S}{\cdots}\int f(x)\varphi(x)\,dx_2\,dx_3\cdots dx_n \\ & \quad +\displaystyle\iint\underset{V}{\cdots}\int \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\varphi(x)\,dx\,, \end{cases}$$

曲面积分也可以写成

$$(2.3.2)\qquad -\int\underset{S}{\cdots}\int f(x)\varphi(x)\cos\theta_1\,dS\,,$$

其中 θ_1 为 S 的外向法线与 Ox_1 轴的夹角. 这就证明了广义函数导数 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ 等于通常的导函数 $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]$ 与支撑在超曲面 S 上面密度为 $-f(x)\cos\theta_1$ 的奇异测度之和.

大家可同样计算其高阶导数. 则 f 的阶为 m 的任意导数是所对应的通常导数与一个由支撑在 S 上的阶不大于 m 的一些多层所构成的广义函数之和, 而后者可借助 f 在 S 上的阶不大于 $m-1$ 的 (通常意义下的) 导数来表示. 由这个例子可见, 所有 Stokes 型或 Green 型的公式, 只不过是在用另外一种方式来表示间断函数的广义函数导数.

于是经典公式

$$(2.3.3)\qquad \iint\underset{V}{\cdots}\int f\Delta\varphi\,dx = \iint\underset{V}{\cdots}\int\varphi[\Delta f]\,dx + \int\underset{S}{\cdots}\int f\frac{d\varphi}{d\nu}\,dS - \int\underset{S}{\cdots}\int\varphi\left[\frac{df}{d\nu}\right]\,dx$$

就意味着 Δf 为下述三者之和: 通常的 Laplace 导数 $[\Delta f]$, 支撑在 S 上面密度为

$$-\left[\frac{df}{d\nu}\right]$$

的测度, 以及支撑在 S 上、矩的面密度为 f、方向沿 S 的法向的偶极子广义函数. 这样的解释在位势理论和偏微分方程理论中都很有用; 另外, 这些公式的直接证明还给出了重新得到这些方程的 Green 公式的更为直观的方法.

例 2. 距离的函数 设 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$, 而 m 为复数. 我们将通过下述公式来定义赝函数 $\mathrm{Pf.}\,r^m$

$$(2.3.4)\qquad \begin{cases} (\mathrm{Pf.}\,r^m).\,\varphi &= \mathrm{Pf.}\displaystyle\iint\cdots\int r^m\varphi(x)\,dx \\ &= \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iint\underset{r\geqslant\varepsilon}{\cdots}\int r^m\varphi(x)\,dx - I(\varepsilon)\right], \end{cases}$$

这里 $I(\varepsilon)$ 为关于 ε 的多项式, 其指数为不等于零的复数, 或许还会加上一个与 $\log\varepsilon$ 有关的项. 可见

$$(2.3.5)\qquad (\mathrm{Pf.}\,r^m).\,\varphi=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iint\underset{r\geqslant\varepsilon}{\cdots}\int r^m\varphi(x)\,dx+\sum_k \mathrm{H}_k\Delta^k\varepsilon(0)\frac{\varepsilon^{m+m+2k}}{m+n+2k}\right],$$

$$(2.3.6)\qquad \mathrm{H}_k=\frac{\pi^{n/2}}{2^{2k-1}k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)},\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

中括号里面求和的项数依赖 m; 而当 $\Re m>-n$ 时, 记号 Pf 是多余的; 最后, 当 $m+n$ 为不大于 0 的偶数时, 须用 $\log\varepsilon$ 来替代 $\frac{\varepsilon^0}{0}$.

除了非正的偶数点 $m+n$ 外, 量 $F(m)=(\mathrm{Pf.}\,r^m).\,\varphi$ 为复变量 m 的解析函数; 上述 m 的这些例外值都是该解析函数的简单极点, 并且当 $m=-n-2h$ 时, 正如我们在讨论 $F(\lambda)$ 时曾见到过的 (p. 24), 我们还有:

$$(2.3.7)\qquad (\mathrm{Pf.}\,r^{-n-2h}).\,\varphi=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[F(-n-2h+u)-\frac{A}{u}\right].$$

在这些公式中, 可将球面 $r=\varepsilon$ 换成另外一族足够正则的曲面; 无限部分 $I(\varepsilon)$ 自然会依赖曲面的选取, 但当 $m+n$ 不是一个非正的偶数时, 有限部分却不依赖曲面的选取; 公式 (2.3.7) 并不总成立. 当 $m+n$ 不是一个不大于 2 的偶数时, 我们有

$$(2.3.8)\qquad \Delta(\mathrm{Pf.}\,r^m)=m(m+n-2)\mathrm{Pf.}\,r^{m-2}.$$

事实上, 该公式在 $\Re m$ 充分大时成立, 因此借助于解析延拓可知, 上述公式在那些不是例外点的点 m 处也成立. 对于

$$m+n=-2h+2,$$

这里 $h\geqslant 0$ 为整数, 可知

$$(2.3.9)\qquad \Delta(\mathrm{Pf.}\,r^m)=m(m+n-2)\mathrm{Pf.}\,r^{m-2}+\frac{(2-n-4h)\pi^{n/2}}{2^{2h-1}h!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+h\right)}\Delta^h\delta.$$

最重要的情形为 $m = 2 - n$:

$$\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = -\frac{2(n-2)(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta = -N\delta\,, \tag{2.3.10}$$

其中 $N = (n-2)H_0$, 而 H_0 为 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 1 的球面的面积. 众所周知, 函数 $\left(\frac{1}{r}\right)^{n-2}$ 在 $r \neq 0$ 时为调和函数; 但正因为如此, 人们通常不考虑当 $r = 0$ 时会发生什么.

我们现在就可以说 $\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)$ 是一个放在原点处质量为负、大小为 $-N$ 的质点. 基于该结果的重要性, 我们来给一个直接证明.

$$\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)(\varphi) = \iint\cdots\int \Delta\varphi\frac{1}{r^{n-2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{r\geqslant\varepsilon}\cdots\int \Delta\varphi\frac{1}{r^{n-2}}\,dx\,. \tag{2.3.11}$$

用 ν 表示球面 $r = \varepsilon$ 的外向法线, 而 $\varepsilon^{n-1}d\Omega$ 为其面积元, 应用 Green 公式可得:

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg[&\iint_{r\geqslant\varepsilon}\cdots\int \varphi\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)dx \\ &+\int_{r=\varepsilon}\cdots\int \varphi\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\varepsilon^{n-1}\,d\Omega \\ &-\int_{r=\varepsilon}\cdots\int \frac{1}{r^{n-2}}\frac{d\varphi}{d\nu}\,\varepsilon^{n-1}\,d\Omega\Bigg]\,.\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

第一个积分为零 (由于 $\frac{1}{r^{n-2}}$ 为调和函数). 第二个积分等于

$$-(n-2)\int_{r=\varepsilon}\cdots\int \varphi\,d\Omega\,,$$

因此当 $\varepsilon \to 0$ 时, 其极限为 $-(n-2)H_0\,\varphi(0)$.

第三个积分可由 $O(\varepsilon)$ 控制 $\left(\text{因为}\,\varphi\,\text{可微且}\,\dfrac{d\varphi}{d\nu} = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$; 故其极限为零.

最终的公式

$$\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)(\varphi) = -(n-2)H_0\,\varphi(0) = -N\varphi(0)\,, \tag{2.3.13}$$

与 (2.3.10) 等价, 它因此是调和函数理论中的一个非常初等的计算的结果; 所涉及的恰好就是关于位势的 Poisson 公式的计算 (由于 φ 可导, 故这里的计算都是显然的). 当 $n = 2$ 时, 我们有 $N = 0$, 于是由 $\log\frac{1}{r}$ 来扮演 $\frac{1}{r^{n-2}}$ 的角色,

$$\Delta\log\frac{1}{r} = -2\pi\delta\,. \tag{2.3.14}$$

由这些公式可以很容易地导出广义函数 Pf. r^m 的迭代 Laplacian[①]. 但正如 $n = 2$ 时在 Laplace 方程的情形曾出现过的, 为了得到迭代 Laplace 方程的“基本解”, 有必要考虑函数 $r^m\log r$. 若 $k > 0$ 为整数, 则我们将有

$$\Delta^k(r^{2k-n}) = [(2k-n)(2k-2-n)\cdots(4-n)(2-n)]2^{k-1}(k-1)!\frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta\,, \tag{2.3.15}$$

① 译者注: Laplacian 是指 Laplace 算子 Δ, 而 Pf. r^m 的迭代 Laplacian 则是指 $\Delta^k(\text{Pf.}\,r^m)$.

因此当 $2k-n<0$ 或 $2k-n\geqslant 0$ 但 n 为奇数时, 存在常数 $B_{k,n}$ 使得

$$\Delta^k(B_{k,n}r^{2k-n})=\delta\,. \tag{2.3.16}$$

若现在 $2k-n\geqslant 0$ 为偶数, 我们将运用下面仅在此时才成立的公式:

$$\Delta^k(r^{2k-n}\log r)=[[(2k-n)(2k-2-n)\cdots(4-n)(2-n)]]2^{k-1}(k-1)!\frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(n/2)}\,\delta\,, \tag{2.3.17}$$

在该公式中, 双中括号要被理解成去掉中括号里的因子 0. 于是存在常数 $A_{k,n}$ 使得

$$\Delta^k(A_{k,n}r^{2k-n}\log r)=\delta\,. \tag{2.3.18}$$

由此我们可以导出, 对任意的 k 和 n, 存在常数 $A_{k,n}$ 和 $B_{k,n}$ (在每种情形, 这两个常数当中有一个为零) 使得

$$\Delta^k\big[r^{2k-n}(A_{k,n}\log r+B_{k,n})\big]=\delta\,. \tag{2.3.19}$$

最后提请大家注意下面的例子. 若令

$$\begin{cases} L_m = \left(1-\dfrac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k\delta, & \text{若 } m=-2k\leqslant 0 \text{ 为偶数,} \\[2ex] L_m = \dfrac{2\pi^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\,\mathrm{Pf.}\left[r^{\frac{m-n}{2}}K_{\frac{n-m}{2}}(2\pi r)\right], & \text{其它.} \end{cases} \tag{2.3.20}$$

这里 K 为 Bessel 函数理论中的经典函数. 这是一个在原点之外解析, 而在无穷远处指数趋于 0 的函数; 当 $m\geqslant 0$ 时, 该函数也非负. 归功于数值因子 $\frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})}$ 的选取, 函数 $L_m(\varphi)$ 因此为复变量 m 的整函数. 我们有

$$\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)L_m=L_{m-2}\,,\quad \left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k L_m=L_{m-2k}\,. \tag{2.3.21}$$

特别地

$$\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k L_{2k}=\delta\,, \tag{2.3.22}$$

即 L_{2k} 为算子

$$\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k$$

的基本解.

例 3. 亚纯函数

在 $n=2$ 这一情形, 我们将 $\mathbb{R}^2$ 中的每点用它的两个被我们记为 x 和 y 的坐标或者是该点的复坐标 $z=x+iy$ 来表示, 其共轭为 $\bar{z}=x-iy$. 我们将令

$$(2.3.23)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right), & \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}, \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right), & \dfrac{\partial}{\partial y} = i\left(\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right). \end{cases}$$

若 $f(z)$ 为 z 的全纯函数, 则它作为 $\mathbb{R}^2$ 上的函数或广义函数满足

$$(2.3.24)\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ (Cauchy 条件)} \quad \text{和} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z) \quad \text{(关于 } z \text{ 的通常意义下的导数)}.$$

对于一个亚纯函数来说, 其极点附近的性态完全不一样.

我们同前面一样定义广义函数 Pf. $\frac{1}{z^m}$ (m 为整数) (记号 Pf. 在 $m\leqslant 1$ 时多余):

$$(2.3.25)\quad \left(\text{Pf.}\frac{1}{z^m}\right)\cdot\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iint_{r\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x,y)}{z^m}\,dx\,dy\right] = \left(\text{vp.}\,\frac{1}{z^m}\right)\cdot\varphi,$$

vp. 表示 Cauchy 主值 (该公式由无限部分 $I(\varepsilon)$ 为零这一事实导出).

有关结论如下: 一方面

$$(2.3.26)\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\text{vp.}\,\frac{1}{z^m}\right) = \text{vp.}\,\left(\frac{-m}{z^{m+1}}\right)$$

(就此而言, vp. $\frac{1}{z^m}$ 就像一个通常的全纯函数一样), 而另一方面

$$(2.3.27)\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\text{vp.}\,\frac{1}{z^m}\right) = (-1)^{m-1}\frac{\pi}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}\delta}{\partial z^{m-1}}.$$

特别地, 当 $m=1$ 时, 公式

$$(2.3.28)\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{z}\right) = \pi\delta$$

在解析函数理论中起着公式 (2.3.10) 在调和函数理论中所起的作用. 它可用来作为留数理论的基础, 并可被推广到多复变的情形①.

基于同样的想法, 设 f 在由正则边界 C 所围成的闭平面区域 S 上连续, 在 S 的内部全纯, 而在其外部为零. 如同在例 1 中一样, f 沿着 C 会有一些间断点.

① 这些公式在 Dolbeault [1], 第 4 章, Kodaira [1], Schwartz [8] 中得到了进一步发展.

因此广义函数导数 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ 是由 C 所支撑的测度, 并且沿着 C 的正方向可由微分

$$-\frac{1}{2i}f(x)\,dz$$

来表示. 换句话说, 对任意的 $\varphi \in (\mathscr{D})$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.\varphi = -\frac{1}{2i}\int_C f\varphi\,dz\,. \tag{2.3.29}$$

例 4. 双曲距离

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 当 $x_n \geqslant 0$ 且所得的值为实数, 令

$$s = \sqrt{x_n^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-1}^2}\ ,$$

否则令 $s = 0$. 正如 Hadamard 先生① 指出的那样, 可由下式来定义广义函数 Pf. s^m

$$(\text{Pf.}\, s^m).\varphi = \text{Pf.}\iint\cdots\int s^m(x)\varphi(x)\,dx\,. \tag{2.3.30}$$

上述有限部分 (在 $\Re m > -2$ 时记号 Pf. 是多余的) 在这里定义起来有些困难, 这是因为当 $\Re m < 0$ 时, 函数 s^m 在整个 "波锥" 面

$$x_n^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-1}^2 = 0$$

上奇异. 可知除了下述双重无限多个均是其极点的奇异值 m, 函数 $(\text{Pf.}\, s^m).\varphi$ 关于复变量 m 解析:

a) $m = -2,\ -4,\ \ldots$; m 为 < 0 的偶数.

b) $m = -n,\ -(n+2),\ \ldots$; $m + n$ 为不大于 0 的偶数.

若 n 为偶数, 在这两个序列中有公共的值, 因此是上述解析函数的二重极点. 如同单项式函数的例子, Marcel Riesz 先生② 曾研究过的下述广义函数也很有趣:

$$Z_l = \frac{1}{\pi^{\frac{n-2}{2}}2^{l-1}\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+2-n}{2}\right)}\,\text{Pf.}\, s^{l-n}\,, \tag{2.3.31}$$

这里 $l - n$ 为非奇异的.

对于 $l - n$ 的那些奇异值, 我们可对任意 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 通过取 $Z_l(\varphi)$ 的极限来定义广义函数. 然而, 由于数值因子在解析函数 Pf. $s^m(\varphi)$ 的极点处为零, 此时 $Z_l(\varphi)$ 正好

---

① HADAMARD [1], pp. 220 – 230. 在那里仅计算了 $m = 2 - n$, n 为奇数的情形. 大家可将之简化并推广到任意的 m 和 n. 我们将不在这里给出这种有限部分的准确定义. 见第 32 页的脚注 ①.

② Marcel RIESZ [1]. 证明见 Marcel RIESZ [2]. 公式 (2.3.31), (2.3.33), 以及解析延拓的系统使用都要归功于此作者. 还须指出的是, 对于我们来说, Z_l 不是一个算子而是一个广义函数, 其定义可无需借助解析延拓来确定. 算子和广义函数之间的关系可见第 6 章的公式 (6.5.21).

是复变量 l 的整函数. 对于非奇异的 $l-n$, 广义函数 Z_l 的支集就是函数 s 的支集; 对于属于序列b) 的奇异值, 广义函数 Z_l 支撑在原点上且对于整数 $k \geqslant 0$, 均有

$$Z_{-2k} = \square^k \delta\,, \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}\,. \tag{2.3.32}$$

对属于a) 但不属于b) 的奇异值, 广义函数 Z_l 的支集为波锥面 (Huygens 原理). 我们总有

$$\square Z_l = Z_{l-2}\,, \quad \square^k Z_l = Z_{l-2k}\,. \tag{2.3.33}$$

该公式事实上在 $\Re l$ 充分大时是显然的, 由解析延拓可知它总成立. 特别地,

$$\square Z_2 = \delta\,, \quad \square^k Z_{2k} = \delta\,. \tag{2.3.34}$$

于是 Z_2 为波动方程的基本解, 而 Z_{2k} 为 k 次"迭代"波动方程的基本解. 当然, 在建立这些公式时不需要对偏微分方程理论有任何特别的了解, 但反过来可将这些公式用来作为偏微分方程研究的基础 ①.

例 5. 流形上的求导

在一个无穷可微的流形 V^n 上 (见第 1 章第 5 节), 一阶求导 ∂ 由无穷可微向量场来定义. 我们将用下述公式来定义一个广义函数的导数

$$\partial T.\varphi = -T.\partial\varphi\,. \tag{2.3.35}$$

在局部坐标系下, 作为关于坐标的偏导数的函数, 这样所定义的求导在对函数和广义函数进行作用时, 其表达式是不一样的. 即使是在 $\mathbb{R}^n$ 上, 一旦体积元 dx 不是由该向量场所定义的无穷小变换的不变量时, 情况也将会是如此. 比如说考虑定义在 $\mathbb{R}^n$ 中原点 0 的余集 Ω 上的偏导数 $\frac{\partial}{\partial r}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \sum_k \frac{x_k}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\,. \tag{2.3.36}$$

对于一个广义函数, 采用乘法记号 (第 5 章), 我们将有:

$$\frac{\partial T}{\partial r}.\varphi = -T.\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\sum_k T.\frac{x_k}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_k}{r}T\right).\varphi\,, \tag{2.3.37}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_k}{r}T\right) = \frac{n-1}{r}T + \sum_k \frac{x_k}{r}\frac{\partial T}{\partial x_k}\,. \tag{2.3.38}$$

若在 $\mathbb{R}^n$ 中采用异于 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ 的其它坐标, 此时要加倍小心.

① Methée 在其博士论文中借助 Lorentz 群下的不变式对这些计算进行了详细阐述. 也见 Eliana Rocha de Brito [1] (译者注: 该文献未在书后列出).

§4. 广义函数的原函数. 单变量的情形

广义函数的原函数 定理 1. 任意一个单变量 x $(n=1)$ 的广义函数均有无穷多个原函数; 任意两个原函数之间仅相差一个常值函数.

定理的第二部分等价于说导数为零的广义函数为常值函数.

设 S 为一给定的广义函数. 广义函数 T 为 S 的原函数, 换句话说 $T'=S$, 当且仅当, 对任意的函数 $\chi\in(\mathscr{D})$, 若它为函数 $\psi\in(\mathscr{D})$ 的导数, 则我们有

$$T(\chi)=T\left(\frac{d\psi}{dx}\right)=-S(\psi)\,. \tag{2.4.1}$$

这些导函数 χ 构成 $(\mathscr{D})$ 的向量子空间超平面 $(\mathscr{H})$ [1]: 它们其实只需满足线性条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(t)\,dt=0\,, \tag{2.4.2}$$

而在此条件下其原函数

$$\psi(x)=\int_{-\infty}^{x}\chi(t)\,dt \tag{2.4.3}$$

恰好有紧支集.

故 T 为 $(\mathscr{D})$ 上的线性型且在 $(\mathscr{H})$ 上已知; 一旦知道了它在一个不属于 $(\mathscr{H})$ 的元素 $\varphi_0\in(\mathscr{D})$ 的值 $T(\varphi_0)$, 我们就将完全确定了 T. 比如说, 选取 φ_0 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(t)\,dt=+1\,. \tag{2.4.4}$$

那么对任意的 $\varphi\in(\mathscr{D})$, 我们将有唯一的分解:

$$\begin{cases}\varphi=\lambda\varphi_0+\chi\\[2ex] \lambda=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt\\[2ex] \chi=\varphi-\lambda\varphi_0\in(\mathscr{D}),\quad \text{因此等于 } \frac{d\psi}{dx},\quad \psi\in(\mathscr{D}),\end{cases} \tag{2.4.5}$$

由此给出

$$T(\varphi)=\lambda T(\varphi_0)-S(\psi)\,. \tag{2.4.6}$$

反过来, 若 T 为由 (2.4.1) 所定义的 $(\mathscr{H})$ 上的线性型, 则它在 $(\mathscr{H})\cap(\mathscr{D}_K)$ 上连续, 因为如果 $\chi\in(\mathscr{H})\cap(\mathscr{D}_K)$ 在 $(\mathscr{D}_K)$ 中收敛于 0, 那么其原函数 ψ 也将在 $(\mathscr{D}_H)$ 中

[1] 译者注: 余维数为 1 的向量子空间.

收敛于 0 (H 为包含 K 的最小区间), 因而 $S(\psi)$ 收敛于 0. 于是在任意选定 $T(\varphi_0)$ 后, 我们就在 $(\mathscr{D})$ 上定义了一个在每个 $(\mathscr{D}_K)$ 连续的线性型: 因为若在 $(\mathscr{D}_K)$ 中 $\varphi \to 0$, 那么 $\lambda \to 0$, 从而在 $(\mathscr{H}) \cap (\mathscr{D}_L)$ 中 $\varphi - \lambda\varphi_0 = \chi \to 0$, 所以 $T(\varphi) \to 0$, 这里 L 为 K 和 φ_0 的支集的并集. 由此构造的 T 正好是 S 的一个原函数, 因为它满足 (2.4.1).

两个原函数的差 $T_1 - T_2$ 源于 $T(\varphi_0)$ 的不同选择; 我们将有

$$T_1(\varphi) - T_2(\varphi) = C\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} C\varphi(x)\,dx\,, \tag{2.4.7}$$

因此 $T_1 - T_2$ 为常值函数 C.

在通常的理论中, 为选择一个函数的特殊原函数, 我们固定它在某一个特殊的点 x_0 处的值. 这里自然没有什么相似的地方. 为选择一个特殊的原函数 T, 我们固定它在一个不属于 $(\mathscr{H})$ 的特殊函数 $\varphi_0 \in (\mathscr{D})$ 上的值.

定理 1 显然既有局部的也有整体的特性. 尽管在一个开集 Ω 上的导数为零的广义函数在 Ω 的每个连通子集上均等于一个常值函数, 但该广义函数在 Ω 上不一定等于同一个常数. 例如 Y (当 $x < 0$ 时等于 0, 而当 $x > 0$ 时等于 1 的函数) 在原点的余集上的导数为零.

推论. *任意一个广义函数均有无穷多个 p 阶原函数; 任意两个这样的原函数之间仅相差一个次数不大于 $p-1$ 的多项式.*

测度的原函数　定理 2. *一个广义函数的导数为测度, 当且仅当该广义函数是一个在任何有限区间上均有有限变差的函数.*

1° *条件是充分的.*

设 f 是一个在任何有限区间上均有有限变差的函数. 对任意的 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 由于对 Stieltjes 积分可进行分部积分, 因此

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d\varphi}{dx}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,df(x)\,. \tag{2.4.8}$$

这就证明了函数 f 的导数就是由该有限变差函数所定义的测度 df. 可见, *决不能将在任何有限区间上均有有限变差的函数 f 与它所定义的测度 df 混淆起来, 这点非常重要; 因为该函数所定义的测度就是这个函数本身的导数.*

2° *条件是必要的.*

设 μ 为一个测度. 由

$$f(x) = \int_a^x d\mu$$

所定义的函数 f 在任何有限区间上均有有限变差 (a 为测度 μ 的一个无质量的点), 并且由前面的讨论可知它是 μ 的一个原函数; 任何一个别的原函数均与之相差一个常值函数, 因此也是一个在任何有限区间上均有有限变差的函数.

该定理的一个特殊情形可被表述成:

一个广义函数的导数为非负的测度, 当且仅当该广义函数为单调递增函数.

同样地, 大家还可证明:

一个广义函数的二阶导数非负, 当且仅当该广义函数是一个凸函数.

我们因此可将两个凸函数的差描绘成二阶导数为测度的广义函数.

大家在本章的开始就已看到, 若连续函数 f 具有 (通常意义下的) 连续导数 g, 则广义函数 f 的导数也是 g. 定理 2 的证明使得我们得以将此结果推广如下:

定理 3. 1° 若连续函数 $f(x)$ 几乎处处有 (通常意义下的) 导数 $g(x)$, 而 g 在任意有限区间上可积且 f 就是 g 的不定积分, 则广义函数 f 的导数就是广义函数 g.

2° 若一个广义函数的导数为函数 g, 则该广义函数本身是一个绝对连续函数 f 且为 g 的不定积分; 该函数几乎处处以 g 为其 (通常意义下的) 导数, 且在 g 的每个连续点 x 处的导数就等于 $g(x)$.

推论. 各阶导数均为测度的广义函数为通常意义下的无穷可导函数.

因为若一个广义函数的 $k+2$ 阶导数为测度, 则其 k 阶导数为一个连续函数; 于是广义函数 f 的各阶导数均连续, 因此就是其通常意义的导数.

该定理可推广到各阶导数的阶均不大于固定 m 的广义函数 (第 3 章定理 21 的推论) 以及多变量的情形 (第 6 章定理 19).

§5. 广义函数的原函数. 多变量的情形

定理 4. 若 S_1 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个给定广义函数, 则关于未知广义函数 T 的方程

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = S_1 \tag{2.5.1}$$

有无穷多个解; 任意两个解之间只相差一个 "不依赖 x_1" 的任意广义函数.

其证明可模仿定理 1 的, 但要稍微复杂一些.

不依赖 x_1 的广义函数 首先定义什么是所谓的 "不依赖 x_1" 的任意广义函数.

设 $\varphi \in (\mathscr{D})$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一点.

函数 φ 依 $h \in \mathbb{R}^n$ 的平移 $\tau_h\varphi$ 被定义为 $\tau_h\varphi(x) = \varphi(x-h)$. 由此我们借助下述公式来定义广义函数 T 依 h 的平移 $\tau_h T$:

$$\tau_h T.\tau_h\varphi = T.\varphi \quad \text{或} \quad \tau_h T(\varphi) = T(\tau_{-h}\varphi)\,. \tag{2.5.2}$$

这等价于说在 $(\mathscr{D})$ 与 $(\mathscr{D}')$ 之间, 线性运算

$$\varphi \to \tau_h\varphi\,, \quad T \to \tau_h T$$

当中的任何一个关于另外一个逆步; 而线性运算

$$\varphi \to \tau_{-h}\varphi, \quad T \to \tau_h T$$

当中的任何一个是另外一个的转置. 若 T 为一个函数 f (几乎处处有定义且在每个紧集上可积), 则 $\tau_h T$ 就是通常的平移 $\tau_h f$. 我们因而说一个广义函数 T 不依赖 x_1 或者说它仅依赖 $x_2, x_3, \ldots, x_n$, 若它在任何与 x_1 轴平行的

$$h = (h_1, 0, 0, \ldots, 0)$$

的平移下不变. 因此对任意的 $h = (h_1, 0, 0, \ldots, 0)$:

$$\tau_h T = T. \tag{2.5.3}$$

若 T 为连续函数 f, 则该定义正好与不依赖 x_1 的函数的通常定义吻合; 若 T 为在任何紧集上均可积的函数, 则大家可以毫无困难地发现 f 正好几乎处处等于一个不依赖 x_1 的函数.

广义函数 T 不依赖 x_1 等价于关系式 $\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$.

为此, 对固定的 T 和 φ, 以及变量 $h = (h_1, 0, \ldots, 0)$, 考虑 h_1 的函数

$$\psi(h_1) = \tau_h T. \varphi = T. \varphi(x+h). \tag{2.5.4}$$

在下面, 我们将假设 h_1 (以及 $h_1 + dh_1$) 总是位于一个有限开区间 $]a, b[$ 当中. 于是对固定的 φ, 平移后的函数 $\tau_h\varphi$ 的支集总包含在 $\mathbb{R}^n$ 的同一个固定紧集 K 中. 但在拓扑空间 $(\mathscr{D}_K)$ 中取值的 $\varphi(x+h)$ 被看作是 h_1 的函数时为连续, 甚至是无穷可导函数. 因此在拓扑空间 $(\mathscr{D}_K)$ 中取极限可得

$$\lim_{dh_1 \to 0} \frac{\varphi(x+h+dh) - \varphi(x+h)}{dh_1} = \frac{\partial}{\partial h_1}\varphi(x+h) = \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x+h). \tag{2.5.5}$$

但 T 为 $(\mathscr{D}_K)$ 上的连续线性型, 表达式 $\psi(h_1)$ 因此是 h_1 的一个在通常意义下的无穷可导数值函数, 并且我们还将有

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dh_1} &= \frac{d}{dh_1}[T. \varphi(x+h)] = T. \left(\frac{\partial}{\partial h_1}\varphi(x+h)\right) \\ &= T. \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x+h)\right) = -\frac{\partial T}{\partial x_1}. \varphi(x+h). \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

于是若 $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ 为零, 则该量也为零; 但此结果不依赖于有限区间 $]a, b[$, 因此导数处处为零的连续数值函数 $\psi(h_1)$ 为常值, 故 T 不依赖 x_1. 反过来, 若 T 不依赖 x_1, 则 ψ 在 $h_1 = 0$ 处的导数为零, 这就证明了 $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ 为零. 方程 (2.5.1) 的两个解的差满足 $\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$, 因此是一个不依赖 x_1 的任意广义函数.

原函数的寻求 大家可以毫无困难地发现, 定理 4 可如同单变量的情形一样来证明. 不过, 这里由函数 $\chi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}$ 所构成的向量子空间 $(\mathscr{H}_1)$ 不再是一个超平面, 因为 χ_1 需要满足无穷多个线性条件:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_1(t_1, x_2, \ldots, x_n)\, dt_1 = 0\,. \tag{2.5.7}$$

若 $\varphi_0(x)$ 为由公式 (2.4.4) 所确定的单变量函数, 则有下面的唯一分解

$$\begin{cases} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1(x_2, \ldots, x_n)\varphi_0(x_1) + \chi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \\ \lambda_1(x_2, \ldots, x_n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t_1, x_2, \ldots, x_n)\, dt_1\,; \quad \chi_1 \in (\mathscr{H}_1)\,. \end{cases} \tag{2.5.8}$$

方程 (2.5.1) 的任意广义函数解 T 因此满足

$$T(\varphi) = T(\lambda_1\varphi_0) - S_1(\psi_1) = \Sigma_1(\lambda_1) - S_1(\psi_1)\,. \tag{2.5.9}$$

可知 λ_1 跑遍了整个空间 $(\mathscr{D})_{x_2,x_3,\ldots,x_n}$, 后者由 $n-1$ 个变量 $x_2, x_3, \ldots, x_n$ 的所有无穷可微有紧支集的函数组成. 设 K' 为由变量 $x_2, x_3, \ldots, x_n$ 所确定的 $n-1$ 维欧氏空间中的紧集; 如果 λ_1 在 $(\mathscr{D}_{K'})$ 中收敛于 0, 那么 $\lambda_1\varphi_0$ 在 $(\mathscr{D}_K)$ 中收敛于 0, 其中 $K = H \times K'$, 而 H 为 φ_0 在实直线 x_1 轴上的支集, 从而 $\Sigma_1(\lambda_1) = T(\lambda_1\varphi_0)$ 也应该收敛于 0; 故 Σ_1 为 $(\mathscr{D})_{x_2,x_3,\ldots,x_n}$ 上的线性型且在每个 $(\mathscr{D}_{K'})$ 上连续, 因此是属于 $(\mathscr{D}')_{x_2,x_3,\ldots,x_n}$ 的广义函数. 反过来, 若 Σ_1 为 $(\mathscr{D}')_{x_2,x_3,\ldots,x_n}$ 中的任意一个广义函数, 大家可立刻发现, 关系式 (2.5.8) 中最后一项将 T 定义成 $\mathbb{R}^n$ 上满足 (2.5.1) 的广义函数. 在获得问题的通解以及定理 4 的证明的同时, 我们还得到了不依赖 x_1 的广义函数 U 的最一般的表达式:

$$U.\,\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma_1.\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t_1, x_2, \ldots, x_n)\, dt_1\,. \tag{2.5.10}$$

正是这个公式在 $n > 1$ 时推广了 (2.4.7).

偏导数为函数的函数

定理 5. 1° 若局部可积函数 f 在几乎所有与 x_1 轴平行的平行线上关于 x_1 绝对连续, 并且几乎处处以局部可积函数 $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right] = g_1$ 作为它 (在通常意义下的) 导数, 则在广义函数的意义下也有 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = g_1$;

2° 若函数 f 的广义函数导数 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ 为函数 g_1, 则 f[①] 在与 x_1 轴平行的平行线上均关于 x_1 绝对连续, 并且几乎处处以 g_1 为其通常意义下的导数 $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]$. 特别地, 若 f 和 g_1 为开集 Ω 上的连续函数, 则 f 在 Ω 上处处以 g_1 为其通常意义下的导数.

① 同往常一样, 可能会在一个零测度集上对 f 的定义作适当的修改.

1° 事实上, 我们立刻就有:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi) = \iint \cdots \int f(x) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) dx \tag{2.5.11}$$

$$= \int \cdots \int dx_2\, dx_3 \cdots dx_n \int f(x) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) dx_1$$

$$= \int \cdots \int dx_2\, dx_3 \cdots dx_n \int g_1 \varphi\, dx_1$$

$$= \iint \cdots \int g_1(x)\varphi(x)\, dx = g_1(\varphi)\,.$$

例. 若

$$r = \sqrt{\sum_i x_i^2}\,,$$

则对于 $0 \leqslant \lambda < n-1$, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r^\lambda} = -\frac{\lambda x_i}{r^{\lambda+2}}\,. \tag{2.5.12}$$

2° 令

$$f_1(x) = \int_{a_1}^{x_1} g_1(t_1, x_2, \ldots, x_n)\, dt_1\,. \tag{2.5.13}$$

由于 g_1 为局部可积函数, 则 f_1 几乎处处有定义, 在几乎所有与 x_1 轴平行的平行线上关于 x_1 绝对连续, 且在每个紧集上可积; 另外, 它几乎处处以 g_1 为其通常意义下的导数, 从而由 1° 中所证明的可知, 在广义函数的意义下亦如此. 于是, 在广义函数的意义下, 我们有

$$f = f_1 + \Sigma_1\,, \tag{2.5.14}$$

其中 Σ_1 为一个不依赖于 x_1 的广义函数; 由于 f 和 f_1 均为函数, 因此 Σ_1 也是一个函数. 在一个零测度集上作适当修改后, 我们可以将 Σ_1 变成一个在通常意义下确实不依赖 x_1 的函数, 则它在所有与 Ox_1 平行的平行线上绝对连续, 且其通常意义下的导数 $\left[\frac{\partial \Sigma_1}{\partial x_1}\right]$ 处处为零. 这就是所要证明的.

若 g_1 和 f 在点 $a = (a_1, a_1, \ldots, a_n)$ 的邻域内连续, 则 f_1 在 a 的邻域内连续, 从而 Σ_1 也是如此, 并且由于 Σ_1 不依赖 x_1, 因此无需事先在某个零测度集上作任何修改, 它在 a 的邻域内的导数 $\left[\frac{\partial \Sigma_1}{\partial x_1}\right]$ 就已处处为零; 另外, f_1 在 a 的邻域内处处以 g_1 作为其通常意义下的导数 $\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right]$, 从而 f 亦如此. 这就证明了所要的结论.

评注 1. 由于 Σ_1 为一个广义函数, 因此有必要假设 f 本身是一个函数, 而这不能由 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ 为一个函数而得到.

评注 2. 如果一个广义函数 T 的一阶偏导数均为函数, 我们将看到它本身也是一个函数 (第 6 章定理 15).

若所有的导数 $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ 均为连续函数, 我们将发现 T 也是一个连续函数 f (定理 7); 从而 f 的广义函数导数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 处处等于其通常意义下的导数, 于是它在通常意义下连续可微. 我们将在第 6 章第 6 节中来改进这些结果.

§6. 多个偏导数已知的广义函数

定理 6.[①] 关于广义函数 T 的 k 个方程

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=S_1\,,\quad \frac{\partial T}{\partial x_2}=S_2\,,\quad \ldots,\quad \frac{\partial T}{\partial x_k}=S_k \tag{2.6.1}$$

是相容的, 当且仅当对任意的 $i \leqslant k$ 和 $j \leqslant k$, 均有

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_j}-\frac{\partial S_j}{\partial x_i}=0\,. \tag{2.6.2}$$

该方程组因此有无穷多个解; 任意两个解之间仅相差一个不依赖 x_1, x_2, $\ldots$, x_k 的任意广义函数 U (在平行于由 x_1, x_2, $\ldots$, x_k 所组成的向量子空间的平移下不变), 该广义函数 U 的最一般表达式为

$$U(\varphi)=\Sigma_k(\lambda_k)\,,\quad \lambda_k=\underbrace{\int\cdots\int}_{k}\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_k\,,x_{k+1},\ldots,x_n)\,dt_1\cdots dt_k\,, \tag{2.6.3}$$

其中 Σ_k 为变量 $x_{k+1},\ldots,x_n$ 的空间 $\mathbb{R}^{n-k}$ 上的任意一个广义函数.

当 $k=n$ 时, 不依赖任何变量的广义函数是一个常数

$$U(\varphi)=\Sigma_n(\lambda_n)=C\lambda_n=\iint\cdots\int C\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_n)\,dt_1\cdots dt_n\,. \tag{2.6.4}$$

证明. 可用证明定理 4 的同样方法来证明本定理, 因此我们将不给出具体细节. 相容条件 (2.6.2) 是唯一的新东西. 这些条件显然必要, 因为 $\frac{\partial S_i}{\partial x_j}$ 和 $\frac{\partial S_j}{\partial x_i}$ 均应等于

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}\,.$$

① 该定理实际上是在讨论流的外微分和外微分原函数 (广义 Poincaré 定理). 参见第 9 章第 3 节定理 1 及其证明.

下证它们亦充分. 如同在前节中指出的那样, 我们首先来解方程组 (2.6.1) 中的第一个方程. 若 T_1 为方程的一个特解, 则该方程的一般解由公式

$$T(\varphi) = T_1(\varphi) + \Sigma_1(\lambda_1)\,, \tag{2.6.5}$$

给出, 其中 Σ_1 为 $n-1$ 个变量 $x_2, x_3, \ldots, x_n$ 的空间上的广义函数. 方程组 (2.6.1) 中的第二个方程因此可以写成

$$S_2(\varphi) = \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(\varphi) + \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x_2}(\lambda_1)\,. \tag{2.6.6}$$

但广义函数 $S_2 - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}$ 不依赖 x_1, 因为根据 (2.6.2), 它关于 x_1 的偏导数为零:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(S_2 - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\right) &= \frac{\partial S_2}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &= \frac{\partial S_1}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(S_1 - \frac{\partial T_1}{\partial x_1}\right) \\ &= 0\,.\end{aligned} \tag{2.6.7}$$

因此存在变量 $x_2, x_3, \ldots, x_n$ 的空间上的广义函数 $S_{1,2}$ 使得

$$S_2(\varphi) - \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\varphi) = S_{1,2}(\lambda_1)\,, \tag{2.6.8}$$

从而 (2.6.6) 可以写成

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial x_2} = S_{1,2}\,. \tag{2.6.9}$$

这是一个未知元为 Σ_1 的方程; 它与前节中已解决的方程完全相同 (但少一个变量). 如此进行下去就可得到所要的结论.

推论. *若广义函数 T 的 m 阶导数均为零, 则它为次数不大于 $m-1$ 的多项式.*

(因为该广义函数的 $m-1$ 阶偏导数的一阶偏导数为零, 因此均为常数. 从而该广义函数的 $m-2$ 阶偏导数均为一次多项式, 如此递推下去即得所要的结论.)

第 4 节的定理 2 和定理 3 可被推广, 并且能在知道 T 的所有一阶偏导数时给出 T 本身的重要性质. 但从 $n=1$ 过渡到任意的 n 时, 需要对定理的陈述作一些重要的修改; 特别地, 正如我们在前面曾经说过的, 一个函数 f 可能其偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 均在每个紧集上可积, 但它本身却不连续, 甚至不是有界 [例如公式 (2.5.12)].

一阶偏导数均为连续函数的广义函数

定理 7. 若广义函数 T 的一阶偏导数 $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ 为连续函数 $g_1, g_2, \ldots, g_n$, 则它为通常意义下的连续可微函数 $f(x)$, 且这些 g_i 就是它的通常意义下偏导数. 我们有公式

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \left[g_1(t)\,dt_1 + g_2(t)\,dt_2 + \cdots + g_n(t)\,dt_n \right], \tag{2.6.10}$$

这里的积分可在任何连接 0 和 x 的可求长弧上进行.

为此, 我们将继续使用前一个定理中的积分方法. 我们选取由下面的常义不定积分所定义的连续函数 $f_1(x)$ 来作为 T_1:

$$f_1(x) = \int_0^{x_1} g_1(t_1, x_2, \ldots, x_n)\,dt_1\,. \tag{2.6.11}$$

我们已知道, 在此条件下, $g_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ 应为不依赖 x_1 的广义函数; 我们这里将证明它是一个连续函数. 取 $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u(x_1)v(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, 那么我们有

$$\begin{aligned}\left(g_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \cdot \varphi &= \int u(x_1)\,dx_1 \int \cdots \int \left(g_2 v + f_1 \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) dx_2\,dx_3 \cdots dx_n \\ &= \int h(x_1)u(x_1)\,dx_1\,,\end{aligned} \tag{2.6.12}$$

其中 $h(x_1)$ 在函数 v 固定后为 x_1 的连续函数. 但 $g_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ 不依赖 x_1 就是说最后那个积分与 $\int u(x_1)\,dx_1$ 成比例 (定理 1). 因此一旦 v 固定后 $h(x_1)$ 就是一个常数. 我们因此可用它在 $x_1 = 0$ 处的值来代替该函数, 但此时 f_1 为零, 从而

$$\left(g_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \cdot \varphi = \iint \cdots \int u(x_1)v(x_2, x_3, \ldots, x_n) g_2(0, x_2, x_3, \ldots, x_n)\,dx\,, \tag{2.6.13}$$

而在取 $u = \varphi_0$, $v = \lambda_1$ 时, 方程 (2.6.9) 则变成了

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial x_2} = S_{1,2} = g_2(0, x_2, x_3, \ldots, x_n)\,, \tag{2.6.14}$$

其中第二项还是变量 $x_2, x_3, \ldots, x_n$ 的一个连续函数. 如此进行下去, 问题将被逐步归结成对连续函数进行积分, 而我们最终将会得到

$$\begin{aligned}f(x) = f(0) &+ \int_0^{x_1} g_1(t_1, x_2, \ldots, x_n)\,dt_1 \\ &+ \int_0^{x_2} g_2(0, t_2, x_3, \ldots, x_n)\,dt_2 + \cdots + \int_0^{x_n} g_n(0, 0, \ldots, t_n)\,dt_n\,.\end{aligned} \tag{2.6.15}$$

于是由定理 5 的第 2° 条可知 f 连续可微且以那些 g_i 为其通常意义下的偏导数.

公式 (2.6.10) 即刻可得, 这是因为 f 在任何可求长曲线上均为其通常意义下的微分的不定积分.

值得一提的是, 在所考虑的上述情况中, 函数 f 以及所有 g_i 均连续, 由那些 g_i 出发来给出 f 的公式 (2.6.10) 没有走出连续函数的框架; 但那个用来保证所有 g_i 是同一个函数 f 的偏导数的条件

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$$

却要用到广义函数, 因为那些 g_i 一般并不在通常意义下可导 ①. 当然, 该条件最终还是可以翻译成关于连续函数的条件: 它是在说, 对任意的 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 我们有

$$\iint \cdots \int \left(g_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx = 0\,. \tag{2.6.16}$$

我们因此可以提下述问题: 若所有偏导数

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = S_i$$

的阶均不大于 m ($m \geqslant 1$), 也就是说均属于 $(\mathscr{D}'^m)$, 那么 T 的阶是否不大于 $m-1$? 在单变量 ($n=1$) 的情形答案显然是肯定的 (第 3 章定理 21 的推论). 但 $n \geqslant 2$ 时, 答案却相反是否定的, 参见 ORNSTEIN [1].

① 参见 GILLIS [1] 的研究.

第三章　广义函数的拓扑空间 广义函数的结构

内容提要　本章将一方面研究广义函数的收敛性, 而另一方面则讨论它们的局部和整体结构. 本章显然在理论和实际应用中都非常重要; 本章中的那些定理, 即便大家对它们的证明没有任何了解, 在实际应用中也照样非常好用, 而其证明则在大多数时候属于泛函分析的范畴 (拓扑向量空间)[①].

我们将在第 1 节定义空间 $(\mathscr{D})$ 上的拓扑.

第 2 节讨论 $(\mathscr{D})$ 中的有界集. 这些有界集将用来定义广义函数的收敛性. 大家可以仅满足于了解有界集的定义 (定理 4, p. 48) 而略过第 1, 2 节余下的内容.

我们将在第 3 节中定义广义函数的收敛性: 称广义函数 T_j 收敛于 0, 若 T_j 在空间 $(\mathscr{D})$ 的任意有界集上均一致收敛于 0.

我们还将介绍拓扑空间 $(\mathscr{D}')$ 的各种性质: 它们仅有理论价值而对技术性的应用没有任何用处. 还需特别指出的是定理 14 [p. 52, 空间 $(\mathscr{D})$ 和 $(\mathscr{D}')$ 之间的互反性] 和定理 15 (p. 52, 空间 $(\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中的稠密性). 由定理 16 (p. 53) 所给出的收敛判别准则则相反在所有的理论和实际应用中都不可缺少, 而这点是显然的.

我们将在第 4 节给出一个新的求导定义, 以此来推广通常的求导定义

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

导数因而就是一个微分商的极限. 由此我们将推出几个容易的结论.

① 凡与拓扑向量空间有关的问题, 见 Banach [1], Bourbaki [5] 和 [6], Dieudonné – Schwartz [1], Köthe [3], Mackey [1] 和 [2], Grothendieck [5], Edwards [1], Treves [1], Horvath [1], Yosida [1], Schwartz [18]. 译者注: 也见 J. 巴罗斯 – 尼托的著作: 广义函数引论. 上海科学技术出版社 (1981).

我们将在第 5 节证明求导的连续性这一基本性质 (定理 18, p. 56), 从而在对收敛的序列、级数或积分求导时可逐项或在积分号 $\int$ 下进行; 该性质与无穷可导性是广义函数的主要优点. 由此可导出最重要的实用收敛判别准则 (定理 19, p. 57).

第 6 节研究广义函数的局部结构. 任意一个广义函数在局部上都是一个连续函数的导数 (定理 21, p. 57); 因此我们仅引入了最不可能成为新数学的东西就使得任意连续函数变得无穷可导. 定理 23 (p. 61) 的证明有些棘手, 它是定理 19 (p. 57) 的逆命题, 并且在理论上和实践中都十分有用.

我们将在第 7 节建立空间 $(\mathscr{E})$ 与 $(\mathscr{E}')$ 之间的对偶 (定理 25, p. 62), 前者由所有支集任意的无穷可导函数组成, 后者则为具有紧支集的广义函数所组成的空间.

定理 26 (p. 63) 给出这些广义函数的整体结构, 而定理 27 (p. 64) 则是该结构的另外一种说法. 定理 28 是一个比较精细的定理, 将会在第 10 节中用到.

第 8 节研究广义函数的整体结构, 我们不愿将之省略, 但它在后面不会被用到.

同样地, 第 9 节完全是对广义函数支集的一个精细研究. 定理 34 (p. 70) 的证明要用到一些很细致的方法. 该定理有时会有用, 但更为仔细严密的研究则表明, 我们一般可以跳过它而利用一些证明更为初等的较弱结论; 该定理可留给专家.

第 10 节给出了支集为正则流形的广义函数的结构. 定理 35 (p. 70) 最为基本: 支集为原点的广义函数为 Dirac 测度的一些导数的有限和.

对于技术人员来说, 迅速地略过这一章 (除了必要的第 5 节外) 会比较好.

§1. 拓扑空间 $(\mathscr{D})$

空间 $(\mathscr{D}_K)$ 的拓扑 我们已在 $(\mathscr{D}_K)$ 上引入了关于函数 φ 及其各阶导数的一致收敛拓扑. 如下定义的 $V(m;\varepsilon;K)$ ($m \geqslant 0$ 为整数, 而 $\varepsilon > 0$ 为实数) 构成了 $(\mathscr{D}_K)$ 中函数 0 的一个基本邻域系:

$$V(m;\varepsilon;K) = \left\{\varphi \in (\mathscr{D}_K) \ : \ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^p\varphi(x)| \leqslant \varepsilon,\ |p| \leqslant m\right\},$$

其中 $|p| := p_1 + p_2 + \cdots + p_n$. 所有的半范 N_p

$$N_p(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^p\varphi(x)|$$

则构成了定义该拓扑的一个半范基本系. 而 $(\mathscr{D}_K)$ 具有可数邻域基, 局部凸且完备, 这因此是一个 Fréchet 空间.

在 $(\mathscr{D}_K^m)$ 上, 拓扑, 原点 0 的邻域, 以及半范都可以用同样的方式来定义, 但均只与 φ 的阶不大于 m 的导数有关; 因此 $(\mathscr{D}_K^m)$ 关于范数

$$\|\varphi\|_m = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |p|\leqslant m}} |D^p\varphi(x)|$$

为 Banach 空间.

空间 $(\mathscr{D})$ 的拓扑 我们现将在 $(\mathscr{D})$ 本身上定义一个拓扑来起由各种不同 $(\mathscr{D}_K)$ 上的拓扑系统所起的一样的作用.

设 $\Omega = \{\Omega_0 = \emptyset, \Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\nu, \ldots\}$ 为开集的无穷序列使 $\overline{\Omega}_{\nu-1} \subset \Omega_\nu$ 且 $\mathbb{R}^n$ 中任何一个紧集在 ν 充分大时均包含在 Ω_ν 中. 我们可以取, 比如说球 $|x| < \nu$, 来作为 Ω_ν. 我们将用 $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots\}$ 表示一列单调下降趋于 0 的正数, 而用 $\{m\} = \{m_0, m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots\}$ 表示一列单调上升趋于 $+\infty$ 的整数, 我们令

$$V(\{m\}; \{\varepsilon\}; \{\Omega\})$$

为对任意的 ν 以及任意的 $x \notin \Omega_\nu$ 和 $|p| \leqslant m_\nu$, 均满足

$$|D^p\varphi(x)| \leqslant \varepsilon_\nu \tag{3.1.1}$$

的函数 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 的集合.

显然, 当序列 $\{m\}, \{\varepsilon\}, \{\Omega\}$ 以所有可能的方式变化时, 这些 $V(\{m\}; \{\varepsilon\}; \{\Omega\})$ 构成了 $(\mathscr{D})$ 上的一个与它的向量空间结构相容的拓扑的原点 0 的基本邻域系.

这是一个局部凸, 但邻域基不可数的拓扑 (由上述数列所组成的集合不可数). 若 K 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个固定紧集, 该拓扑在 $(\mathscr{D}_K)$ 上所诱导的拓扑就是大家在前面已经见到过的那个 (有可数邻域基的) 拓扑.

我们可不改变 $(\mathscr{D})$ 的拓扑而每次都取定同一个序列 $\{\Omega\}$. 为此只需所有的 $\overline{\Omega}_\nu$ 均为紧集; 比如说, 我们可以将球 $|x| < \nu$ 取作 Ω_ν. 而这正是我们在下面所要做的, 我们将记 $V(\{m\}; \{\varepsilon\})$ 而不再提 $\{\Omega\}$.

所有的半范 $N(\{m\}; \{\varepsilon\})$

$$N(\{m\}; \{\varepsilon\})(\varphi) = \sup_\nu \left(\sup_{\substack{|x| \geqslant \nu \\ |p| \leqslant m_\nu}} |D^p\varphi(x)|/\varepsilon_\nu \right)$$

构成了一个定义 $(\mathscr{D})$ 上拓扑的半范基本系. 而原点 0 的邻域 $V(\{m\}; \{\varepsilon\})$ 正好由

$$N(\{m\}; \{\varepsilon\})(\varphi) \leqslant 1$$

来定义.

定理 1. *拓扑空间 $(\mathscr{D})$ 为完备拓扑空间.*

大家可立刻发现, 若 $\varphi_j \in (\mathscr{D})$ 构成了拓扑空间 $(\mathscr{D})$ 中的 Cauchy 序列或滤子, 则 φ_j 一致收敛到一个无穷可导的极限 φ 且对任意 p, 函数 $D^p\varphi_j$ 也一致收敛到 $D^p\varphi$. 随后可知 φ 具有紧支集 [因此属于 $(\mathscr{D})$]: 因为对于任意序列 $\{\varepsilon\}$ 以及充分大的 i, j, 当 $|x| \geqslant \nu$ 时, 我们有:

$$|\varphi_i(x) - \varphi_j(x)| \leqslant \varepsilon_\nu, \tag{3.1.2}$$

于是对于充分大的 j, 当 $|x| \geqslant \nu$ 时, 也有:

$$|\varphi(x) - \varphi_j(x)| \leqslant \varepsilon_\nu\,, \tag{3.1.3}$$

又因 φ_j 有紧支集, 从而对任意序列 $\{\varepsilon\}$, 当 ν 充分大时, 对任意 $|x| \geqslant \nu$, 我们有

$$|\varphi(x)| \leqslant \varepsilon_\nu\,, \tag{3.1.4}$$

然而, 若 φ 没有紧支集, 则将存在一列点 $x_\nu \in \mathbb{R}^n$ 使得 $|x_\nu| \geqslant \nu$ 且 $\varphi(x_\nu) \neq 0$, 从而公式 (3.1.4) 对于由 $\varepsilon_\nu = \frac{1}{2}|\varphi(x_\nu)|$ 所定义的序列 $\{\varepsilon\}$ 来说是错的. 最后立刻可得 φ_j 在拓扑空间 $(\mathscr{D})$ 中收敛于 φ.

空间 $(\mathscr{D}_K)$ 的拓扑与空间 $(\mathscr{D})$ 的拓扑之间的关系

那些空间 $(\mathscr{D}_K)$ 的拓扑与 $(\mathscr{D})$ 的拓扑之间存在着下述关系:

定理 2. *拓扑空间 $(\mathscr{D})$ 为拓扑空间 $(\mathscr{D}_K)$ 的"严格正向极限"*[①]*: 空间 $(\mathscr{D})$ 中的一个凸集为原点 0 的邻域, 当且仅当它与每一个 $(\mathscr{D}_K)$ 的交集为 $(\mathscr{D}_K)$ 的拓扑下的原点 0 的邻域, 其中 K 为 $\mathbb{R}^n$ 的紧集. 空间 $(\mathscr{D})$ 为有界型和桶型*[②].

定理 3. *为使一个定义在 $(\mathscr{D})$ 上而取值在一个局部凸拓扑向量空间 F 中的线性映射 [特别是 $(\mathscr{D})$ 上的线性型] 为连续映射, 当且仅当它在每一个 $(\mathscr{D}_K)$ 上的限制关于 $(\mathscr{D}_K)$ 的拓扑连续.*

推论. *空间 $(\mathscr{D})$ 上的连续线性型就是前面定义过的广义函数. 而 $(\mathscr{D}')$ 为 $(\mathscr{D})$ 的拓扑对偶.*

定理 3 是定理 2 的平凡推论: 为使一个定义在 $(\mathscr{D})$ 上而取值在 F 中的线性映射连续, 当且仅当 F 中原点 0 的凸邻域在该映射下的逆像为 $(\mathscr{D})$ 中原点 0 的邻域; 但该逆像是凸的, 因此根据定理 2, 当且仅当它与每个 $(\mathscr{D}_K)$ 的交为原点 0 的邻域; 即该映射在每个 $(\mathscr{D}_K)$ 上的限制连续. 另外, 定理 2 的最后一部分可由前面一部分导出: Fréchet 空间的严格正向极限为有界型和桶型[③].

现证明定理 2 的第一部分. 显然任意一个 $V(\{m\};\{\varepsilon\})$ 与 $(\mathscr{D}_K)$ 的交在 $(\mathscr{D}_K)$ 的拓扑下均为原点 0 的邻域. 反过来, 设 W 为凸集且使得与每个 $(\mathscr{D}_K)$ 的交在 $(\mathscr{D}_K)$ 的拓扑下为原点 0 的邻域. 对任意整数 $\nu \geqslant 0$, 存在整数 $m_\nu \geqslant 0$ 以及实数 $\eta_\nu > 0$ 使得支集落在紧集 $|x| \leqslant \nu + 2$ 中且满足 $|D^p\varphi(x)| \leqslant \eta_\nu$ $(|p| \leqslant m_\nu)$ 的任意函数 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 均属于 W. 通过适当的选取, 我们总可以使得序列 $\{m\}$ 递增, 而序列 $\{\eta\}$ 递减.

---

① 关于正向极限, 参见第 43 页脚注 ① 中所指出的著作.

② 译者注: 设 E 为局部凸拓扑向量空间. 称 $V \subset E$ 为平衡集, 若对任意 $|\lambda| \leqslant 1$ 均有 $\lambda V \subset V$. 称 V 为吸收集, 若 $\forall x \in E, \exists \lambda > 0$ 使得 $\lambda x \in V$. 称 E 为有界型, 若 E 中每个能吸收任意有界集的平衡凸集为其原点的邻域. 称 E 为桶型, 若 E 的任何吸收平衡闭凸集为其原点的邻域, 这又等价于说其拓扑对偶 E' 中的弱有界集为等度连续.

③ 见 BOURBAKI [6], 第 18 分册, 第 3 章第 1 节第 2° 段中的命题 2 的推论 2; 以及 BOURBAKI [5].

选定函数序列

$$\alpha_\nu \in (\mathscr{D}), \quad \alpha_\nu \geqslant 0, \quad \sum_\nu \alpha_\nu = 1\,,$$

其中 α_ν 的支集包含在紧集 $\nu \leqslant |x| \leqslant \nu+2$ 中. 对于 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 我们有

$$\varphi = \sum_\nu \frac{1}{2^{\nu+1}} \left(2^{\nu+1}\alpha_\nu\varphi\right)\,,$$

从而由 W 的凸性可知, 若每个函数 $2^{\nu+1}\alpha_\nu\varphi$ 属于 W, 则 φ 也将属于 W. 根据 Leibnitz 公式, 函数 $D^p(\alpha_\nu\varphi)$ 将为 α_ν 和 φ 的阶不大于 $|p|$ 的导数的有限线性组合; 一旦选定序列 α_ν, 由于仅会涉及 φ 关于 $\nu \leqslant |x| \leqslant \nu+2$ 的那些值, 因此可知存在常数 k_ν 使得由 $|x| \geqslant \nu$ 及 $|p| \leqslant m_\nu$ 时有 $|D^p\varphi(x)| \leqslant \varepsilon_\nu$ 可导出当 $|p| \leqslant m_\nu$ 时, 成立

$$|2^{\nu+1}D^p(\alpha_\nu\varphi)| \leqslant k_\nu\varepsilon_\nu\,.$$

于是若选取序列 $\{\varepsilon\}$ 使得对任意的 ν 均有 $k_\nu\varepsilon_\nu \leqslant \eta_\nu$, 那么由 $\varphi \in V(\{m\};\{\varepsilon\})$ 可导出 $2^{\nu+1}D^p\alpha_\nu\varphi \in W$, 从而 $\varphi \in W$; 从而可知 W 为 $(\mathscr{D})$ 中原点 0 的邻域, 这就是所要证明的.

值得注意的是, 空间 $(\mathscr{D})$ 的拓扑在 $(\mathscr{D}_K)$ 上诱导了 $(\mathscr{D}_K)$ 原来的拓扑, 对于此类正向极限总是如此 [①]. 至于 $(\mathscr{D})$ 为完备这一事实, 我们已经直接证明 (定理 1); 但它也是 Köthe 定理 [②] 的一个推论.

我们刚才讲的关于 $(\mathscr{D})$ 的所有结论均可推广到 $(\mathscr{D}^m)$ 上; 只需将序列 $\{m\}$ 换成恒等于 m 的整数序列.

作为本节的结束, 提请大家注意, 在 $(\mathscr{D})$ 这样一个没有可数邻域基的空间中, Baire 纲定理不再成立: 空间 $(\mathscr{D}_K)$ 为 $(\mathscr{D})$ 的无处稠密闭向量子空间, 但 $(\mathscr{D})$ 却为无限可数多个 $(\mathscr{D}_K)$ 的并.

§2. 空间 $(\mathscr{D})$ 中的有界集

对偶空间的拓扑 通常也将拓扑向量空间的对偶变成一个拓扑空间.

若 (E) 为 Banach 空间 (完备赋范向量空间), 连续线性型 L 的范数被定义为

$$\|L\| = \max_{\|e\|\leqslant 1} |L\,e|\,. \tag{3.2.1}$$

因此 (E) 的对偶空间 (E') 本身也是一个 Banach 空间.

但在这里, 这样的做法没有任何意义, 因为 $(\mathscr{D})$ 不是赋范向量空间. 在拓扑向量空间中, 正是那些有界集将取代 Banach 空间中的单位球 $\|e\| \leqslant 1$.

① DIEUDONNÉ – SCHWARTZ [1], 命题 2, p. 68.

② KÖTHE [2].

在一个拓扑向量空间中, 我们称集合 B 有界, 若该集合可通过一个以原点 O 为中心比例足够小的相似变换变到 O 的任意邻域中. 在 Banch 空间中, 球是有界集; 反过来, 如果在一个局部凸的拓扑向量空间中存在原点 O 的有界邻域, 那么该空间为可赋范空间 (存在一个可用来定义该空间拓扑的范数). 任意的收敛序列均有界.

空间 $(\mathscr{D})$ 中的有界集 设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 而

$$\{M\} = \{M_0, M_1, \ldots, M_m, \ldots\}$$

为递增的正数序列. 令 $B(\{M\}; K)$ 为满足下述性质的所有函数 $\varphi \in (\mathscr{D}_K)$ 的集合:

$$\text{对任意 } |p| \leqslant m, \quad \text{均有 } |D^p\varphi| \leqslant M_m. \tag{3.2.2}$$

定理 4. 为了使一个集合在拓扑空间 $(\mathscr{D})$ 中有界, 当且仅当它包含在某一个适当的 $B(\{M\}; K)$ 中. 换句话说, 当且仅当该集合中的函数 φ 的支集包含在 $\mathbb{R}^n$ 的一个固定紧集中, 并且这些函数及其它们的各阶导数均一致有界.

条件显然是充分的, 我们将证明它也是必要的. 若集合 B 中的那些 φ 的支集不包含在一个固定的紧集中, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 x_ν ($|x_\nu| \geqslant \nu$) 以及函数列 $\varphi_\nu \in B$ 使得 $\varphi_\nu(x_\nu) \neq 0$. 因此, 若 $\{m\}$ 为任意序列而 $\{\varepsilon\}$ 为序列 $|\varphi_\nu(x_\nu)/\nu|$, 则任意的相似变换, 不管其比例是多少, 均不能将 B 变到 $V(\{m\}; \{\varepsilon\})$ 中. 从而 B 不会有界.

于是 $B \subset (\mathscr{D}_K)$, 其中 K 为某个适当的紧集. 由于仅当 $|p| \leqslant m$ 时, 那些 $|D^p\varphi|$ 关于 $\varphi \in B$ 有界时 B 才能通过相似变换变到 $(\mathscr{D}_K)$ 中原点的邻域 $V(m; \varepsilon; K)$ 中; 因此最终该结论对所有的指标 p 均成立. 这就是所要证明的.

若大家想绕开 $(\mathscr{D})$ 的拓扑, 可将该定理当作 $(\mathscr{D})$ 中有界集的定义.

定理 5. 定义在 $(\mathscr{D})$ 上且在它的每个有界集上有界的线性型连续.

该线性型在 Fréchet 空间 $(\mathscr{D}_K)$ 上的限制事实上在 $(\mathscr{D}_K)$ 的每个有界集上有界, 从而连续, 于是根据定理 3, 它在 $(\mathscr{D})$ 上连续. 这也可由 $(\mathscr{D})$ 为有界型空间的正向极限[①], 因此它本身也为有界型而导出.

定理 6. 为使一个集合在 $(\mathscr{D})$ 中有界, 当且仅当任意的广义函数均在其上有界.

在 $(\mathscr{D})$ 上引入弱拓扑 $\sigma(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$; 则定理 6 等价于说 $(\mathscr{D})$ 的弱有界集为有界集, 该性质在任意一个局部凸的 Hausdorff 拓扑向量空间中均成立 (Mackey 定理)[②].

① 见 Bourbaki [5], 定理 3, p. 11.

② Mackey [2], 定理 7, p. 524, 以及 Bourbaki [6], 第 2 卷, 定理 2 的推论, p. 70.

有界集与紧集; 自反性

定理 7. *在 $(\mathscr{D})$ 中, 有界集与相对紧集相同: 即 $(\mathscr{D})$ 为 Montel 空间.*

在任意的拓扑向量空间 E 中, 紧集均有界; 事实上, 紧集与原点的开邻域 V 的所有相似集的交构成了它的一个开覆盖, 因此存在有限覆盖, 进而存在 V 的某个相似集包含该紧集. 该定理的逆命题与 Ascoli 定理有关, 为空间 $(\mathscr{D})$ 所特有. 有界且一阶导数有界的函数构成了拓扑向量空间 $(\mathscr{D}_K^0)$ 中的一个相对紧集; 因此 m 阶连续可微函数空间 $(\mathscr{D}_K^m)$ 中的有界集在 $(\mathscr{D}_K^{m-1})$ 中相对紧. 故 $(\mathscr{D})$ 中有界集为 $(\mathscr{D})$ 中的相对紧集. 由此可见 $(\mathscr{D})$ 为 Montel 空间 (与全纯函数空间类似)[①].

因此在 $(\mathscr{D})$ 中 (异于无限维 Banach 空间), 弱紧集和强紧集相等 (因为弱紧集为弱有界, 从而强有界, 进而由定理 7 知为强紧). *在 $(\mathscr{D})$ 的紧集或有界集上, 弱拓扑和强拓扑相等, 且等于比它们弱的任意 Hausdorff 拓扑 [例如由 $(\mathscr{D}')$ 诱导的拓扑].*

另外, 区别强拓扑和弱拓扑仅对滤子重要: 在 $(\mathscr{D})$ 中弱收敛的序列有界, 从而强收敛. 基于同样的理由, 弱 Cauchy 序列有界, 因此是强 Cauchy 序列, 而 $(\mathscr{D})$ 为强完备, 所以它强收敛. 我们可以将这些结论用更为具体确切的词语来表述:

若函数列 $\varphi_j \in (\mathscr{D})$ 使得对任意的广义函数 T, 序列 $T(\varphi_j)$ 均有一个极限 $L(T)$, 则存在函数 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 使得 $L(T) = T(\varphi)$, 并且 φ_j 在 $(\mathscr{D})$ 中强收敛于 φ, 它们的支集包含在 $\mathbb{R}^n$ 的某个固定紧集中.

将序列换成具有有界或可数滤子基的滤子后有同样的定理. 在 $(\mathscr{D})$ 的弱拓扑的意义下连续依赖有限多个实参数 λ_ν 的函数 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 在强拓扑的意义下依然如此.

在第 1, 2 节中所证明的那些性质可立刻搬到 m 阶连续可微函数空间 $(\mathscr{D}^m)$ 上; 但对该空间来说, 定理 7 及其推论都是错的.

§3. 广义函数的拓扑空间 $(\mathscr{D}')$

空间 $(\mathscr{D}')$ 中的收敛性

我们现在终于能恰当地定义广义函数的向量空间 $(\mathscr{D}')$ 的拓扑; 该定义可适用于任何拓扑向量空间的对偶空间.

我们称 $T_j \in (\mathscr{D}')$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中收敛于 0, 若对任意 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 数 $T_j(\varphi)$ 均收敛于 0, 且在 $(\mathscr{D})$ 中由函数 φ 组成的任意有界集上一致收敛于 0.

若 B 为 $(\mathscr{D})$ 中有界集, 而 T 为广义函数, 则 $T(\varphi)$ 关于 $\varphi \in B$ 有界, 因此可令

$$T(B) = \sup_{\varphi \in B} |T(\varphi)| . \tag{3.3.1}$$

于是若对于任意有界集 B, 均有 $T_j(\varphi)$ 关于 $\varphi \in B$ 一致收敛于 0, 也即若 $T_j(B)$ 收敛于 0, 那么 $T_j \in (\mathscr{D}')$ 收敛于 0.

① Bourbaki [6], 第 18 分册, 第 4 章第 3 节第 4° 段, p. 89.

我们就这样在 $(\mathscr{D}')$ 上定义了一个拓扑 [还可注意到, 为定义该拓扑, 仅需 $(\mathscr{D})$ 的有界集而无需其拓扑], 其半范基本系为 N_B: $N_B(T)=T(B)$. 在此拓扑, 下原点 0 的一个基本邻域系由 $V(B;\varepsilon)$ 组成 [其中 B 为 $(\mathscr{D})$ 中有界集; 而 $\varepsilon>0$ 为实数]:

$$V(B;\varepsilon)=\{T\in(\mathscr{D}')\ :\ T(B)\leqslant\varepsilon\}=\{T\in(\mathscr{D}')\ :\ |T(\varphi)|\leqslant\varepsilon,\ \ \forall\varphi\in B\}.$$

于是 $(\mathscr{D}')$ 为局部凸但没有可数邻域基的拓扑向量空间.

空间 $(\mathscr{D}')$ 的拓扑性质 **定理 8.** *拓扑对偶 $(\mathscr{D}')$ 为完备空间.*

这是 Banach 空间的一个经典性质在 $(\mathscr{D})$ 上的推广, 该性质在所有有界型向量空间上均成立.

其证明即刻可得: 若 T_j 构成一个 Cauchy 滤子, 则对任意 $\varphi\in(\mathscr{D})$, 均有 $T_j(\varphi)$ 收敛于极限 $T(\varphi)$; 因此 T 是一个在 $(\mathscr{D})$ 的每个有界集上有界的线性型, 从而为广义函数 (定理 5), 且 T_j 在 $(\mathscr{D})$ 中强收敛于 T.

完全与在 $(\mathscr{D})$ 中一样, 也可以在 $(\mathscr{D}')$ 中定义有界集. 可知, 广义函数的有界集是一个在 $(\mathscr{D})$ 的任意有界集上取值有界的广义函数的集合.

我们不加证明地承认下述定理:

定理 9. *为使 $(\mathscr{D}')$ 的子集 B' 有界,*

a) 必须在 $(\mathscr{D})$ 中存在原点 0 的邻域 V 使得 $|T(\varphi)|$ 关于 $\varphi\in V$ 和 $T\in B'$ 有界;

b) 只需对任意的 $\varphi\in(\mathscr{D})$, 均有 $|T(\varphi)|$ 关于 $T\in B'$ 有界 (该界显然依赖于 φ).

$a)$ 可由 Fréchet 空间的正向极限 $(\mathscr{D})$ 为桶型空间导出; 因此 $(\mathscr{D}')$ 的任意有界集为等度连续[①];

$b)$ 意味着, 若在 $(\mathscr{D}')$ 上引入弱拓扑 $\sigma((\mathscr{D}'),(\mathscr{D}))$, 则 $(\mathscr{D}')$ 中任意一个弱有界集也为强有界; 而这可由 $(\mathscr{D})$ 的完备性推出[②].

该定理表明, 若一些广义函数在任意 $\varphi\in(\mathscr{D})$ 处的取值有界, 则它们在 $(\mathscr{D})$ 的原点 0 的某个适当邻域 V 上的取值也有界.

定理 10. *为使 $\varphi_j\in(\mathscr{D})$ 在空间 $(\mathscr{D})$ 中收敛于 0, 当且仅当对任意的 $T\in(\mathscr{D}')$, 均有 $T(\varphi_j)$ 收敛于 0, 且在广义函数 T 的任意有界集 B' 上一致收敛于 0.*

我们还可以换一种说法. 设 B' 为 $(\mathscr{D}')$ 的有界集; 令

$$\varphi(B')=\sup_{T\in B'}|T(\varphi)|.$$

则 φ_j 在 $(\mathscr{D})$ 中收敛于 0 当且仅当对任意有界集 B' 均有 $\varphi_j(B')$ 收敛于 0. 故 $(\mathscr{D})$ 的拓扑可由 $(\mathscr{D}')$ 的有界集来定义, 正如 $(\mathscr{D}')$ 的拓扑可由 $(\mathscr{D})$ 的有界集来定义那样.

① 见 BOURBAKI [6], 第 18 分册, 定理 2, p. 27.

② 见 BOURBAKI [6], 第 18 分册, 定理 1 的推论 1, p. 22.

定理 10 可由定理 9 立刻导出. 若 φ 在 $(\mathscr{D}')$ 的任意有界集 B' 上一致收敛于 0, 那么 φ 在 $(\mathscr{D})$ 中收敛于 0; 这是因为 $(\mathscr{D})$ 中原点 0 的平衡闭凸邻域 V 的极集 V° ① 为 $(\mathscr{D}')$ 中的有界集, 且当 $\varphi(V^\circ) \leqslant 1$ 时 φ 落在 V 中. 反过来, 假设 φ 在 $(\mathscr{D})$ 中收敛于 0, 则对于给定 $\varepsilon > 0$, 若 B' 为 $(\mathscr{D}')$ 中的有界集, 则根据定理 9. a), 在 $(\mathscr{D})$ 中存在原点 0 的邻域 V 使得对任意的 $\varphi \in V$ 均有 $\varphi(B') \leqslant \varepsilon$, 从而 $\varphi(B')$ 收敛于 0.

我们刚证明的那个性质对任意的桶型空间均成立②, 因为它只是在说 $(\mathscr{D}')$ 的强有界集为等度连续.

由此可见, 我们可将定理 9 和定理 10 的结论以及在 $(\mathscr{D}')$ 中收敛的定义浓缩成:

定理 11. *若 $T \in (\mathscr{D})$ 和 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 有界 [T 在 $(\mathscr{D}')$ 中而 φ 在 $(\mathscr{D})$ 中], 则 $|T(\varphi)|$ 有界; 若其中一个 (T 或 φ) 有界而另外一个强收敛于 0, 则 $T(\varphi)$ 收敛于 0.*

我们在陈述该性质时将说$T \in (\mathscr{D}')$ 和 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 的双线性型 $T(\varphi)$ 为亚连续③.

但 $T(\varphi)$ 不是两变量 T 和 φ 的连续线性型; 当 T 和 φ 均趋于 0 时 $T(\varphi)$ 却不一定趋于 0. 仅在收敛序列的情形才肯定会如此, 这是因为收敛的序列有界. 另外, 在弱拓扑的情形, 下面是所有我们能够说的:

1° 若其中一个 (T 或 φ) 固定, 而另外一个趋于 0, 则 $T(\varphi)$ 趋于 0.

2° 在收敛序列 (或者是具有有界或可数滤子基的收敛滤子) 的情形, 对强拓扑和弱拓扑可以说同样的事情, 这是因为在 $(\mathscr{D})$ 中 (p. 49) 与在 $(\mathscr{D}')$ 中 (p. 52) 一样, 弱收敛的序列也是强收敛的.

每个 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 均在 $(\mathscr{D}')$ 上定义了一个连续线性型

$$L(T) = T(\varphi) . \tag{3.3.2}$$

故 $(\mathscr{D})$ 为 $(\mathscr{D}')$ 的对偶 $(\mathscr{D}'')$ [也称为 $(\mathscr{D})$ 的二次对偶] 的向量子空间; 定理 10 表明, 若在 $(\mathscr{D}'')$ 上引入 $(\mathscr{D}')$ 的拓扑对偶的强拓扑, 则 $(\mathscr{D}'')$ 在 $(\mathscr{D})$ 上诱导 $(\mathscr{D})$ 的原始拓扑.

空间 $(\mathscr{D}')$ 中的有界集与紧集; 自反性

定理 12. *在 $(\mathscr{D}')$ 中, 有界集与相对紧集相同: 即 $(\mathscr{D}')$ 为 Montel 空间.*

一般地, Montel 空间的对偶还是 Montel 空间. 将定理 7 与 $(\mathscr{D})$ 是一个桶型空间这一事实合起来就可导出定理 12④.

---

① 译者注: $V^\circ = \{T \in (\mathscr{D}') \ : \ |T(\varphi)| \leqslant 1, \ \forall \varphi \in V\}$.

② 见 BOURBAKI [6], 第 18 分册, 第 4 章第 3 节第 2° 段的评注, p. 87.

③ 见 BOURBAKI [6], 第 18 分册第 3 章第 4 节, pp. 38 – 44. 出于简便, 我们将称之为 “亚连续” 而不是说 “关于所有的有界集亚连续”.

④ 见 BOURBAKI [6], 第 18 分册, 命题 7, p. 90.

下面来证明此结论. 设 B' 为 $(\mathscr{D}')$ 中有界集. 集合 B' 上的任意超滤子在 $(\mathscr{D})$ 上简单收敛于某个极限, 该极限为 $(\mathscr{D})$ 上的线性型; 由于 B' 为等度连续 [定理 9. a)], 该线性型连续因此是一个广义函数 T. 另外, 该超滤子在 $(\mathscr{D})$ 的任意紧集上一致收敛, 于是根据定理 7, 它在 $(\mathscr{D})$ 的任意有界集上一致收敛; 再由 $(\mathscr{D}')$ 中收敛性的定义, 超滤子强收敛于 T, 从而 B' 为相对紧集.

由此定理可得, 如同在 $(\mathscr{D})$ 中一样, 在 $(\mathscr{D}')$ 中, 弱紧集与强紧集相同.

在 $(\mathscr{D}')$ 的有界集上, 弱拓扑与强拓扑相等. 任意一个弱收敛序列或弱 Cauchy 序列因此也强收敛.

更确切地:

定理 13. *若广义函数序列 T_j 使得对任意 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 序列 $T_j(\varphi)$ 均有极限 $T(\varphi)$, 则 T 为广义函数, 且 T_j 强收敛于 T.*

对一个具有有界或可数滤子基的滤子同样也是如此.

若广义函数 T 为有限多个实参数 λ_ν 的弱连续函数, 则它也为强连续函数.

评注. 在定理 13 中 T 为广义函数的事实也可由 Banach – Steinhaus 定理推出 [1], 该定理之所以可用是因为 $(\mathscr{D})$ 为桶型空间. 在这里我们则是由定理 12 推出此结论.

定理 14. *空间 $(\mathscr{D})$ 和 $(\mathscr{D}')$ 为自反的; 每个均为另外一个的对偶.*

Banach 的一个定理可表述为, 若一个 Banach 空间中的闭球为弱紧, 则该空间为自反. 由 Mackey 和 Arens 两先生所给出的推广指出, 有界集为相对弱紧的局部凸拓扑向量空间为半自反; 而半自反桶型空间为自反 [2].

定理 14 因此是定理 7 和定理 10 的推论. 但对于空间 $(\mathscr{D}^m)$ 和 $(\mathscr{D}'^m)$, 特别是对于具有紧支集的连续函数空间 $(\mathcal{C})$ 和测度空间 $(\mathcal{C}')$ 来说, 该定理却是错的.

逼近定理　定理 15. *向量空间 $(\mathscr{D})$, 作为 $(\mathscr{D}')$ 的子空间, 在 $(\mathscr{D}')$ 中稠密.*

这等价于说, 任意一个广义函数都是具有紧支集的无穷可导函数的极限. 这可由 $(\mathscr{D})$ 的自反性立刻导出. 空间 $(\mathscr{D}')$ 上任意一个连续线性型可由一个函数 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 来定义. 若它与 $(\mathscr{D}')$ 中由具有紧支集的无穷可导函数 f 组成的子空间 $(\mathscr{D})$ 中的所有元素正交, 也就是说, 若对任意 $f \in (\mathscr{D})$, 它满足

$$\iint \cdots \int f(x)\varphi(x)\, dx = 0\,,$$

则它显然为零; 而这正好导出 $(\mathscr{D})$ 为 $(\mathscr{D}')$ 的稠密子空间.

我们将在关于卷积的那章, 考察一个能使我们找到一列无穷可导函数来趋近给定广义函数的 "正则化" 方法 (第 6 章第 4 节, 定理 11).

同样可知, 所有点状测度的有限线性组合构成了 $(\mathscr{D}')$ 的一个稠密子空间.

[1] 见 Bourbaki [6], 第 18 分册, 定理 1, p. 88.

[2] 见 Bourbaki [6], 第 18 分册, 定理 1, p. 88.

收敛判别准则 在 $(\mathscr{D}')$ 中定义收敛性仅有表面上的困难; 在实际应用中, 验证一般都很容易. 但拥有一些简单的收敛判别准则还是很有用. 下面是最为简单的一个, 由之可导出其它所有的准则:

定理 16. 若对任意紧集 K, 函数 f_j 在 K 上可积函数空间 L_K^1 中收敛 (特别地, 若 f_j 为连续函数且在每个紧集上一致收敛于 0), 则广义函数 f_j 在 $(\mathscr{D}')$ 中收敛于 0.

为此设 B 为 $(\mathscr{D})$ 中的有界集. 所有函数 $\varphi \in B$ 的支集均包含在 $\mathbb{R}^n$ 的某一个固定紧集 K 中, 并且它们在 K 上被一个实数 $M > 0$ 一致界住.

$$
\begin{cases} f_j(B) = \sup\limits_{\varphi \in B} |f_j(\varphi)| = \sup\limits_{\varphi \in B} \left| \iint_K \cdots \int f_j(x)\varphi(x)\, dx \right| \\ \qquad \leqslant M \iint_K \cdots \int |f_j(x)|\, dx \leqslant M \|f_j\|_{L_K^1}, \end{cases} \tag{3.3.3}
$$

因此 $f_j(B)$ 收敛于 0.

更一般地, 如果 f_j 在 L_K^1 中弱收敛于 0 且有界, 则它们在 $(\mathscr{D}')$ 中也有界且弱收敛于 0, 从而强收敛于 0.

利用与第 1 章定理 4 同样的证明方法 (单位分解) 可得, 若一些广义函数在 $\mathbb{R}^n$ 的每点邻域内收敛于一个广义函数极限, 则它们在 $\mathbb{R}^n$ 上收敛于一个广义函数极限:

收敛为局部性质.

特别地, 广义函数 T_j 的极限的支集包含在所有 T_j 的支集的并的闭包里. 其支集在 $\mathbb{R}^n$ 中相互无限远离的广义函数族, 换句话说, 在 $\mathbb{R}^n$ 的每个相对紧开集内最终会等于零的广义函数族, 在 $(\mathscr{D}')$ 中收敛于 0.

除了定理 12, 13, 14, 15 以外, 前面所有的定理对 $(\mathscr{D}^m)$ 的对偶 $(\mathscr{D}'^m)$ 也成立.

评注. 设广义函数 T_j 收敛于 T:

1° 若 T_j 为非负测度, 则 T 也是如此; 因为由 $T_j(\varphi) \geqslant 0$ 可导出 $T(\varphi) \geqslant 0$;

2° 若 T_j 为测度 μ_j 且对于 $\mathbb{R}^n$ 中有紧闭包的任意开子集 Ω, 其范数

$$\iint_\Omega \int |d\mu_j|$$

均被一个大于 0 的固定常数界住, 则 T 也是如此; 因为由 $|T_j(\varphi)| \leqslant k(\max|\varphi|)$ 可推出 $|T(\varphi)| \leqslant k(\max|\varphi|)$. 若将"测度"换成在任意 Ω 上为 L^p 类 $(1 < p \leqslant \infty)$ 且在任意 Ω 上的 L^p 范数被一个大于 0 的固定常数界住的函数, 结论亦成立, 因为由

$$|T_j(\varphi)| \leqslant k\|\varphi\|_{L^{p'}} \quad [p' = p/(p-1)]$$

可以导出 $|T(\varphi)| \leqslant k\|\varphi\|_{L^{p'}}$. 对于连续函数空间 $(\mathcal{C})$ 或可积函数空间 L^1 这些不是 Banach 空间的对偶的空间, 该评注显然是错的.

§4. 求导的拓扑定义

一阶导数 利用 $(\mathscr{D}')$ 的拓扑, 我们现在可以对求导给出一个更为自然的定义. 对于一个函数 f, 在通常意义下, 我们有

$$(3.4.1)\quad \frac{\partial f}{\partial x_k}=\lim_{h_k\to 0}\frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_k+h_k,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_n)}{h_k}.$$

令 $h=(0,0,\ldots,h_k,0,\ldots,0)$ (h 为第 k 个坐标为 h_k 而其余坐标为零的那个点), 并借助 f 的平移 (见 p. 35) 可得:

$$(3.4.2)\quad \frac{\partial f}{\partial x_k}=\lim_{h_k\to 0}\frac{\tau_{-h}f-f}{h_k}.$$

定理 17. *若 T 为任意的广义函数, 则*

$$(3.4.3)\quad \frac{\partial T}{\partial x_k}=\lim_{h_k\to 0}\frac{\tau_{-h}T-T}{h_k}.$$

我们需要证明, 当 $h_k\to 0$ 时,

$$(3.4.4)\quad S_{(h_k)}=\frac{\partial T}{\partial x_k}-\frac{\tau_{-h}T-T}{h_k}$$

收敛于 0. 对任意 $\varphi\in(\mathscr{D})$, 我们有

$$(3.4.5)\quad S_{(h_k)}(\varphi)=T(\psi_{(h_k)}),\quad 其中\quad \psi_{(h_k)}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\frac{\tau_h\varphi-\varphi}{h_k}.$$

由此立刻可见, 对于固定 φ, 当 $h_k\to 0$ 时, 函数 $\psi_{(h_k)}$ 及其各阶导数一致收敛于 0, 故 $\psi_{(h_k)}$ 在 $(\mathscr{D})$ 中收敛于 0. 而 T 为连续线性型, 从而 $T(\psi_{(h_k)})$ 也就是说 $S_{(h_k)}(\varphi)$ 在 h_k 趋于 0 时收敛于 0. 因此 $S_{(h_k)}(\varphi)$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中弱收敛于 0, 从而由定理 13 可知它也强收敛于 0. (另外, 上述强收敛性也不难直接证明.)

任意阶导数 通过引入 T 的逐次差分可以很容易地推广定理 17.

依旧对 $h=(0,0,\ldots,h_k,0,\ldots,0)$, 令

$$(3.4.6)\quad \Delta_{h_k}T=\tau_{-h}T-T.$$

当增量均等于 h_k 时, 广义函数 T 关于 x_k 的第 p_k 阶差分为:

$$(3.4.7)\quad \Delta_{h_k}^{p_k}T=\Delta_{h_k}(\Delta_{h_k}^{p_k-1}T)=\tau_{-p_kh}T-\mathrm{C}_{p_k}^1\tau_{-(p_k-1)h}T+\mathrm{C}_{p_k}^2\tau_{-(p_k-2)h}T+\cdots+(-1)^{p_k}T.$$

也可以, 比如说, 对不同变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 考虑不同增量; 若 $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, 而 h 为一组增量 $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ (h_k 对应于变量 x_k), 定义

$$\Delta_h^p T = \Delta_{h_1}^{p_1} \Delta_{h_2}^{p_2} \cdots \Delta_{h_n}^{p_n} T. \tag{3.4.8}$$

正如大家可以很容易看到的, 我们将有:

$$D^p T = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{h_1}^{p_1} \Delta_{h_2}^{p_2} \cdots \Delta_{h_n}^{p_n} T}{h_1^{p_1} h_2^{p_2} \cdots h_n^{p_n}} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^p T}{h^p}. \tag{3.4.9}$$

任意阶的导数 $D^p T$ 因此都可表示成差分的极限, 而无须借助低阶导数 $D^q T$ $(q < p)$.

诸如 (3.4.9) $(p = 2)$ 这样的公式曾在 Riemann 研究三角级数时起过重要的历史作用. Schwarz 的一个著名定理说, 若对任意 x, 单变量 $(n = 1)$ 连续函数 $f(x)$ 满足

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = 0, \tag{3.4.10}$$

那么 $f(x)$ 为线性函数.

类似于 (3.4.9) 这样的等式并不足以让我们证明此结论. 因为 (3.4.10) 中的第一项必定在 $(\mathscr{D}')$ 中收敛于二阶导数 f''. 然而有些函数可以在每点收敛于 0 但在广义函数空间 $(\mathscr{D}')$ 中却不收敛于 0, 故我们不能肯定 f'' 为零进而导出 f 为线性函数. 因此关于广义函数的一些比较初级的研究并不能得出像 Schwartz 定理这样精细的结果, 况且后者还是所研究的特殊表达式独有的, 本质上与凸性和最大值原理有关并以之作为该定理在下调和函数上的推广.

但相反我们却可以得到一些更为一般的结论:

1° 根据定理 16, 若一族在任意紧集上均有界的函数几乎处处收敛于 0, 则这族函数在 $(\mathscr{D}')$ 中收敛于 0.

因此, 若对于多变量函数 f, 当 $h \to 0$ 时 $\frac{\Delta_h^p f}{h^p}$ 几乎处处收敛于 0 且对充分小 h 在任意紧集上关于 x 一致有界, 则 $D^p f = 0$; 并且当 $n = 1$ 时 (单变量情形), 函数 f 为次数不大于 $p - 1$ 的多项式.

2° 若 $\mathbb{R}^n$ 上的一列连续函数处处收敛于 0, 则它们在 $\mathbb{R}^n$ 的某个稠密开子集每点邻域内一致有界. 因此若 f 连续且 $\frac{\Delta_h^p f}{h^p}$ 趋于 0, 则 $D^p f$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的某个稠密开子集上等于 0, 从而其支集为无处稠密的闭集. 在单变量的情形 $(n = 1)$, 在与该闭集毗邻的每个区间内, 函数 f 为次数不大于 $p - 1$ (可随区间而变) 的多项式. 当然这里大家应在广义函数的意义下理解结论 $D^p f = 0$; 函数 f 可能没有通常意义下的导数.

单调函数 另外, 在第 55 页中所指出的那些由于点态收敛与 $(\mathscr{D}')$ 中的收敛不同而产生的困难, 某些时候并不出现. 例如 S. Bernstein 先生的一个经典定理[①] 断言, 在 $]a, b[$ 内 "完全单调" 的单变量函数在该区间内解析. 首先应证明这样的函数 $f(x)$

① S. BERNSTEIN [1], pp. 196 – 197.

在 (通常意义下) 无穷可导且其各阶导数不小于 0. 而这现在是显然的. 因为若 $f(x)$ 完全单调, 则对任意 h, 均有 $\Delta_h^p f/h^p \geqslant 0$. 由于非负测度在 $(\mathscr{D}')$ 中的极限还是非负测度, 由此可见, 当 $h \to 0$ 时, 函数 f 的各阶导数不小于 0. 故 f 在通常意义下无穷可导 (第 2 章定理 3 的推论). 该定理对多变量也成立. 一般地, 关于"微分商"与导数关系的许多工作可借助广义函数理论得到极大简化和更好解释 ①.

评注. 第 36 页中的那些公式可用另外方式来解释. 若 T 固定, 则映射 $h \to \tau_h T$ 为 h 的向量值函数, 换句话说, 它为 n 个变量 $h_1, h_2, \ldots, h_n$ 的函数且取值在广义函数空间 $(\mathscr{D}')$ 中. 该函数无穷可导且有

$$\left[\frac{\partial}{\partial h_k}(\tau_h T)\right]_{h=0} = -\frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial}{\partial h_k}(\tau_h T) = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_h T). \tag{3.4.11}$$

§5. 求导, 连续线性运算

求导的连续性　定理 18. 广义函数的求导为连续线性运算; 它甚至是严格满同态 ②.

空间 $(\mathscr{D}')$ 上的线性运算 $T \to \frac{\partial T}{\partial x_1}$ 为 $(\mathscr{D})$ 上的严格满同态 $\varphi \to -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ 的转置.

设 B 为 $(\mathscr{D})$ 中有界集. 当 φ 跑遍 B 时, 函数 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ 跑遍某个有界集 B'. 故公式

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}(\varphi) = T\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)$$

表明 $\frac{\partial T}{\partial x_1}(B) = T(B')$: 若 T_j 在 $(\mathscr{D}')$ 中收敛于 0, 则 $T_j(B')$, 从而 $\frac{\partial T_j}{\partial x_1}(B)$ 收敛于 0; 进而 $\frac{\partial T_j}{\partial x_1}$ 在 $(\mathscr{D})$ 中收敛于 0: 求导为连续线性运算.

现在重提我们在第 2 章定理 4 中关于积分所说的. 对于每个广义函数 S, 我们可以单独与之对应一个广义函数 $T = I_1(S)$ 使得 $\frac{\partial T}{\partial x_1} = S$.

选取广义函数 Σ_1 为零 (p. 37), 我们由此得到的映射 $S \to I_1(S)$ 是一个连续线性运算. 于是我们至少找到了运算 $\frac{\partial}{\partial x_1}$ 的一个连续右"逆"运算 I_1 $\left[\frac{\partial}{\partial x_1} I_1(S) = S\right]$, 而这正好证明了运算 $\frac{\partial}{\partial x_1}$ 为严格满同态.

定理 18 极其重要. 它使得求导"重新成为"分析的一个简单运算: 该运算总可进行且连续. 它还给出了可用来证明 $(\mathscr{D}')$ 中的收敛性的最容易的判别准则之一: 若能证明广义函数 T_j 收敛于 0, 则 $\frac{\partial T_j}{\partial x_1}$ 也收敛于 0.

经典结论告诉我们, 有些函数 f_j 可以一致收敛于 0 但其导数 $\frac{\partial f_j}{\partial x_1}$ 却没有同样性质; 其原因在于所考虑的拓扑不利于导数的应用; 而 $\frac{\partial f_j}{\partial x_1}$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中收敛于 0. 当然, 更高阶的求导也为连续线性运算.

---

① 这里仅列举 Choquet [1]; Dieudonné [3]; Popoviciu [1]; Boas [1]; Whitney [2].

② 译者注: 称拓扑向量空间之间的连续线性映射 $T: E \to F$ 为严格满同态, 若 f 为满射且由之诱导的自然同构 $\bar{f}: E/\ker f \to F$ 为拓扑同胚.

收敛准则 定理 18 因此可作如下推广, 由此给出在实际应用中使用的有关 $(\mathscr{D}')$ 中收敛性的最主要的判别准则:

定理 19. *若对任意紧集 K, 函数 f_j 均在 K 上可积函数的空间 L_K^1 中收敛于 0 (特别地, 若 f_j 为连续函数且在任意紧集上一致收敛于 0), 则对任意的求导算子*

$$D = \sum_p a_p D^p, \quad \text{其中 } a_p \text{ 为复值常数},$$

广义函数 Df_j 均在 $(\mathscr{D}')$ 中收敛于 0.

这些定理将尤其会被应用于广义函数空间 $(\mathscr{D}')$ 中收敛的无穷和或乘积.

提醒一下, 无穷和 $\sum_j T_j$ 收敛当且仅当它的有限部分和依指标集的有限子集所组成的正向偏序集收敛 ①; 而级数

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\nu=1}^{\nu=\infty} T_\nu$$

收敛当且仅当部分和序列 $S_m = \sum_{\nu \leqslant m} T_\nu$ 有极限; 若级数 $\mathrm{S}_\nu T_\nu$ 交换收敛 (任意交换通项的位置后依然收敛), 则它可被换成收敛和 $\sum_\nu T_\nu$ 且具有有限和的主要性质.

空间 $(\mathscr{D}')$ 中的收敛和或级数可逐项求导而无需采取任何特别的预防措施.

这会给调和分析 (Fourier 变换和 Laplace 变换) 不少帮助.

§6. 广义函数的局部结构

广义函数与连续函数的导数

定理 20. *若 T 为广义函数而 K 为紧集, 则存在整数 $m \geqslant 0$ 使得当 $\varphi_i \in (\mathscr{D}_K)$ 及其阶不大于 m 的导数均一致收敛于 0, 有 $T(\varphi_j)$ 收敛于 0.*

事实上, 广义函数 T 在 $(\mathscr{D}_K)$ 上定义了一个连续线性型, 而我们曾在第 1 节中考察过该向量空间的拓扑. 故对任意 $\varepsilon > 0$, 在 $(\mathscr{D}_K)$ 中存在原点 0 的邻域 $V(m, \eta; K)$ 使得由 $\varphi \in V(m, \eta; K)$ 可推出 $|T(\varphi)| \leqslant \varepsilon$. 于是, 对任意 $k \geqslant 0$, 由 $\varphi \in V(m, k\eta; K)$ 可导出 $|T(\varphi)| \leqslant k\varepsilon$, 而这就证明了该定理.

定理 21. *空间 $\mathbb{R}^n$ 上的广义函数 T, 在 $\mathbb{R}^n$ 的任何具有紧闭包的开子集 Ω 上, 等于一个连续函数的导数, 且其支集可被选择包含在 Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$ 的任意邻域内.*

为此对 $K = \overline{\Omega}$ 应用前面结论. 则存在 m 和 η 使得对于 $\varphi \in (\mathscr{D}_{\overline{\Omega}})$, 由不等式

$$|D^p \varphi| \leqslant \eta \quad (|p| \leqslant m), \tag{3.6.1}$$

可推出 $|T(\varphi)| \leqslant \varepsilon$.

① 参见 Bourbaki [4], 第 3 章第 4 节: 对于 $(\mathscr{D}')$ 中原点 0 的任意邻域 V, 均存在指标集的有限子集 J 使得对于该指标集的任意有限子集 $K \supset J$, 都有 $T - \sum_{j \in K} T_j \in V$.

但对任意函数 $\theta \in (\mathscr{D}_{\overline{\Omega}})$ 以及任意整数 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 我们有

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial \theta}{\partial t_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, dt_i\,. \tag{3.6.2}$$

于是若 $l \geqslant 1$ 大于 $\overline{\Omega}$ 的直径, 则 (3.6.1) 中的所有不等式可由下面一个不等式导出:

$$\left|\frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}\right| = \left|\frac{\partial^{mn}\varphi}{\partial x_1^m \partial x_2^m \cdots \partial x_n^m}\right| \leqslant \eta / l^{mn}\,, \tag{3.6.3}$$

而它本身也是下列不等式的推论:

$$\iint \cdots \int \left|\frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}\right| dx \leqslant \eta / l^{mn}\,. \tag{3.6.4}$$

可见, 对于函数 $\varphi_i \in (\mathscr{D}_{\overline{\Omega}})$, 为使 $T(\varphi_j)$ 收敛于 0, 只需函数 $\frac{\partial^{m+1}\varphi_j}{\partial x^{m+1}}$ 被看作是 $\overline{\Omega}$ 上的可积函数的 Banach 空间 $L^1_{\overline{\Omega}} = L^1_K$ 中的元素时收敛于 0.

令

$$\psi = \frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}\,. \tag{3.6.5}$$

函数 ψ 和 φ 之间的对应关系为一一对应; 由 φ 出发借助求导可确定 ψ, 而由 ψ 出发通过诸如 (3.6.2) 这样的逐次积分也可确定 φ. 线性型 $T(\varphi)$ 因此是一个线性型 $L(\psi)$. 使得 $L(\psi)$ 有定义的 ψ 的空间 (Δ) 为异于整个空间 L^1_K 的向量真子空间, 因为:

1° 函数 ψ 在 $\mathbb{R}^n$ 中无穷可导;

2° 函数 ψ 形如 $\frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}$, 而 φ 自己的支集也包含在 $\overline{\Omega}$ 中.

线性型 $L(\psi)$ 因此在赋予了 L^1_K 的诱导拓扑的 (Δ) 上连续. 则由 Hahn – Banach 定理可知, 该线性型可以无穷多种方式延拓成 L^1_K 上的连续线性型, 后者可由 $\overline{\Omega}$ 上的一个有界可测函数 f 来定义:

$$L(\psi) = \iint \cdots \int f\psi\, dx\,. \tag{3.6.6}$$

因此对于 $\varphi \in (\mathscr{D}_{\overline{\Omega}})$ 更不必说是对于 $\varphi \in (\mathscr{D}_\Omega)$, 我们有:

$$T(\varphi) = L(\psi) = f\left(\frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}\right), \tag{3.6.7}$$

这表明在开集 Ω 中, 我们有

$$T = (-1)^{(m+1)n}\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}\,. \tag{3.6.8}$$

显然无法唯一确定 f, 因为它可被添加在 Ω 内满足下述偏微分方程的任意函数 g:

$$\frac{\partial^{m+1} g}{\partial x^{m+1}} = 0\,. \tag{3.6.9}$$

现在考虑函数

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(t_1,t_2,\ldots,t_n)\,dt_1\cdots dt_n\,. \tag{3.6.10}$$

这是一个在 $\mathbb{R}^n$ 上连续但其支集一般不紧的函数.

另外, 正如我们在第 2 章定理 5 中所见到的, 在广义函数的意义下, 我们有:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial^n F}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}=f\,. \tag{3.6.11}$$

因此在开集 Ω 中, 我们有

$$T=(-1)^{(m+1)n}\frac{\partial^{m+2}F}{\partial x^{m+2}}\,. \tag{3.6.12}$$

若现在 U 为 $\overline{\Omega}$ 的任意邻域, 将 F 乘以一个在 $\overline{\Omega}$ 上等于 1 的函数 $\alpha\in(\mathscr{D}_U)$, 我们因此可以在 (3.6.12) 中用 $G=\alpha F$ 来替换 F, 而这就证明了该定理.

定理 21 非常重要. 我们引入广义函数就是为了能够对连续函数求导. 由此可见我们并没有引入任何多余的东西, 因为就局部而言, 任意一个广义函数都是一个连续函数的导数.

特别地, 借助于第 1 章第 2 节第 11 页中所引入的广义函数的阶的概念可知, 该定理还表明: *定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的任意一个广义函数, 在 $\mathbb{R}^n$ 的任意一个具有紧闭包的开子集 Ω 上的阶均有限.*

另外, 在单变量的情形 ($n=1$), 定理 21 的证明可被简化. 我们可以用 $(\mathscr{C}_{\overline{\Omega}})$ 来取代 $L^1_{\overline{\Omega}}$, 从而更快地得到

推论. *在 $\mathbb{R}^1$ 的任意具有紧闭包的开子集 Ω 上, 广义函数 T 有有限阶 m. 从而在 Ω 上, 它为某一个测度的 m 阶导数; 其 k 阶导数的阶不大于 $m+k$ (当 $m>0$ 时等于 $m+k$), 而其阶不小于 $m+2$ 的原函数为连续函数. 各阶导数的阶均不大于某一个固定 m 的广义函数, 为通常意义下的无穷可导函数.*

广义函数的有界集 重回到定理 21, 但这次我们不再是考虑单个的广义函数 T, 而是研究 $(\mathscr{D}')$ 中的广义函数的有界集 B'. 那么根据定理 9, 在 $(\mathscr{D}_{\overline{\Omega}})$ 中存在原点 0 的某个邻域 $V(m;\varepsilon;\overline{\Omega})$ 使得在它上面, 所有 $T\in B'$ 可被同一个常数 η 界住.

所对应的对 $\psi\in(\Delta)$ 有定义的线性型 $L(\psi)$ 也一致有界; 可知, 对任意 $\psi\in(\Delta)$ 以及 $T\in B'$, 由不等式

$$\iint\cdots\int|\psi|\,dx\leqslant\eta/l^{mn} \tag{3.6.13}$$

可导出 $|L(\psi)|\leqslant\varepsilon$; 从而

$$|L(\psi)|\leqslant\frac{\varepsilon l^{mn}}{\eta}\|\psi\|_{L^1_K}\,. \tag{3.6.14}$$

但根据 Hahn - Banach 定理, 空间 L_K^1 的向量子空间 (Δ) 上的任意连续线性型均可延拓成整个空间 L_K^1 上的具有同样范数的连续线性型.

于是我们可以选取函数 $f \in L_K^\infty$ 来表示形式 L 使得

$$\|L\| = \max_{\psi \in \Delta} \frac{|L(\psi)|}{\|\psi\|} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon l^{mn}}{\eta}. \tag{3.6.15}$$

由此可见, 若从 f 过渡到 F, 则与广义函数 $T \in B'$ 相伴的连续函数 F 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致有界. 进而我们可得下述结论, 其中充分性是显然的:

定理 22. *为使广义函数的集合 B' 在 $(\mathscr{D}')$ 中有界, 当且仅当对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意相对紧开集 Ω, 均存在指标 p 使得所有 $T \in B'$ 在 Ω 内都可表示成连续函数的 D^p 阶导数, 并且这些连续函数在 Ω 内一致有界.*

收敛的广义函数序列 现在我们不再考虑一个有界集 B', 而是考虑一列在 $(\mathscr{D}')$ 中收敛于 0 的序列 T_j.

则序列 T_j 有界, 从而使得我们有

$$T_j = (-1)^{(m+1)n} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} f_j, \tag{3.6.16}$$

且这些函数 f_j 一致有界.

在这里, 有必要将空间 L_K^1 换成 Hilber 空间 L_K^2; 而 $L_j(\psi)$ 在赋予了 L_K^1 的诱导拓扑的 (Δ) 上连续, 因而更会在赋予了 L_K^2 的诱导拓扑的 (Δ) 上连续. 我们因此不再需要 Hahn - Banach 定理, 因为为了将在 (Δ) 上连续的 L 延拓成 L_K^2 上的连续线性型, 只需将 L 连续延拓到 (Δ) 在 L_K^2 里的闭包 $(\overline{\Delta})$ 上, 并在与 (Δ) 正交的 L_K^2 的向量子空间上取 L 为 0. 那些函数 f_j 不再是 L_K^∞ 中的有界函数, 而是关于 L_K^2 范数一致有界的函数.

但我们还有更多的信息. 对于固定的 $\psi \in (\Delta)$,

$$\lim_j L_j(\psi) = \lim_j T_j(\varphi) = 0. \tag{3.6.17}$$

对于 (Δ) 在 L_K^2 中的闭包 $(\overline{\Delta})$ 里的固定 ψ, 由于这些 L_j 的范数一致有界, 故那些 $L_j(\psi)$ 依然会趋于 0; 对于 L_K^2 中的任意 ψ 亦如此, 这是因为 $L_j(\psi) = L_j(\theta)$, 其中 θ 为 ψ 在闭子空间 $(\overline{\Delta})$ 上的正交投影.

这些 f_j 因此具有下列性质:

1° 这些 $\|f_j\|$ 在 L_K^2 中有界;

2° 对任意 $\psi \in L_K^2$, 这些 $\iint \cdots \int f_j \psi \, dx$ 收敛于 0. 但对于固定的 x,

$$F_j(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_j(t)\, dt = \iint_{\Omega} \cdots \int K_x(t) f_j(t)\, dt, \tag{3.6.18}$$

其中 $K_x(t) \in L^2_K$ 为在 $t \leqslant x$, $t \in \overline{\Omega}$ 处等于 1 而在其它地方为 0 的函数. 因此 $F_j(x)$ 在所有点均收敛于 0; 又因为 $\|f_j\|$ 在 L^2_K 中有界且 $K_x(t)$ 构成 L^2_K 的一个紧子集, 从而上述收敛关于 $x \in \mathbb{R}^n$ 还是一致的.

我们因此可以断言:

定理 23. (定理 19 的逆命题) *若广义函数列 T_j 在 $(\mathscr{D}')$ 中收敛于 0, 则对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意相对紧开子集 Ω, 存在指标 p 使得 T_j 可在 Ω 中表示成连续函数的 D^p 阶导数, 并且这些连续函数在 $\mathbb{R}^n$ 中一致收敛于 0.*

在具有有界或可数滤子基的滤子的情形也是如此, 但对任意的滤子显然不对.

特别地, 连续依赖有限多个实参数 λ_ν 的广义函数 $T \in (\mathscr{D}')$, 当 x 跑遍 $\mathbb{R}^n$ 的相对紧开集 Ω 而 λ_ν 保持有界时, 等于连续依赖 x, λ_ν 的函数 F 的导数 $D^p_x F(x; \lambda_\nu)$.

定理 21, 定理 22, 定理 23 将会在第 6 章 (定理 22, 定理 23) 中被重新证明.

§7. 具有紧支集的广义函数

当 φ 的支集任意时 $T(\varphi)$ 的定义 设 T 为广义函数且其支集为紧集 K_0. 设 φ 为无穷可导函数但其支集任意; 若 $\alpha \in (\mathscr{D})$ 在 K_0 的一个紧邻域上等于 1, 则显然 $T(\alpha\varphi)$ 依赖 φ 但不依赖 α; 因为若 $\alpha, \beta \in (\mathscr{D})$ 在 K_0 的某个紧邻域上等于 1, 则 $(\alpha - \beta)\varphi$ 的支集落在 K_0 的余集中, 从而

$$T(\alpha\varphi) - T(\beta\varphi) = T[(\alpha - \beta)\varphi] = 0\,. \tag{3.7.1}$$

若 φ 的支集为紧集, 则线性型 $T(\alpha\varphi)$ 与 $T(\varphi)$ 重合; 无论 φ 的支集是否为紧, 我们都将 $T(\alpha\varphi)$ 记作 $T(\varphi)$. 于是从今以后, 若 T 的支集为紧集, 则当 φ 无穷可导而支集任意时 $T(\varphi)$ 有定义; 且 $T(\varphi)$ 仅依赖于 φ 在 K_0 的邻域内的值.

特别地, 可取 $\varphi \equiv 1$; 而 $T(1)$ 被称为 T 的积分, 通常被记作 $\iint \cdots \int T$. 若 T 为测度 μ 或 (支集为紧集的) 函数 f, 则有

$$\iint \cdots \int T = \iint \cdots \int d\mu \quad 或 \quad \iint \cdots \int T = \iint \cdots \int f(x)\,dx\,. \tag{3.7.2}$$

可注意到, 若 T 是一个具有紧支集的广义函数的导数, 则其积分为零:

$$T(1) = D^p S(1) = (-1)^{|p|} S(D^p 1) = 0\,. \tag{3.7.3}$$

定理 24. *若 T 为有紧支集 K_0 的广义函数, 则存在 $m \geqslant 0$ 使得当 φ_j 支集任意但其本身及其阶不大于 m 的导数在 K_0 的邻域上一致趋于 0 时 $T(\varphi_j)$ 趋于 0.*

事实上, 由假设可知 $\alpha\varphi_j$ 及其阶不大于 m 的导数一致趋于 0, 且它们的支集包含在某个固定紧集中, 从而根据定理 20, 当 m 选取得充分大时, 这些 $T(\alpha\varphi_j) = T(\varphi_j)$ 趋于 0. 该定理表明, 任何一个具有紧支集的广义函数的阶均有限, 并且它的阶正好等于在该定理中所能出现的最小的 m.

空间 $(\mathscr{E})$ 与 $(\mathscr{E}')$ 设 $(\mathscr{E})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上无穷可导 (支集任意的) 函数 φ 组成的向量空间; 称 φ_j 在 $(\mathscr{E})$ 中收敛于 0, 若它们本身及其各阶导数均在任意的紧集上一致收敛于 0, 由此我们在 $(\mathscr{E})$ 上赋予了一个拓扑. 原点 0 在 $(\mathscr{E})$ 中的一个基本邻域系可由

$$V(K;m;\varepsilon)=\left\{\varphi\in(\mathscr{E})\ :\ \sup_{x\in K}|D^p\varphi(x)|\leqslant\varepsilon,\ |p|\leqslant m\right\}$$

给出 (K 为紧集, $m\geqslant 0$ 为整数, $\varepsilon>0$). 定义该拓扑的一组半范由 $N(K;m)$ 构成:

$$N(K;m)(\varphi)=\sup_{\substack{x\in K\\ |p|\leqslant m}}|D^p\varphi(x)|\,.$$

空间 $(\mathscr{E})$ 为局部凸, 完备且有可数邻域基: 它因此是 Fréchet 空间. 空间 $(\mathscr{E})$ 中的有界集为函数 φ 的集合, 使得对任意指标 p, 这些 $|D^p\varphi|$ 在任意紧集 K 上一致有界.

显然, 具有紧支集 K_0 的广义函数 T 在 $(\mathscr{E})$ 上定义了一个连续线性型, 也就是说它是 $(\mathscr{E})$ 的对偶 $(\mathscr{E}')$ 中的元素.

反过来, 假设 $L(\varphi)$ 为 $(\mathscr{E})$ 上的连续线性型. 由于 $(\mathscr{D})$ 为 $(\mathscr{E})$ 的向量子空间, 因此上述线性在 $(\mathscr{D})$ 上定义了一个线性型 $L(\varphi)$. 若 φ_j 在 $(\mathscr{D}_K)$ 中收敛于 0, 则它在 $(\mathscr{E})$ 中也收敛于 0, 从而 $L(\varphi_j)$ 收敛于 0: 于是 L 为 $(\mathscr{D})$ 上的连续线性型, 从而存在广义函数 $T\in(\mathscr{D}')$ 使得, 对任意 $\varphi\in(\mathscr{D})$, 成立

$$L(\varphi)=T(\varphi)\,. \tag{3.7.4}$$

又 T 必有紧支集 K_0; 否则将可找到一列函数 $\varphi_\nu\in(\mathscr{D})$ 使得

$$\begin{cases}\varphi_\nu(x)\equiv 0\,, & 若\quad |x|\leqslant\nu\,,\\ T(\varphi_\nu)=1\,,\end{cases}$$

而这是不可能的, 因为这些 φ_ν 将会在 $(\mathscr{E})$ 中收敛于 0 (它们的支集彼此无限远离), 从而 $L(\varphi_\nu)=T(\varphi_\nu)$ 也应收敛于 0.

又 $(\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{E})$ 中稠密: 对任意 $\varphi\in(\mathscr{E})$, 可找到 $\varphi_j\in(\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{E})$ 中收敛于 φ 且在 K_0 的一个紧邻域上等于 φ; 于是 $L(\varphi_j)$ 收敛于 $L(\varphi)$, 但 $T(\varphi_j)=T(\varphi)$, 因此对于任意的 $\varphi\in(\mathscr{E})$, 我们有 (3.7.4). 从而:

空间 $(\mathscr{E})$ 与 $(\mathscr{E}')$ 之间的对偶

定理 25. *具有紧支集的广义函数所组成的空间等于 $(\mathscr{E})$ 的对偶 $(\mathscr{E}')$.*

我们自然可以在 $(\mathscr{E}')$ 上构造 $(\mathscr{E})$ 的对偶拓扑; 该拓扑显然与 $(\mathscr{D}')$ 在 $(\mathscr{E}')$ 上所诱导的拓扑不同且比后者细: 赋予了对偶拓扑的 $(\mathscr{E}')$ 为完备空间, 但它带上 $(\mathscr{D}')$ 所诱导的拓扑后在 $(\mathscr{D}')$ 中稠密. 除非有相反的特别说明, 空间 $(\mathscr{E}')$ 将总是被赋予由 $(\mathscr{E})$ 中有界集所定义的对偶拓扑.

对 $(\mathscr{E})$ 和 $(\mathscr{E}')$ 可以毫无困难地证明那些已对 $(\mathscr{D})$ 和 $(\mathscr{D}')$ 证明过的类似定理. 特别地, 可以证明 $(\mathscr{E})$ 和 $(\mathscr{E}')$ 为自反空间, 并且每一个均是另外一个的对偶; 它们均为有界型 (和桶型) Montel 空间.

设 B' 为 $(\mathscr{E}')$ 的有界集; 根据一个类似于定理 9. a) 的定理可知, 在 $(\mathscr{E})$ 中存在原点 0 的邻域 $V(m;K;\varepsilon)$ 使得所有广义函数 $T\in B'$ 都在它上面被 1 界住 [这只是在简单地表述这样一个事实, 由于 $(\mathscr{E})$ 为 Fréchet 空间, 因此为桶型, 从而 $(\mathscr{E}')$ 的任意有界集均为等度连续]. 于是每个 $T\in B'$ 在开集 $\complement K$ 中为零 [因为若 φ 的支集包含在 $\complement K$ 中, 则对任意 k, 都有 $k\varphi\in V(m;K;\varepsilon)$]; 故其支集包含在 K 中. 将 $(\mathscr{E}')$ 中支集包含在 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集 K 中的所有广义函数组成的向量子空间记作 $(\mathscr{E}'_K)$, 则 $(\mathscr{E}')$ 为这些 $(\mathscr{E}'_K)$ 的并集且 $(\mathscr{E}')$ 的任意有界集包含在某个 $(\mathscr{E}'_K)$ 中; 因此 $(\mathscr{E}')$ 中有界集为包含在某个 $(\mathscr{E}'_K)$ 中的 $(\mathscr{D}')$ 的有界集. 对任意收敛的序列以及基有界或可数的收敛滤子也是如此.

最后 $(\mathscr{E}')$ 为那些 $(\mathscr{E}'_K)$ 的正向拓扑极限. 因为 $(\mathscr{E}')$ 与这个正向极限具有同样的有界集, 即那些 $(\mathscr{E}'_K)$ 中的有界集①; 而正向极限拓扑是诱导那些 $(\mathscr{E}'_K)$ 上的拓扑的最细的局部凸拓扑, 因此按理说要比 $(\mathscr{E}')$ 的拓扑细; 但 $(\mathscr{E}')$ 为自反 Fréchet 空间的对偶, 故为有界型②, 从而具有与其有界集相容的最细局部凸拓扑, 进而 $(\mathscr{E}')$ 的拓扑要比正向拓扑极限细, 因此这两个拓扑相等.

我们自然可将本节开始处所使用的方法加以推广. 对于广义函数 T 以及任意的无穷可导函数 φ, 若 T 的支集与 φ 的支集的交为紧集 K_0, 则我们总可以定义 $T(\varphi)$. 设 $\alpha\in(\mathscr{D})$ 为在 K_0 的某个紧邻域上等于 1 的函数, 并令 $T(\varphi)=T(\alpha\varphi)$. 上式中的第二项不依赖 α 的选择; 事实上, 若 α 和 β 为属于 $(\mathscr{D})$ 的两个函数且在 K_0 的某个紧邻域上等于 1, 那么我们有 (3.7.1), 这是因为 $(\alpha-\beta)\varphi$ 的支集包含在 φ 的支集中, 但也包含在 $\alpha-\beta$ 的支集中, 而后者包含在 K_0 的余集中, 故落在 T 的支集之外.

具有紧支集的广义函数的结构 关于支集为紧集、在整个空间 $\mathbb{R}^n$ 上从整体性的角度来考虑的广义函数的结构, 我们现在来给出若干定理.

定理 26. *具有紧支集 K_0 的任意广义函数 T, 可在整个空间 $\mathbb{R}^n$ 上以无穷多种方式表示成支集包含在 K_0 的任意邻域 U 中的连续函数的导数的有限和.*

事实上, 由定理 21 可知, 若 Ω 为 K_0 的邻域且其闭包 $\overline{\Omega}$ 为紧集并包含在 U 中, 则 T 在 Ω 上等于一个支集包含在 U 中的连续函数的导数 D^pG.

若 φ 的支集落在 Ω 中, 则我们有:

$$T(\varphi)=(-1)^{|p|}\iint\cdots\int GD^p\varphi\,dx\,. \tag{3.7.5}$$

① 见 Bourbaki [6], 第 18 分册, 命题 8, p. 8.

② Grothendieck [4], 定理 7, p. 73.

设 $\alpha \in (\mathscr{D})$ 在 K_0 的某个邻域上等于 1 且其支集落在 Ω 中. 则对任意 $\varphi \in (\mathscr{E})$,

$$T(\varphi) = T(\alpha\varphi) = (-1)^{|p|} \iint \cdots \int G D^p(\alpha\varphi)\, dx\,. \tag{3.7.6}$$

由 Leibniz 公式可知 $D^p(\alpha\varphi)$ 为如下形式的线性组合

$$D^\alpha \varphi = \sum_{q \leqslant p} \mathrm{C}_p^q\, D^{p-q}\alpha D^q \varphi\,, \tag{3.7.7}$$

从而就有

$$T(\varphi) = (-1)^p \sum_{q \leqslant p} \iint \cdots \int (\mathrm{C}_p^q\, G D^{p-q}\alpha) D^q \varphi\, dx\,, \tag{3.7.8}$$

也即

$$T = \sum_{q \leqslant p} D^q[(-1)^{|q+p|} \mathrm{C}_p^q\, G D^{p-q}\alpha] = \sum_{q \leqslant p} D^q G_q\,, \tag{3.7.9}$$

而那些函数 $G(x) D^{p-q}\alpha(x)$ 的支集均包含在 U 中.

由所采用的证明可得, 对于 $(\mathscr{E}')$ 中广义函数的有界集或在 $(\mathscr{E}')$ 中收敛于 0 的广义函数列, 我们可以让 p 固定并使得那些函数 G_p 有界或一致收敛于 0.

定理 27. *阶不大于 m、支集为紧集 K_0 的广义函数是一些测度的阶不大于 m 的导数的有限和, 其中可选取测度的支集包含在 K_0 的任意邻域 U 中; 反之亦然.*

逆命题是显然的; 我们现在来证明该定理. 另外回顾一下, 称 T 为阶不大于 m 的广义函数, 若它属于 $(\mathscr{D}'^m)$; 为此, 只需它在 K_0 中每点邻域内的阶不大于 m. 设 V 为包含 K_0 的开集且 $\overline{V} \subset U$. 对每个函数 $\varphi \in (\mathscr{E})$, 我们与之对应一个 $\overline{V}$ 上的 N_m 元连续函数系: $\psi_p = D^p\varphi$, $|p| \leqslant m$. 函数系 $\{\psi_p\}$ 由 φ 确定且反过来在 $\overline{V}$ 上确定 φ, 因为 $\varphi = \psi_0$. 与 $\varphi \in (\mathscr{E})$ 相对应的 $\{\psi_p\}$ 并不是 $\overline{V}$ 上随便的一个 N_m 元连续函数系; 当 φ 跑遍 $(\mathscr{E})$ 时, 它跑遍 $\overline{V}$ 上 N_m 元连续函数系空间 Γ^{N_m} 的一个向量子空间 (Δ). 空间 Γ^{N_m} 为 N_m 个与 $\overline{V}$ 上的连续函数空间 Γ 同构的空间的乘积. 由此可知, 若 T 的阶不大于 m, 则 $T(\varphi)$ 为 $\{\psi_p\} \in (\Delta) \subset \Gamma^{N_m}$ 的线性型 $L(\{\psi_p\})$. 在 Γ 上引入 $\overline{V}$ 上的一致收敛拓扑, 且在 Γ^{N_m} 上引入积拓扑; 若 $\overline{V}$ 上的 N_m 元连续函数系在紧集 $\overline{V}$ 上一致收敛于 0, 则这些函数收敛于 0. 另外, 若与 φ 对应的 $\{\psi_p\}$ 在 Γ^{N_m} 中收敛于 0, 则 $T(\varphi)$ 收敛于 0; 因此 $L(\{\psi_p\})$ 为 (Δ) 上的连续线性型. 则据 Hahn – Banach 定理, 它可被延拓成 Γ^{N_m} 上的连续线性型. 而 Γ 上的连续线性型是一个测度 μ 且其支集包含在 $\overline{V} \subset U$ 中; 从而 Γ^{N_m} 上的连续线性型为这样的测度 μ_p 的 N_m 元组. 于是

$$T(\varphi) = L(\{\psi_p\}) = \sum_p \mu_p(\psi_p) = \sum_p \mu_p(D^p\varphi)\,, \tag{3.7.10}$$

也就是说

$$T=\sum_{p}(-1)^{|p|}D^{p}\mu_{p}\,. \tag{3.7.11}$$

大家也许会试图从两个角度来改进定理 26 和定理 27:

1° 将"... 的导数的有限和"换成"一个函数 (或测度) 的导数". 虽然我们可以这样做, 但该函数或测度一般不会有紧支集, 由此失去任何价值. 例如, 对于 $n=1$, 广义函数 $\delta+\delta'$ 有紧支集, 但我们却不能将之表示成 $\frac{d^p}{dx^p}\mu$, 其中测度 μ 有紧支集. 因为 μ 在原点 0 之外应为一个次数不大于 $p-1$ 的多项式, 因而只有在原点 0 之外为零时才会有紧支集, 此时它与 δ 成比例; 但我们却不可能有 $k\frac{d^p}{dx^p}\delta=\delta+\delta'$.

2° 将"支集包含在 K_0 的任意邻域内"换成"支集包含在 K_0 中". 可以证明, 当 K_0 为任意时, 这样的推广是不可能的. 但若 K_0 为足够正则的紧集, 则可证明, 若 T 的阶不大于 m 且其支集包含在 K_0 中, 则它为支集包含在 K_0 中的测度的阶不大于 m' 的导数的和, 其中 $m'\geqslant m$ 依赖 K_0 的性质, 但却不依赖 T (见定理 34).

定理 28. *若阶不大于 m 的广义函数 T 有紧支集 K_0, 则只要 $\varphi\in(\mathscr{E})$ 及其阶不大于 m 的导数在 K_0 上为零就有 $T(\varphi)=0$.*

该定理很有趣, 因为它仅仅涉及 φ 及其各阶导数在 K_0 上, 而不再是在 K_0 的任意邻域上的值.

我们将证明 φ 在 K_0 的一些邻域上等于函数 ψ_d, 且当 d 趋于 0 时, 这些函数及其阶不大于 m 的导数在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于 0.

令 V_d 为与 K_0 的距离不大于 d 的点的集合. 由于 φ 的 m 阶导数在 K_0 上为零; 故对任意 $\eta>0$, 当 d 足够小时, 它们在 V_d 上的模都不大于 η. 现在在点 $x\in V_d$ 处考虑阶小于 m 的导数; 它可通过将其微分沿连接 K_0 中的点 x_0 到 x 的折线逐次积分得到; 事实上, 由于 φ 的阶不大于 m 的导数在 K_0 上为零, 故对于 $|p|<m$,

$$D^{p}\varphi(x)=\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}D^{p}\varphi(t)\right]dt_1+\cdots+\left[\frac{\partial}{\partial t_n}D^{p}\varphi(t)\right]dt_n\,. \tag{3.7.12}$$

对 $x\in V_d$, 选取与 x 的距离不大于 d 的 x_0, 则对 $|p|=m-1,m-2,\ldots$, 依次有

$$|D^{p}\varphi(x)|\leqslant\left(d\sqrt{n}\right)^{m-|p|}\eta\,. \tag{3.7.13}$$

若 $\alpha\in(\mathscr{D})$ 在 K_0 的某个邻域上等于 1, 则对任意 $\varphi\in(\mathscr{E})$, 均有 $T(\varphi)=T(\alpha\varphi)$. 我们将以如下方式来确定 α.

首先设 $\beta_d(x)$ 为取值介于 0 和 1 之间的连续函数, 在 $V_{d/2}$ 上等于 1, 而在 $V_{3d/4}$ 之外等于 0. 我们将用第 1 章定理 1 中所定义的那些函数 $\rho_\varepsilon(x)$ 来将它正则化.

令

$$\alpha_d = \beta_d * \beta_{d/4}, \tag{3.7.14}$$

则 $\alpha_d \in (\mathscr{D})$ 且其取值介于 0 和 1 之间; 它在 $V_{d/4}$ 上等于 1, 而在 V_d 之外等于 0.

现在估计 α_d 的各阶导数的上界:

$$(3.7.15)\quad \begin{cases} \qquad D^p\alpha_d = \beta_d * D^p\rho_{d/4}, \\ \text{从而} \\ |D^p\alpha_d| \leqslant \iint\cdots\int |D^p\rho_{d/4}|\,dx \\ \qquad = \iint\cdots\int \frac{1}{\left(\frac{d}{4}\right)^n}\frac{1}{\left(\frac{d}{4}\right)^{|p|}}\left|D^p\rho_1\left(\frac{x}{d/4}\right)\right|dx \\ \qquad = \left(\frac{4}{d}\right)^{|p|}\iint\cdots\int |D^p\rho_1(x)|\,dx. \end{cases}$$

最后, 由于 $|p| \leqslant m$, 因此存在一个通用常数 C_m 使得

$$|D^p\alpha_d| \leqslant \frac{C_m}{d^{|p|}}. \tag{3.7.16}$$

于是, 若令 $\psi_d = \alpha_d\varphi$, 则利用 Leibniz 公式

$$D^p\psi_d = \sum_{q\leqslant p} C_p^q (D^{p-q}\alpha_d) D^q\varphi \tag{3.7.17}$$

可估计 ψ_d 的各阶导数的上界. 事实上, 对于 $|p| \leqslant m$, 由 (3.7.13) 和 (3.7.16) 可得,

$$|D^p\psi_d| \leqslant C\sup_q \frac{1}{d^{|p-q|}}\,d^{m-|q|} \leqslant C\eta d^{m-|p|}, \tag{3.7.18}$$

其中 C 仅依赖于 m.

对任意的 d, 我们有 $T(\varphi) = T(\alpha_d\varphi) = T(\psi_d)$; 但若 d 进而 η 趋于 0, 则由 (3.7.18) 可得 ψ_d 的所有阶不大于 m 的导数一致收敛于 0, 从而由定理 24 可知 $T(\psi_d)$ 随着 d 收敛于 0; 这就证明了 $T(\varphi) = 0$.

然而, 需要指出的是, 即便 φ_j 及其各阶导数在 K_0 上一致收敛于 0, 但这并不能推出 $T(\varphi_j)$ 收敛于 0; 为此, 必须要求 φ_j 及其各阶导数在 K_0 的某个邻域上一致收敛于 0 (见定理 34).

例. 考虑由下列公式在 $\mathbb{R}^1$ $(n = 1)$ 上所定义的广义函数 T:

$$T(\varphi) = \lim_{m\to\infty}\left[\left(\sum_{\nu\leqslant m}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\right) - m\varphi(0) - (\log m)\varphi'(0)\right]. \tag{3.7.19}$$

其支集 K 为紧集: 它由点 $1/\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ 及其极限点 0 组成.

若 φ 在 K 上为零, 则 $\varphi'(0)=0$ 和 $T(\varphi)=0$. 反过来, 定义函数 $\varphi_j \in (\mathscr{D})$ 使得

$$\varphi_j(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{j}}, & \text{若 } x \geqslant \frac{1}{j}, \\ 0, & \text{若 } x \leqslant \frac{1}{j+1}.\end{cases} \tag{3.7.20}$$

当 $j\to\infty$ 时 $|\varphi_j|\leqslant \frac{1}{\sqrt{j}}$ 一致收敛于 0; 它的各阶导数均在 K 上为零. 然而

$$T(\varphi_j)=\frac{j}{\sqrt{j}}=\sqrt{j}\to+\infty. \tag{3.7.21}$$

§8. 广义函数的整体结构

在闭包非紧的开集 Ω 中, 特别是在 $\mathbb{R}^n$ 中, 广义函数通常不是一个函数的导数.

$$\left(\text{例如: } T=\sum_\nu \frac{d^\nu}{dx^\nu}\delta_{(x_\nu)}, \text{ 其中序列 } x_\nu \text{ 趋于 } +\infty\right).$$

定理 29. 若 $\{\Omega_\nu\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 Ω_ν 组成的广义函数 T 的支集 F 的开覆盖, 则可将 T 分解成一个局部有限、收敛的无限和

$$T=\sum_\nu T_\nu, \tag{3.8.1}$$

其中 T_ν 的支集包含在交集 $\Omega_\nu\cap F$ 中.

事实上, 若将 F 的余集 Ω_0 添加到 $\{\Omega_\nu\}$ 中, 则得 $\mathbb{R}^n$ 的一个开覆盖. 设 $\{\alpha_\nu\}$ 为从属于该覆盖的一个单位分解 (第 1 章定理 2). 令

$$T_\nu(\varphi)=T(\alpha_\nu\varphi). \tag{3.8.2}$$

显然 $T_0(\varphi)=T(\alpha_0\varphi)=0$. 而 T_ν 为广义函数且其支集 F_ν 包含于交集 $\Omega_\nu\cap F$ 中. 又

$$\sum_\nu \alpha_\nu(x)\equiv 1,$$

故无限和 $\sum_\nu T_\nu$ 收敛 (当 $\nu\to+\infty$ 时 T_ν 的支集彼此无限远离), 且 $T=\sum_\nu T_\nu$.

除非 F 的每点均包含在唯一一个开集 Ω_ν 中, 否则总有无穷多个分解 (3.8.1).

定理 30. 任意广义函数 T 可被分解成连续函数的导数的一个收敛的无限和

$$T=\sum_j D^{p_j}G_j, \tag{3.8.3}$$

这些函数的支集为紧集, 彼此无限远离, 且包含在 T 的支集 F 的任意邻域 U 内.

为此, 将前面的定理应用于相对紧集 Ω_ν. 每个广义函数 T_ν 有紧支集 F_ν, 因此根据定理 26, 它可被分解成一些连续函数的导数的有限和, 这些函数的支集可被选取包含在 F_ν 的任意邻域中, 特别地可包含在 U 中. 由此可得公式 (3.8.3).

定理 31. 若广义函数在开集 Ω 上的阶不大于 m, 则它在 Ω 上等于一些测度的阶不大于 m 的导数的有限和; 反之亦然.

为此重新考虑关于相对紧集 Ω_ν 的分解 (3.8.1), 由此得到的每个广义函数 T_ν 的阶均不大于 m 且有紧支集; 故由定理 27, 它是一些测度的阶不大于 m 的导数之和

$$T = \sum_{|p|\leqslant m} D^p \mu_{p,\nu}\,, \tag{3.8.4}$$

将所有具有相同指标 p 的导数合在一起, 可得

$$\mu_p = \sum_\nu \mu_{p,\nu}\,, \tag{3.8.5}$$

$$T = \sum_p D^p \mu_p\,. \tag{3.8.6}$$

评注. 对于 $n=1$, 在直线上, 可将有限和换成唯一一项. 见定理 21 的推论.

定理 32. 若 $\{F_\nu\}$ 为有限或可数多个闭集组成的 $\mathbb{R}^n$ 的覆盖, 则任意一个广义函数 T 均有如下形式的分解

$$T = \sum_\nu T_\nu\,, \tag{3.8.7}$$

其中 T_ν 的支集包含在 F_ν 中.

为此, 应用公式 (3.8.3). 我们可将该公式中的每个函数 G_j 分解成和式

$$G_j = \sum_\nu G_{j,\nu}\,, \tag{3.8.8}$$

其中 $G_{j,\nu}$ 的支集包含在 F_ν 中 (函数 $G_{j,\nu}$ 一般不连续). 由此可见, 每个和式 (3.8.8) 在 L^∞ 中弱收敛 (因为这些 F_ν 构成了一个可数覆盖), 故也在 $(\mathscr{D}')$ 中弱收敛. 从而

$$T = \sum_{j,\nu} D^{p_j} G_{j,\nu}\,, \tag{3.8.9}$$

第二项中的和式收敛, 因为在任意的相对紧开集中, 它为有限多个收敛的级数之和. 我们因此有 (3.8.7), 并且

$$T_\nu = \sum_j D^{p_j} G_{j,\nu}\,. \tag{3.8.10}$$

该定理包含定理 29 作为其特例, 且比后者更为精细.

定理 32 会让人认为若广义函数 T 的支集为闭集 F, 而 $\{F_\nu\}$ 为 F 的一个局部有限闭覆盖, 则 T 可表示为 $\sum_\nu T_\nu$, 其中 T_ν 的支集包含在 F_ν 中; 但事实并非如此. 因为证明中所涉及的 G_j 的支集不一定包含在 F 中, 而是在 F 的一个任意邻域中.

若支集 F 足够正则, 则可以证明这样的分解是可能的. 见定理 34.

定理 33. *若 φ 本身及其各阶导数均在 T 的支集上为零, 则 $T(\varphi)$ 为零.*

为此应用公式 (3.8.1). 其中 T_ν 的支集为紧集且包含在 T 的支集中; 故 φ 及其各阶导数在 T_ν 的支集上为零, 由定理 28 可知 $T_\nu(\varphi)=0$, 进而 $T(\varphi)=0$.

若 T 在 $\mathbb{R}^n$ 中阶不大于 m, 则当 φ 的阶不大于 m 的导数在 T 的支集上为零时

$$T(\varphi)=0\,.$$

§9. 正则支集

在本章中我们已多次遇到这样的一些性质, 所涉及的不是广义函数 T 的支集 F, 而是该支集的一个任意邻域. 若 F 足够"正则", 则我们可以改进这些性质将 F 的邻域换成 F 本身.

我们称闭集 F 正则, 若对任意的 $x_0\in F$, 均存在 $d>0$, $\omega\geqslant 0$, 以及整数 $q\geqslant 1$ 使得 F 中任意两个与 x_0 的距离至多为 d 的点 x,x', 可由一条位于 F 中的可求长曲线来连接, 该曲线的长度 L 至多等于 ω 乘以它们之间距离的 q 次方, 即

$$L\leqslant \omega|x'-x|^{1/q}\,. \tag{3.9.1}$$

对于 F 中的任意点 x_0, 我们将总是取 $q(x_0)$ 为使得这样的不等式成立的最小 q. 则 $x_0\to q(x_0)$ 为上半连续 (整数值) 函数. 对于 F 的任意紧集 K, 令

$$q(K)=\sup_{x_0\in K} q(x_0)<+\infty\,.$$

正则集的概念源于 Whitney 先生的工作[①]. 对于正则集 F, 我们所要证明的主要性质如下 (性质 W):

设 K 为 F 的紧子集而 U 为 K 的紧邻域. 则存在数 k (仅依赖 F,K,U,m) 具有如下性质: 对于 $\mathbb{R}^n$ 上的任意 $m'\geqslant q(K)m$ 阶连续可微函数 φ, 若其阶不大于 m' 的导数的模在 F 上不大于 M, 则在 $\mathbb{R}^n$ 上存在 m' 阶连续可微函数 ψ, 其阶不大于 m 的导数与 φ 的对应阶导数在 K 上重合, 且它在 U 上的模不大于 kM.

---

① WHITNEY [3]. Whitney 先生的性质 P 不完全是这里所指的性质, 也不完全对应于同一问题. 本书第一版中性质 W 的叙述是错的, 因为它是整体而非局部的, 而 $x_0\in F$ 时 $q(x_0)$ 不一定有界. 第 9 节中的那些性质在 Glaeser 先生的一个即将发表的工作中得到更为详细的研究.

提请大家注意, 凸闭集为正则集. 正则集为局部弧连通集, 且对于任意的紧集, 仅有有限多个弧连通分支与该紧集相交.

虽然正则性条件足以保证下列定理成立, 但该条件可能不是必要的; 不管怎样, 正如大家可以很容易地看到, 由两条具有无穷阶触点的曲线组成的集合在触点处不正则, 对于该集合, 我们将留给读者自己来验证下述性质中的任何一条均不成立:

定理 34. 1° 如果阶为 m 的广义函数 T 具有正则紧支集 K_0 并且 $m' \geqslant q(K_0)m$, 则 $\varphi_j \in (\mathscr{E})$ 及其阶不大于 m' 的导数在 K_0 上一致趋于 0 时 $T(\varphi_j)$ 趋于 0 (定理 24).

2° 支撑在正则闭集 F_0 上的任意广义函数 T, 均被分解成支撑在 F_0 上的测度的导数的一个无穷收敛和 (有限和, 若 F_0 为紧集)

$$T = \sum_j D^{p_j}\mu_j \quad (\text{参见定理 27 和定理 30}). \tag{3.9.2}$$

3° 若 F 为正则集, 而 $\{F_\nu\}$ 为有限或可数多个闭集所组成的 F 的覆盖, 则支撑在 F 上的任意广义函数 T 均可被分解成一个有限或收敛的无限和

$$T = \sum_\nu T_\nu, \tag{3.9.3}$$

其中 T_ν 的支集包含在 F_ν 中 (参见定理 32).

§10. 支集包含在某个子流形中的广义函数的结构

具有点状支集的广义函数 **定理 35.** 支撑在原点上的任意广义函数, 均可以被唯一分解成 Dirac 测度的导数的有限线性组合:

$$T = \sum_{|p|\leqslant m} c_p D^p\delta, \quad \text{其中 } c_p \text{ 为复值常数}. \tag{3.10.1}$$

事实上, 原点为正则支集, 因此只需应用定理 34. 2°; 而以原点为支集的任意测度均与 Dirac 测度成比例.

可不用 Whitney 先生的精细理论而借助定理 28 给出证明. 若 T 的阶不大于 m, 则当 φ 本身及其阶不大于 m 的导数在原点为零时 $T(\varphi) = 0$. 对于 $\varphi \in (\mathscr{D})$,

$$\varphi(x) = \sum_{|p|\leqslant m} \frac{x^p}{p\,!} D^p\varphi(0) + R_m(x), \tag{3.10.2}$$

其中 R_m 的阶不大于 m 的导数均在点 0 处为零. 于是 $T(R_m) = 0$, 进而

$$T(\varphi) = \sum_{|p|\leqslant m} \frac{D^p\varphi(0)}{p\,!} T(x^p) = \sum_{|p|\leqslant m} (-1)^{|p|} c_p\, D^p\varphi(0), \tag{3.10.3}$$

而这正等价于 (3.10.1).

上述分解唯一. 因为若 $T = 0$, 则 $T(x^p) = 0$, 这就在公式 (3.10.1) 中给出 $c_p = 0$.

我们将推广上述公式.

支集为 $\mathbb{R}^n$ 的向量子空间的广义函数

为简化记号, 将 $\mathbb{R}^n$ 看成乘积 $X^h \times Y^k$, $h+k=n$, 并将 $\mathbb{R}^n$ 中的点表示成 (x,y), 其中 $x=(x_1,\ldots,x_h)\in X^h$, $y=(y_1,\ldots,y_k)\in Y^k$. 我们将寻求由点 $(x,0)$ 组成的向量子空间 $X^h\times 0$ 所支撑的 $\mathbb{R}^n$ 上的广义函数 T 的一般表达式. 将用 T_x, T_y, $T_{x,y}$ 来分别表示 X^h, Y^k, $\mathbb{R}^n$ 上的广义函数.

根据第 1 章第 5 节 (3°) 中的说明, 函数 $\bar{\varphi}(x,y)\in(\mathscr{D})_{\mathbb{R}^n}$ 在 X^h 上的限制 φ 为函数 $\varphi(x)=\bar{\varphi}(x,0)$; 而 X^h 上的广义函数 T 在 $\mathbb{R}^n$ 上的延拓 $\overline{T}$ 被定义为

$$\overline{T}_{x,y}.\,\varphi(x,y)=T_x.\,\varphi(x,0)\,, \tag{3.10.4}$$

其中 $\bar{\varphi}(x,y)\in(\mathscr{D})_{\mathbb{R}^n}$. 在下面将用 q 表示关于变量 y 的求导指标 $q=(q_1,q_2,\ldots,q_k)$; 这就是我们所称的关于向量子空间 $X^h\times 0$ 的横截求导.

定理 36. 支集包含在向量子空间 $X^h\times 0$ 中的任意广义函数 $T_{x,y}$ 可被唯一分解成定义在 X^h 上的广义函数在 $\mathbb{R}^n$ 上的延拓的横截导数的局部有限线性组合:

$$T_{x,y}=\sum_q D_y^q(\overline{T}_q)_{x,y}\,,\quad (T_q)_x\in(\mathscr{D}')_{X^h}\,, \tag{3.10.5}$$

其中每个广义函数 T_q 连续依赖 T, 且其支集包含在 T 的支集中.

为此, 假设存在分解 (3.10.5); 则它必唯一, 因为若令

$$\varphi_q(x,y)=\psi(x)\frac{y^q}{q!},\quad \psi\in(\mathscr{D})_{X^h}\,,$$

则 φ_q 的支集与 T 以及那些 $\overline{T}_q$ 的支集的交集均为紧集, 且

$$T_{x,y}.\,\varphi_q(x,y)=(-1)^{|q|}\big(T_q\big)_x.\,\psi(x)\,, \tag{3.10.6}$$

而这就完全确定了 T_q. 反过来, 由该公式确定的 T_q 连续依赖 T 且其支集包含在 T 的支集中; 对任意相对紧开集 Ω, 若 T 在 Ω 中的阶不大于 m, 则 $|q|>m$ 时 $\overline{T}_q$ 在 Ω 中为零, 因为 φ_q 本身及其阶不大于 m 的导数均在 T 的支集上为 0 (定理 28); 最后, 对于支集包含在 Ω 中的任意 $\varphi(x,y)\in(\mathscr{D})_{\mathbb{R}^n}$, 我们有

$$\varphi(x,y)=\sum_{|q|\leqslant m}\frac{y^q}{q!}D_y^q\varphi(x,0)+R_m(x,y)\,, \tag{3.10.7}$$

由此可得

$$T.\,\varphi=\sum_{|q|\leqslant m}D_y^q(\overline{T}_q)_{x,y}.\,\varphi+T.\,R_m\,, \tag{3.10.8}$$

这正好等价于 (3.10.5), 因为 $T.\,R_m=0$, 且当 $|q|>m$ 时 $T_q=0$.

诸如 $D_y^q\overline{T}_q$ 这样的广义函数, 就是所谓的阶为 $|q|+1$ 的多层.

支撑在无穷可微流形 V^n 的正则浸入子流形 U^h 上的广义函数 在 V^n 中, 我们假设在 U^h 的邻域上定义了 $k = n - h$ 个"关于 U^h 横截的独立"一阶求导 $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_k$, 且两两交换 (它们的中括号为零 [①]). 因此可局部地将 V^n, U^h 分别拉到 $\mathbb{R}^n, X^h$ 上, 而那些 ∂ 则变成了求导 $\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_k}$. 令 $\partial^q = \partial_1^{q_1}\partial_2^{q_2}\cdots\partial_k^{q_k}$, 则由变量替换可得下述结论 (该定理可从局部的角度来证明):

定理 37. 支撑在流形 U^h 的任意广义函数 T 可被唯一分解成定义在 U^h 上的广义函数在 V^n 上的延拓的横截导数的局部有限线性组合:

$$T = \sum_q \partial^q \overline{T}_q\,, \quad T_q \in (\mathscr{D}')_{U^h}\,. \tag{3.10.9}$$

例. 设 $V^n = \mathbb{R}^n$; $U^h = S^{n-1}$ 为方程 $r = 1$ 所定义的球面; 而 $\partial = \partial/\partial r$; 则对于支撑在 S^{n-1} 上的任意广义函数 T, 我们有唯一的有限分解:

$$T = \sum_{|q|\leqslant m} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^q \overline{T}_q\,. \tag{3.10.10}$$

若现在广义函数 T 支撑在触点的阶有限的多个子流形的并集上, 定理 34. 3°) 使我们可以将之分解成支撑在这些子流形上的广义函数之和, 由此可得 T 的一般表达式; 但分解没有唯一性, 这是因为支集包含在两个子流形的交集中的任意广义函数, 可被看成是支撑在上述两个子流形当中的任何一个上, 而这不会产生丝毫的差别. 我们将不在这里详细讨论此问题; 该问题很棘手, 是 Lojasiewicz [1] 的研究主题, 与除法问题有关 [②].

在 V^n 中, 可能会在 U^h 的任何邻域上都找不到求导运算 ∂. 一般地, 在局部上可以很容易地找到求导运算 ∂, 因此我们仅会在局部上有公式 (3.10.9). 由坐标变换公式立刻可知, 在一个开集上, 使得 $T_q \neq 0$ 的最大阶 $|q|$ 不依赖求导运算的选取. 我们可将之称为 T 的横截阶. 借助势论的语言, 横截阶不大于 m 的广义函数也就是所谓的"支撑在 U^h 上的阶不大于 $m+1$ 的多层".

① 译者注: 即 $[\partial_i, \partial_j] = \partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i = 0$.

② 也见 SCHWARTZ [6], Malgrange 的报告 21.

第四章　广义函数的张量积

内容提要　本章的目的是为了定义两个广义函数的张量积[1], 以此推广两个测度的张量积. 若 S_x 和 T_y 分别为定义在为维数 m, n 向量空间 X^m, Y^n 上的两个广义函数, 则 $S_x \otimes T_y$ 为向量空间 $X^m \times Y^n$ 上的广义函数; 当 $S_x = f(x)$, $T_y = g(y)$ 为函数时, 张量积 $S_x \otimes T_y$ 就是函数 $f(x)g(y)$.

第 1 节研究 φ 依赖参数 λ 时 $T(\varphi)$ 对 λ 的变化关系. 该节推广了关于含参积分的连续性或可导性的一些已知结果.

在第 2, 3 节中, 我们借助下式定义了张量积

$$S_x \otimes T_y . \varphi(x, y) = S(u)T(v),$$

其中 $\varphi(x, y) = u(x)v(y)$ (4.3.1); 在第 4 节中, 我们给出了张量积的一些基本性质. 除了关于连续性的那个证明外 (定理 6, p. 78), 其余的都比较初等; 但在大多数时候, 大家也可仅满足于垂手可得的亚连续性.

在第 5 节中, 我们给出了几个容易的例子.

大家可以快速浏览本章, 其主要价值在于可用来定义卷积 (第 6 章第 2 节).

§1. 含参积分

问题的提出　本段将关于含参函数的积分的一些经典定理, 推广到广义函数.

设 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 而 $\varphi(x; \lambda)$ 为 x 以及参数 λ 的函数 (参数 λ 取遍某拓扑空间 Λ) 使得对于该参数的每个值, 当 φ 被看作 $x \in \mathbb{R}^n$ 的函数时, 属于 $(\mathscr{D})$.

[1] 在本书的第一版中被称为直积并被记作 $\times$, 而在这里则被称为张量积并被记作 $\otimes$.

若 T 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个固定广义函数, 则对每个 λ 的值都有确切定义的量

$$I(\lambda)=T(\varphi)\,, \tag{4.1.1}$$

是一个依赖于参数 λ 值得研究的广义积分. 在对 $T(\varphi)$ 的计算中, 为更好强调 φ 仅被看成是 x 的函数, 而 T 为定义在变量 x 所属空间 $\mathbb{R}^n$ 上的广义函数, 我们记

$$I(\lambda)=T_x[\varphi(x;\lambda)]\,. \tag{4.1.2}$$

关于参数的连续性　定理 1. 若当 λ 在 λ_0 的某个适当邻域内变化时 φ 的支集包含在 $\mathbb{R}^n$ 的一个固定紧集中, 且每个 (关于变量 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的) 偏导数 $D^p\varphi(x;\lambda)$ 均关于变量 x,λ 连续, 则在 $\lambda=\lambda_0$ 的邻域内 $T_x.\varphi(x;\lambda)$ 关于 λ 连续.

事实上, 由于 $D^p\varphi(x;\lambda)$ 关于 x,λ 连续, 则当 x 在一个紧集内变化时 $D^p\varphi(x;\lambda)$ 关于 λ 对 x 一致连续. 故 $\varphi(x;\lambda)$ 在拓扑空间 $(\mathscr{D})_x$ 中连续依赖 λ, 而 T_x 为 $(\mathscr{D})_x$ 上的连续线性型, 由此可得所要结论.

可微性　定理 2. 设 λ 为实或复参数. 若 λ 在 λ_0 的某个适当邻域内变化时 φ 的支集包含在 $\mathbb{R}^n$ 的某个固定紧集中, 而每一个导数 $D^p\varphi(x;\lambda)$ 关于 λ 有 (通常意义下的) 偏导数 $\frac{\partial}{\partial\lambda}D^p(x;\lambda)$ 且后者关于变量 $x\in\mathbb{R}^n,\lambda$ 连续, 则 $I(\lambda)=T_x.\varphi(x;\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 的邻域内关于 λ (在通常意义下) 可导, 且其导数可通过在"积分"符号下求导而得:

$$\frac{dI}{d\lambda}=T_x\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x;\lambda)\right)\,. \tag{4.1.3}$$

事实上,

$$\begin{aligned}\frac{I(\lambda+d\lambda)-I(\lambda)}{d\lambda}&-T_x\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x;\lambda)\right)\\&=T_x\left[\frac{\varphi(x;\lambda+d\lambda)-\varphi(x;\lambda)}{d\lambda}-\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x;\lambda)\right]\,.\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

当 $d\lambda\to 0$ 时, 由 $\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x;\lambda)$ 的连续性, 中括号里的函数在 $\mathbb{R}^n$ 的任意紧集上关于 x 一致趋于 0; 同样地, 由 $D^p\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x;\lambda)$ 的连续性, 中括号里那个关于 x 的函数的 D^p 阶导数在 $\mathbb{R}^n$ 的任意紧集上一致趋于 0; 又由于中括号里的那个关于 x 的函数的支集包含在 $\mathbb{R}^n$ 的某个固定紧集中, 因此它在 $(\mathscr{D})$ 中收敛于 0, 从而由线性型 T 的连续性可知当 $d\lambda$ 趋于 0 时, 等式中的第二项收敛于 0.

定理 2 自然在多参数以及对它们求偏导的情形也成立. 我们将用到的情形如下:

设 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$ 为 m 维向量空间 Λ^m 中的一点, 而 $\varphi(x;\lambda)$ 关于变量 x,λ (在通常意义下) 无穷可导, 且其各阶导数关于两变量 x,λ 连续, 则 $I(\lambda)=T_x.[\varphi(x;\lambda)]$

(在通常意义下) 关于 λ 无穷可导; 若 ∂_λ^q 为 Λ^m 中的求偏导符号

$$\partial_\lambda^q = \frac{\partial^{q_1+q_2+\cdots+q_m}}{\partial_{\lambda_1}^{q_1}\partial_{\lambda_2}^{q_2}\cdots\partial_{\lambda_m}^{q_m}},$$

则我们可以在积分号下求导

$$\partial_\lambda^q T_x[\varphi(x;\lambda)] = T_x[\partial_\lambda^q \varphi(x;\lambda)]\,. \tag{4.1.5}$$

§2. 两个广义函数的张量积

设 X^m, Y^n 为维数分别等于 m 和 n 的两个向量空间; 记 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ 为第一个空间中的点, 而 $y = (y_1, x_2, \ldots, y_n)$ 为第二个空间中的点. 若 $f(x)$ 为 X^m 上的数值函数, 而 $g(y)$ 为 Y^n 上的数值函数, 则我们所称的张量积 $f(x) \otimes g(y)$ 就是定义在积向量空间 $X^m \times Y^n$ 上变量为 x, y 的函数 $h(x,y) = f(x)g(y)$. 一个 m 元实变量 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 的函数与一个 n 元实变量 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 的函数的张量积因此是一个 $m+n$ 元实变量 $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 的函数. 特别地, 若 $f(x)$ 和 $g(y)$ 为广义函数论意义下的函数, 也就是说, 几乎处处有定义且在任意紧集上均可积的函数, 则它们的张量积也是如此.

也可以很容易地定义 X^m 上的测度 μ_x 与 Y^n 上的测度 ν_y 的张量积. 该定义在概率计算中是经典的: 设 x 为空间 X^m 中的随机点, 其分布律由 X^m 上的测度 μ_x 来定义 [因此测度 $\mu_x \geqslant 0$ 且 $\iint\cdots\int d\mu_x = +1$]. 同样设 y 为空间 Y^n 中的随机点, 其分布律由测度 ν_y 来定义 [$\nu_y \geqslant 0$, 且 $\iint\cdots\int d\nu_y = +1$]. 则两随机点偶 (x,y) 为积向量空间 $X^m \times Y^n$ 中的随机点, 其分布律由积测度 $\mu_x \otimes \nu_y$ 来定义①.

设 S_x 和 T_y 分别为 X^m 和 Y^n 上的两个任意广义函数, 为了能够推广上述乘积来定义 $S_x \otimes T_y$, 须将两个函数或测度的张量积表示成泛函. 令 $(\mathscr{D})_x$, $(\mathscr{D})_y$, $(\mathscr{D})_{x,y}$ 分别为 X^m, Y^n, $X^m \times Y^n$ 上具有紧支集的无穷可导函数的空间; 而 $(\mathscr{D}')_x$, $(\mathscr{D}')_y$, $(\mathscr{D}')_{x,y}$ 为所对应的广义函数空间 $(\mathscr{D}')$. 为定义

$$W_{x,y} = S_x \otimes T_y \in (\mathscr{D}')_{xy}\,,$$

对每个函数 $\varphi(x,y) \in (\mathscr{D})_{xy}$, 我们必须要知道泛函 $S_x \otimes T_y[\varphi(x,y)]$ 的值, 使得当 S_x 和 T_y 为两个测度 μ_x, ν_y, 或两个函数 $f(x), g(y)$ 时, 有

$$\begin{cases} \mu_x \otimes \nu_y[\varphi(x,y)] = \iint\cdots\int\cdot\iint\cdots\int \varphi(x,y)\,d\mu_x\,d\nu_y\,, \\ f_x \otimes g_y[\varphi(x,y)] = \iint\cdots\int\cdot\iint\cdots\int \varphi(x,y)f(x)g(y)\,dx\,dy\,. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

① 见 BOURBAKI [7], 第 3 章第 5 节.

首先我们仅考虑函数 $\varphi(x,y)\in(\mathscr{D})_{x,y}$ 为如下形式的乘积的特殊情形:

$$\varphi(x,y)=u(x)v(y),\quad u(x)\in(\mathscr{D})_x,\ v(y)\in(\mathscr{D})_y\,. \tag{4.2.2}$$

在两个测度或函数的情形, 由公式 (4.2.1) 立刻可得

$$\begin{cases} \mu_x\otimes\nu_y[u(x)v(y)]=\mu(u)\nu(v)\,,\\ f_x\otimes g_y[u(x)v(y)]\\ \qquad=\left(\iint\cdots\int f(x)u(x)\,dx\right)\left(\iint\cdots\int g(y)v(y)\,dy\right)=f(u)g(v)\,. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

这因此促使我们令

$$W_{x,y}\big[u(x)v(y)\big]=S(u)T(v)\,. \tag{4.2.4}$$

只要 $\varphi(x,y)$ 形如 (4.2.2) 或者为有限多个形如 (4.2.2) 的函数的和:

$$\varphi(x,y)=\sum_j u_j(x)v_j(y);\quad u_j\in(\mathscr{D})_x,\ v_j(y)\in(\mathscr{D})_y\,, \tag{4.2.5}$$

就可马上知道线性型 W 的值, 因为我们应有

$$W_{x,y}\left(\sum_j u_j(x)v_j(y)\right)=\sum_j S(u_j)T(v_j)\,. \tag{4.2.6}$$

我们将证明存在唯一确定的广义函数满足 (4.2.4), 后者将被称作张量积 $S_x\otimes T_y$. 在两个测度或函数的情形, 由 (4.2.3) 以及 W 的唯一性可知 W 与 (4.2.3) 所定义的张量积相等.

本章的结论可以不作修改地推广到分别定义在两个流形 U^m, V^n 上的两个广义函数的张量积; 该张量积为 $U^m\times V^n$ 上的广义函数.

§3. 张量积的唯一性, 存在性以及计算

逼近定理. 张量积的唯一性

定理 3. 由所有 $u(x)v(y)$ 组成的系统在 $(\mathscr{D})_{x,y}$ 中完全; 换句话说, 形如 (4.2.5) 的函数 $\varphi(x,y)=\sum_j u_j(x)v_j(y)$ 组成的向量子空间在 $(\mathscr{D})_{x,y}$ 中稠密[①].

① 该结论类似于一个与连续函数有关、用于研究测度乘积的著名定理. 比如见 Dieudonné [4] 以及 Bourbaki [8], 定理 4, p. 57.

若满足 (4.2.4) 的广义函数 W 存在, 由该定理可得唯一性. 因为 W 满足 (4.2.4), 故满足 (4.2.6); 从而可知 $W_{x,y}.\varphi(x,y)$ 在 φ 属于 $(\mathscr{D})_{x,y}$ 的一个稠密子空间时的值, 进而可知它在任意 $\varphi \in (\mathscr{D})_{x,y}$ 处的值. 更一般地, 对于 $X^m \times Y^n$ 上的任意广义函数, 若知它在形如 (4.2.2) 的 $\varphi(x,y)$ 处的取值, 就完全知道了该广义函数.

我们将给出上述定理的一个缺乏深度和一般性, 但却十分简练、足够我们用的证明. 我们可以找到一列多项式

$$P_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = P_\nu(x,y)$$

在任意紧集上一致收敛于 $\varphi(x,y)$ 且其各阶导数也在任意紧集上一致收敛于 φ 的相应导数. 一个多项式恰好形如 $\sum u_j(x)v_j(y)$, 但 u_j 和 v_j 都是单项式, 没有紧支集. 若 $\rho(x)$ 和 $\sigma(y)$ 为具有紧支集的固定无穷可导函数使得 $\rho(x)\sigma(y)$ 在 φ 的支集上 $\equiv 1$, 则 $\rho(x)\sigma(y)P_\nu(x,y)$ 形如 (4.2.5) 并且在 $(\mathscr{D})_{x,y}$ 中收敛于 $\rho(x)\sigma(y)\varphi(x,y) \equiv \varphi(x,y)$. 这就是所要证明的.

张量积的存在性及其计算 **定理 4.** *存在唯一且确定的广义函数 $W_{x,y} \in (\mathscr{D})_{x,y}$ 满足*

$$W\big[u(x)v(y)\big] = S(u)T(v)\,. \tag{4.3.1}$$

我们将称之为广义函数 $S_x \in (\mathscr{D}')_x$ 与 $T_y \in (\mathscr{D}')_y$ 的张量积, 并且将它记作 $S_x \otimes T_y$. 对于 $\varphi(x,y) \in (\mathscr{D})_{x,y}$, 可通过几个逐次简单积分来计算 $W(\varphi)$ (Fubini *定理*):

$$S_x \otimes T_y\big[\varphi(x,y)\big] = S_x\big[T_y\big(\varphi(x,y)\big)\big] = T_y\big[S_x\big(\varphi(x,y)\big)\big]\,. \tag{4.3.2}$$

为此, 将 $\varphi(x,y)$ 看成是 X^m 上依赖参数 $y \in Y^n$ 的函数. 对于固定 y, 这是 x 的函数, 属于 $(\mathscr{D})_x$, 我们因此可以定义积分 $I(y) = S_x[\varphi(x,y)]$, 其值为参数 y 的函数. 由于 φ 关于变量 x, y 无穷可微且作为 $(\mathscr{D})_x$ 中的函数, 其支集包含在一个不依赖 y 的紧集中, 于是由第 1 节中的结论可知

$$I(y) = S_x\big[\varphi(x,y)\big] \tag{4.3.3}$$

为 y 的无穷可导函数; 另外它作为 y 的函数有紧支集, 故属于 $(\mathscr{D})_y$. 由此可计算

$$T_y\big[I(y)\big] = T_y\Big[S_x\big(\varphi(x,y)\big)\Big]\,. \tag{4.3.4}$$

最后, 依旧是根据第 1 节中的结论可以很容易地得知, 若 φ 在 $(\mathscr{D}_K)_{x,y}$ 中收敛于 0, 则 $I(y)$ 在 $(\mathscr{D}_{K_1})_y$ 中收敛于 0, 其中 K_1 为 K 在空间 Y^n 上的投影. 因此 $T_y[I(y)]$ 收敛于 0. 从而 $T_y[I(y)]$ 在每个 $(\mathscr{D}_K)_{x,y}$ 上都定义了一个连续线性型, 也即定义了一个广义函数 $W_{x,y} \in (\mathscr{D}')_{x,y}$.

这个广义函数显然满足

$$W\big[u(x)v(y)\big]=T_y\Big[S_x\big(u(x)v(y)\big)\Big]=T_y\Big[v(y)S_x\big(u(x)\big)\Big] \tag{4.3.5}$$
$$=T_y\big[S(u)v(y)\big]=S(u)T_y\big[v(y)\big]=S(u)T(v),$$

也就是说等式 (4.3.1). 我们因此找到了满足 (4.3.1) 的广义函数; 定理 3 已给我们证明了不可能存在多于一个. 逐次积分 S_xT_y, T_yS_x 自然会给出同样结果, 因为它们所给出的两个广义函数当中的每一个均满足 (4.3.1).

§4. 张量积的性质

支集 定理 5. 张量积的支集等于支集的乘积.

也就是说 $(x,y)\in X^m\times Y^n$ 属于 $S_x\otimes T_y$ 的支集当且仅当 x 属于 S_x 的支集 A 而 y 属于 T_y 的支集 B. 由 S_x 和 T_y 的局部性质可知 $S_x\otimes T_y$ 的局部性质. 其证明即刻可得: 若 φ 的支集包含在 $\complement A\times Y^n$ 或 $X^m\times\complement B$ 中, 则由 (4.3.2) 得 $W(\varphi)=0$; 故 W 的支集包含在 $A\times B$ 中. 由 (4.3.1) 可知在 $A\times B$ 中每点的邻域内 $W\neq 0$.

连续性 定理 6. 将 $S_x\in(\mathscr{D}')_x$, $T_y\in(\mathscr{D}')_y$ 与 $S_x\otimes T_y\in(\mathscr{D}')_{x,y}$ 相对应的变换为强连续双线性映射. 将这些空间 $(\mathscr{D}')$ 换成 $(\mathscr{E}')$ 后该性质也成立.

立刻可知这是一个双线性映射. 同样也可容易地得知当 S_x 和 T_y 有界时 $S_x\otimes T_y$ 也有界. 若 S_x 固定甚或在 $(\mathscr{D}')_x$ 中有界, 而 T_y 在 $(\mathscr{D}')_y$ 中强收敛于 0, 则 $S_x\otimes T_y$ 在 $(\mathscr{D}')_{x,y}$ 中强收敛于 0. 也就是说该双线性映射为亚连续 (参见第 3 章定理 11). 但我们将证明得更多. 上述映射为连续: 若 S_x 和 T_y 每个都强收敛于 0 (这在滤子的情形并不意味着它们有界), 则 $S_x\otimes T_y$ 强收敛于 0. 首先证明一个引理:

引理. 若 $\{B_\nu\}$ 为 $(\mathscr{D})$ 中由支集包含在 $\mathbb{R}^n$ 的某个固定紧子集 K 中的函数 φ 所组成的一列有界集, 则在 $(\mathscr{D}')$ 中存在原点 0 的邻域 U 使得对任意 ν, 量

$$T(B_\nu)=\max_{\varphi\in B_\nu}|T(\varphi)|$$

在 $T\in U$ 时保持有界.

事实上, 集合 B_ν (ν 固定) 可由一个正实数序列

$$\{M_\nu\}=\{M_{0,\nu},M_{1,\nu},\dots,M_{p,\nu},\dots\}$$

来定义, 使得对于 $\varphi\in B_\nu$ 以及任意指标 p, 成立

$$|D^p\varphi|\leqslant M_{p,\nu}. \tag{4.4.1}$$

这些随 ν 变化的序列 $\{M_\nu\}$ 构成序列的可数族, 因此根据 Dubois – Reymond 的一个经典定理可知, 存在正实数序列 $\{M\}=\{M_0,M_1,\ldots,M_p,\ldots\}$ 使得 "在 $p\to\infty$ 时比每一个序列 $\{M_\nu\}$ 都要增长得更快". 换句话说, 对于 ν 的每一个值, 除了有限项外, 序列 $\{M\}$ 控制了序列 $\{M_\nu\}$; 于是存在依赖 ν 的实数 $k_\nu>0$ 使得

(4.4.2) $$\{M_\nu\}\leqslant k_\nu\{M\}\,,\quad 即\ M_{p,\nu}\leqslant k_\nu M_p\,.$$

考虑 $(\mathscr{D})$ 中由支集包含于 K 且对任意 p 满足下式的函数 φ 组成的有界集 B,

(4.4.3) $$|D^p\varphi|\leqslant M_p\,.$$

由 (4.4.1) 可知

(4.4.4) $$B_\nu\subset k_\nu B\,^{①}.$$

若 U 为 $(\mathscr{D}')$ 中满足 $T(B)\leqslant 1$ 的广义函数 T 构成的 0 的邻域, 则当 $T\in U$ 时:

(4.4.5) $$T(B_\nu)\leqslant k_\nu T(B)\leqslant k_\nu\,.$$

这就是所要证明的.

借助于该引理, 可以很容易地证明定理 4.

设 $\varphi(x,y)$ 属于 $(\mathscr{D})_{x,y}$ 中的一个任意的有界集 $B_{x,y}$. 对于参数 y 的每个固定值, 将 $\varphi(x,y)$ 看成只是 x 的函数; 由此立刻可见 φ 属于 $(\mathscr{D})_x$ 的一个不依赖于参数 y 的有界集 $B_{x,(0)}$. 同样地, 设 D^q_y 为关于 y 的一个求偏导符号, 则 $D^p_y\varphi(x,y)$ 属于 $(\mathscr{D})_x$ 的一个不依赖于参数 y 的有界集 $B_{x,(q)}$. 于是由引理可知, 在 $(\mathscr{D}')_x$ 中存在原点 0 的邻域 U_x 以及数列 $k_q>0$ 使得当 $S_x\in U_x$ 时,

(4.4.6) $$|S_x[D^q_y\varphi(x,y)]|\leqslant k_q\,.$$

因此 y 的函数 $I(y)=S_x[\varphi(x,y)]$ 属于 $(\mathscr{D})_y$, 其支集包含在某一个固定紧集中, 且对于 $S_x\in U_x$ 和 $\varphi\in B_{x,y}$, 满足:

(4.4.7) $$|D^qI(y)|\leqslant k_q\,.$$

也就是说 $I(y)$ 在 $(\mathscr{D})_y$ 中有界. 从而在 $(\mathscr{D})_y$ 中存在原点 0 的邻域 V_y 使得由

(4.4.8) $$\varphi\in B_{x,y},\quad S_x\in U_x,\quad T_y\in V_y$$

① 对任意一列有界集 B_ν, 均存在有界集 B 及序列 k_ν 与之相伴, 这是 Mackey 可数性的第一个条件. 见 MACKEY [1], p. 182 以及 DIEUDONNÉ – SCHWARTZ [1], 命题 3, p. 69.

可导出

$$|S_x \otimes T_y.\varphi(x,y)| = |T_y.I(y)| \leqslant 1. \tag{4.4.9}$$

这就证明了上述双线性映射的连续性①.

我们可以在定理 6 中将那些空间 $(\mathscr{D}')$ 换成 $(\mathscr{E}')$. 那时我们将会借助于一个关于空间 $(\mathscr{E})$, $(\mathscr{E}')$ 的引理, 该引理与前面的引理完全类似, 但对那些 $\varphi \in B_\nu$ 的支集不再作任何假设. 定理 6 本质上在于假设所涉及的都是强拓扑.

上述双线性映射不为弱连续. 对于弱拓扑, 我们仅能作曾对第 3 章定理 11 所作的同样的评注.

最后指出张量积为 $(\mathscr{E})_x \times (\mathscr{E})_y$ 到 $(\mathscr{E})_{x,y}$ 的双线性连续映射, 也为 $(\mathscr{D})_x \times (\mathscr{D})_y$ 到 $(\mathscr{D})_{x,y}$ 的双线性亚连续 (但不连续) 映射.

求导　定理 7. *若 D_x^p 为关于 x 的求偏导符号, 而 D_y^q 为关于 y 的求偏导符号, 则有*

$$D_x^p D_y^q (S_x \otimes T_y) = D_x^p S_x \otimes D_y^q T_y. \tag{4.4.10}$$

上述关于 $(\mathscr{D}')_{x,y}$ 中广义函数的等式立刻可得; 为此, 只需根据定理 3 来验证它们对于形如 (4.2.2) 的函数 $\varphi \in (\mathscr{D})_{x,y}$ 取同样的值, 而这是显然的.

逼近定理　定理 8. *广义函数系 $S_x \otimes T_y$ $\big(S_x \in (\mathscr{D}')_x, T_y \in (\mathscr{D}')_y\big)$ 在 $(\mathscr{D}')_{x,y}$ 中完全.*

事实上, 空间 $(\mathscr{D}')_{x,y}$ 中的任意一个广义函数均为具有紧支集的无穷可导函数的极限 (第 3 章定理 15). 但在 $(\mathscr{D})_{x,y}$ 中更不要说在 $(\mathscr{D}')_{x,y}$ 中, 这样的函数 $f(x,y)$ 为形如 (4.2.5) 中的函数的极限, 而后者正好是一些张量积的线性组合.

显然, 所有这些性质可以毫无困难地推广到任意有限多个广义函数的张量积; 张量积满足结合律. 事实上, 若 X^l, Y^m, Z^n 分别是维数为 l, m, n 的三个向量空间, 而 R_x, S_y, T_z 分别表示 X^l, Y^m, Z^n 上的三个广义函数, 则可知我们有

$$R_x \otimes (S_y \otimes T_x) = (R_x \otimes S_y) \otimes T_z.$$

另外, 对 $u(x) \in (\mathscr{D})_x$, $v(y) \in (\mathscr{D})_y$, $w(z) \in (\mathscr{D})_z$, 可通过令:

$$R_x \otimes S_y \otimes T_z\big[u(x)v(y)w(z)\big] = R(u)S(v)T(w) \tag{4.4.11}$$

来直接定义 $R_x \otimes S_y \otimes T_z$.

① 参见 DIEUDONNÉ – SCHWARTZ [1], p. 96, 其定理 9 表明我们所证明的定理 6 对 $(\mathscr{E}')$ 成立, 由之可以很容易地过渡到 $(\mathscr{D}')$.

§5. 一些例子

例 1. 不依赖 x_1 的广义函数 我们已经在第 2 章第 5 节中遇到过一个张量积的例子 (在多变量情形下的积分).

设 $\mathbb{R}^n$ 上的广义函数 T 满足 $\frac{\partial T}{\partial x_1}=0$. 我们将用新方法来寻求其形状. 我们将对

$$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=u(x_1)v(x_2,x_3,\ldots,x_n) \tag{4.5.1}$$

来计算 $T(\varphi)$.

选取 $v(x_2,x_3,\ldots,x_n)$ 固定, 而只让 u 动.

因此 $T(uv)$ 是一个关于 $u\in(\mathscr{D})_{x_1}$ 的连续线性型, 也就是说变量 x_1 所属的一维空间 X^1 上的广义函数. 该广义函数的导数为零, 于是由第 2 章定理 1 可知, 这是一个等于常数 $C(v)$ 的函数 (该常数依赖 v 的选取), 并且对于任意的 u 和 v:

$$T(uv)=C(v)\int_{-\infty}^{+\infty}u(x_1)\,dx_1\,. \tag{4.5.2}$$

现选定 u 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u(x_1)\,dx_1\neq 0\,,$$

而只让 v 变. 则 $C(v)$ 为关于 $v\in(\mathscr{D})_{x_2,x_3,\ldots,x_n}$ 的连续线性型, 故为变量 $x_2,x_3,\ldots,x_n$ 所构成的 $n-1$ 维空间 Y^{n-1} 上的广义函数 Σ, 并且

$$C(v)=\Sigma_{x_2,x_3,\ldots,x_n}[v(x_2,x_3,\ldots,x_n)]=\Sigma(v)\,, \tag{4.5.3}$$

$$T(uv)=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u(x_1)\,dx_1\right)\Sigma(v)\,. \tag{4.5.4}$$

该公式表明 T 为 X^1 的广义函数常数 1 与 Y^{n-1} 上的广义函数 Σ 的张量积.

$$T=(1)_{x_1}\otimes\Sigma_{x_2,x_3,\ldots,x_n}\,. \tag{4.5.5}$$

利用 Fubini 定理 [公式 (4.3.2)], 可重新得到公式 (2.5.10) 以及一个新公式:

$$\begin{cases} T.\,\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\Sigma_{x_2,x_3,\ldots,x_n}.\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1,x_2,\ldots,x_n)\,dt_1\right)\,,\\ T.\,\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\Sigma_{x_2,x_3,\ldots,x_n}.\,\varphi(t_1,x_2,\ldots,x_n)\right]dt_1\,. \end{cases} \tag{4.5.6}$$

更为一般地, 在空间 $X^m\times Y^n$ 中不依赖 y 的广义函数的通式为 $\Sigma_x\otimes(1)_y$.

例 2. 定义在某个向量子空间上的广义函数在整个空间上的延拓 重新沿用第 3 章第 10 节中的记号, 则 X^h 上的广义函数 T_x 在 $\mathbb{R}^n$ 的延拓 $\overline{T}_{x,y}$ 满足公式

$$\overline{T}_{x,y} = T_x \otimes \delta_y\,, \text{ 且有 } \quad D_y^q \overline{T}_{x,y} = T_x \otimes D_y^q \delta_y\,. \tag{4.5.7}$$

例 3. Heaviside 函数和 Dirac 测度 借助于 $\mathbb{R}^n$ 上的张量积可以定义介于 Heaviside 函数和 Dirac 测度之间的东西. 若我们称空间 $\mathbb{R}^n$ 上的 Heaviside 函数为在点 $x \geqslant 0$ (即 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$) 处等于 1 而在其余地方等于 0 的函数, 则可知

$$Y(x) = Y_{x_1} \otimes Y_{x_2} \otimes \cdots \otimes Y_{x_n}\,. \tag{4.5.8}$$

我们因此令

$$Y_{(k)} = Y_{x_1} \otimes Y_{x_2} \otimes \cdots \otimes Y_{x_k} \otimes \delta_{x_{k+1}} \cdots \otimes \delta_{x_n}\,, \tag{4.5.9}$$

以便 $Y_{(n)}(x) = Y(x)$ 且 $Y_{(0)} = \delta$. 于是 $Y_{(n)}$ 为函数, 而所有其余的 $Y_{(k)}$ 都是测度; 又 $Y_{(k)}$ 支撑在向量子空间 $Ox_1x_2 \cdots x_k$ 上, 因此它是定义在子空间 $Ox_1x_2 \cdots x_k$ 上的 Heaviside 函数在 $\mathbb{R}^n$ 上的延拓. 从而就有

$$\frac{\partial}{\partial x_k} Y_{(k)} = Y_{(k-1)}\,, \tag{4.5.10}$$

进而可得

$$\frac{\partial^{n-k}}{\partial x_{k+1} \cdots \partial x_n} Y = Y_{(k)}\,, \quad \frac{\partial^k}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_k} Y_{(k)} = \delta\,, \tag{4.5.11}$$

这就给出了某些偏微分方程的“基本解”.

第五章　广义函数的乘法

内容提要　对于两个任意的广义函数, 我们不可能定义其乘积. 在第 1 节我们将借助公式 $\alpha T.\varphi = T.\alpha\varphi$ (5.1.1) 来定义广义函数 T 与无穷可导函数 α 之间的乘积 αT, 而当 T 为函数 f 时, 乘积 αT 就给出了通常的乘积 αf.

第 2 节给出了乘积的一些显然性质. 需特别指出的是亚连续性 (定理 3, p. 85) 以及通常的乘积求导公式 (5.2.3): $(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'$.

第 3 节给出了一些例子. 公式 (5.3.2) – (5.3.5) 时常以多少有些乔装改扮的形式应用于波动力学. 而例 3 则在赝函数的实际应用中非常重要.

第 4 节和第 5 节讨论除法问题. 在单变量情形 ($n = 1$, 第 4 节), 以 x 的幂为分母做除法在波动力学和常微分方程的实际应用中很有用. 第 2 节则相反讨论一些到目前为止都很少用的概念, 这是因为人们过去无法正确表述除法问题. 该问题现在虽已被正确表述, 但并没有因此得到解决; 我们仅能处理一些特殊的情形; 一般的情形极为困难; Hörmander 解决了以多项式为分母做除法的问题, 而 Lojasiewicz 则解决了以解析函数为分母做除法的问题 ①. 除法的价值在于它可借助 Fourier 变换来解决偏微分方程和积分方程理论中的一些基本问题 (第 7 章第 10 节). 大家可将第 4 节和第 5 节的内容推迟到研究这些问题的时候再读, 而这不会产生任何不便.

第 6 节给出了乘法在常微分方程和偏微分方程中的一些应用. 该节对实际应用很重要. 齐次微分方程仅有通常意义下的函数解 (定理 9, p. 94); 椭圆偏微分方程亦如此 (定理 12, p. 103), 这就极大简化了变分计算中的那些直接方法 (p. 106). 双曲方程则相反有一些新的广义函数解, 由此得以正确引入常用的非连续解. 同样地, Cauchy 问题与非齐次方程之间的关系, 以及基本解的正确定义都得到了阐明 (p. 98).

---

① Hörmander [2], Lojasiewicz [1], Schwartz [16].

§1. 广义函数与无穷可导函数的乘积

为避免混淆, 在本章我们将总是用 $T.\varphi$ 来表示 $T \in (\mathscr{D}')$ 与 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 的点积.

定义两个任意的广义函数的乘积的不可能性　我们拟定义广义函数 $S, T \in (\mathscr{D}')$ 的乘积 $ST \in (\mathscr{D}')$, 使得在它们为两个函数 $f(x), g(x)$ 的情形给出通常的乘积 $f(x)g(x)$. 当 S 和 T 为任意时, 这显然不可能. 例如, 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为在任意紧集上可积的两个函数, 其乘积不一定可积, 故不一定能定义一个广义函数. 若 μ 为测度但不是函数, 易见其平方 μ^2 永远不会有意义; Dirac 测度的平方 δ^2 若有意义则应为原点处质量为 $+\infty$ 的质点所构成的测度 (可通过钟形函数逼近 δ 来得到这点). 为了让 ST 有意义, 须使 S 在局部上的正则程度超过 T 的不正则程度①. 我们能够肯定乘积总有意义的情形是: T 为任意的广义函数而 S 为 (通常意义下的) 无穷可导函数 α.

定义　对于 $\alpha \in (\mathscr{E})$, $T \in (\mathscr{D}')$, 我们将由下式来定义乘积 $\alpha T \in (\mathscr{D}')$: 对于 $\varphi \in (\mathscr{D})$,

$$\alpha T.\varphi = T.\alpha\varphi\,. \tag{5.1.1}$$

如此定义的 αT 为广义函数: 若在 $(\mathscr{D}_K)$ 中 $\varphi_j \to 0$, 则 $\alpha\varphi_j$ 亦如此, 故 $T.\alpha\varphi_j \to 0$. 若 T 为函数 f, 则 αT 恰与通常的乘积 αf 一致, 因为 (5.1.1) 可写成

$$\iint\cdots\int[\alpha(x)f(x)]\varphi(x)\,dx = \iint\cdots\int f(x)[\alpha(x)\varphi(x)]\,dx\,. \tag{5.1.2}$$

除了 $S = \alpha \in (\mathscr{E})$ 而 $T \in (\mathscr{D}')$ 为任意这一情形外, 我们在下面还将给出不同于该情形的两个广义函数的乘积的一些例子.

1° T 为测度 μ. 于是当 S 为连续函数 f 时可定义 ST:

$$ST = f\mu\,,\quad \text{其中 } f\mu.\varphi = \mu.f\varphi\,,\ \varphi \in (\mathscr{D})\,,\ f\varphi \in (\mathcal{C})\,. \tag{5.1.3}$$

2° T 为阶不大于 m 的广义函数. 则当 S 为 m 阶连续可微函数 f 时可定义 ST:

$$fT.\varphi = T.f\varphi\,,\quad \varphi \in (\mathscr{D})\,,\ f\varphi \in (\mathscr{D}^m)\,. \tag{5.1.4}$$

3° 由于 $S = \alpha \in (\mathscr{E})$, 因此我们一开始就选择了 T 为任意而 S 为 “无限正则”, 刚才我们考察了一些中间情形. 有必要让 S 和 T 起同样作用; 若 S 为阶不大于 m 的广义函数, 则 T 应为 m 阶连续可微函数; 若 $S \in (\mathscr{D}')$ 任意, 则 T 应为函数 $\alpha \in (\mathscr{E})$.

鉴于上述研究可知, 只要乘积有意义, 我们既可记之为 ST 也可记之为 TS.

---

① 我们在 SCHWARTZ [6] 中证明了, 即使在更为一般的条件下也无法定义乘积. 而 KÖNIG [2] 则定义了另外一种完全不同的乘法.

在后面我们将放弃这个观点而总是考虑乘积 αT, 其中 $\alpha \in (\mathscr{E}), T \in (\mathscr{D}')$.

提请大家注意, 对于 $\varphi \in (\mathscr{D}), T \in (\mathscr{D}')$ 或 $\varphi \in (\mathscr{E}), T \in (\mathscr{E}')$, 均有 $\varphi T \in (\mathscr{E}')$ 且

$$T.\varphi = \varphi T.1 = \iint \cdots \int \varphi T. \tag{5.1.5}$$

故为乘积在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分. 可见, 若对任意 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 有 $\varphi T = 0$, 则 $T = 0$.

上述乘积的定义可立刻推广到流形 V^n 上的广义函数.

§2. 乘积的性质

支集. 阶　定理 1. 乘积 αT 的支集包含于 α 的支集与 T 的支集之交. 乘积 αT 的阶则至多等于 T 的阶.

这等价于说, 在开集 Ω 上, 若 α 或 T 为零, 则 αT 也为零. 由 α 和 T 的局部性质可得出 αT 的局部性质; 比如说, 若 α 和 T 在开集 Ω 上非负, 则 αT 在 Ω 上为非负测度. 特别地, 由 $\alpha \in (\mathscr{D})$ 或 $T \in (\mathscr{E}')$ 可导出 $\alpha T \in (\mathscr{E}')$. 其证明是直接的.

利用第 3 章中的定理 28 和定理 33 可改进上述定理来证明如下结论:

定理 2. 若 T 有紧支集 K_0 且阶 (必然有限) 为 m, 则只要 α 及其阶不大于 m 的导数在 K_0 上为零就有 αT 为零; 若 T 的支集和阶 (有限或无限) 任意, 则当 α 及其各阶导数在 T 的支集上为零时 αT 为零.

事实上, 对任意 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 或者 (在第一种情形) 乘积 $\alpha\varphi$ 及其阶不大于 m 的导数在 K_0 上为零, 或者 (在第二种情形) 其各阶导数在 T 的支集上为零, 故 $T(\alpha\varphi) = 0$.

连续性　定理 3. 乘积 αT 为 α 和 T 的亚连续双线性函数 [当 $\alpha \in (\mathscr{E}), T \in (\mathscr{D}')$ 时, 均有 $\alpha T \in (\mathscr{D}')$].

该结论可由第 3 章定理 11 导出.

比如说, 假设 T_j 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0. 若 φ 属于 $(\mathscr{D})$ 中有界集 B, 而 α_j 在 $(\mathscr{E})$ 中有界, 则 $\alpha_j\varphi$ 也在 $(\mathscr{D})$ 中有界; 从而 $T_j.\alpha_j\varphi$ 关于 $\varphi \in B$ 一致趋于 0. 若相反是 α_j 在 $(\mathscr{E})$ 中趋于 0, 则当 φ 属于 B 时 $\alpha_j\varphi$ 在 $(\mathscr{D})$ 中一致趋于 0; 又 T_j 在 $(\mathscr{D}')$ 中有界, 因此 $T_j.\alpha_j\varphi$ 还是关于 $\varphi \in B$ 一致趋于 0. 当然, 双线性映射 $(\alpha, T) \to \alpha T$ 不连续. 若 α_j 在 $(\mathscr{E})$ 中趋于 0 而 T_j 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0, 其乘积 $\alpha_j T_j$ 不一定在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0. 只要在序列 (因为收敛序列有界) 或者具有有界或可数滤子基的滤子的情形, 才肯定会有 $\alpha_j T_j$ 趋于 0. 关于弱拓扑, 我们可以作曾对第 3 章定理 9 所作的同样评注.

还请大家注意, 乘积也是一个从 $(\mathscr{E}) \times (\mathscr{E}')$ 到 $(\mathscr{E}')$, $(\mathscr{D}) \times (\mathscr{D}')$ 到 $(\mathscr{E}')$, $(\mathscr{D}) \times (\mathscr{E})$ 到 $(\mathscr{D})$ 的亚连续双线性映射, 并且从 $(\mathscr{E}) \times (\mathscr{E})$ 到 $(\mathscr{E})$ 为连续.

对固定的 $\alpha \in (\mathscr{E})$, 通常仅限于研究从 $(\mathscr{D}')$ 或 $(\mathscr{E}')$ 到它本身的连续线性映射

$$T \to \alpha T. \tag{5.2.1}$$

根据公式 (5.1.1), 这不是别的, 而是从 $(\mathscr{D})$ 或 $(\mathscr{E})$ 到它自己的连续线性映射

$$\varphi \to \alpha\varphi \tag{5.2.2}$$

的转置.

求导 **定理 4.** 对乘积 αT 的求导遵循下列通常的乘积求导法则:

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'. \tag{5.2.3}$$

在上述公式中, 记号 $'$ 用于简记关于某一个坐标的偏导数 $\frac{\partial}{\partial x_k}$. 另外, 该公式在无穷可微流形 V^n 上也成立, 此时记号 $'$ 表示一阶偏导数 [公式 (2.3.35)].

其直接证明即刻可得, 因为

$$\begin{cases} (\alpha T)'.\,\varphi = \alpha T.\,(-\varphi') = T.\,(-\alpha\varphi'), \\ \alpha' T.\,\varphi = T.\,\alpha'\varphi, \\ \alpha T'.\,\varphi = T'.\,\alpha\varphi = T.\,[-(\alpha\varphi)'], \end{cases} \tag{5.2.4}$$

从而公式 (5.2.3) 可被表述成

$$T.\,(-\alpha\varphi') = T.\,[\alpha'\varphi - (\alpha\varphi)'], \quad \text{即} \ -\alpha\varphi' = \alpha'\varphi - (\alpha\varphi)'. \tag{5.2.5}$$

而这正是通常的乘积求导公式.

也可以不用定义证明. 当 T 为函数 $f \in (\mathscr{D})$ 时公式 (5.2.3) 成立. 但若 $f_j \in (\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 T, 则通过取极限可得 (5.2.3). 当然, 也可以推广并证明关于乘积的高阶求导的 Leibniz 公式.

张量积与乘积

定理 5. 在 $(\mathscr{D})_{x,y}$ 中, 张量积 $\alpha(x) \otimes \beta(y), S_x \otimes T_y$ 的乘积等于乘积的张量积:

$$[\alpha(x) \otimes \beta(y)](S_x \otimes T_y) = \alpha(x)S_x \otimes \beta(y)T_y, \tag{5.2.6}$$

其中 $\alpha(x) \in (\mathscr{E})_x, \beta(y) \in (\mathscr{E})_y, S_x \in (\mathscr{D}')_x, T_y \in (\mathscr{D}')_y$.

为证明出现在两边的广义函数相等, 只需证明, 作为 $(\mathscr{D})_{x,y}$ 上的线性型, 它们在形如 (4.2.2) 的函数 $\varphi(x,y) \in (\mathscr{D})_{x,y}$ 处取同样的值, 而这是显然的, 因为两边的公共值为 $(S.\,\alpha u)(T.\,\beta v)$.

多个广义函数的乘积 可以毫无困难地定义任意有限多个广义函数的乘积, 若它们当中至多除了一个以外, 其余均为 $(\mathscr{E})$ 中的函数.

定理 6. 对于多个广义函数, 当至多除了一个以外其余均为通常意义下的无穷可导函数时, 它们的乘积满足结合律和交换律.

事实上, 我们有

$$\alpha(\beta T).\varphi = \beta T.\alpha\varphi = T.\beta\alpha\varphi = (\alpha\beta)T.\varphi. \tag{5.2.7}$$

结合律

$$\alpha(\beta T) = (\alpha\beta)T \tag{5.2.8}$$

表明, 借助乘法 $T \to \alpha T$ 可将空间 $(\mathscr{D}')$ [或 $(\mathscr{E}')$] 定义成拓扑环 $(\mathscr{E})$ 上的拓扑模.

若定理中的限制性条件不满足, 则乘法不一定满足结合律.

例. 对于 $\delta, x, \mathrm{vp.}\frac{1}{x}$ 这三个广义函数:

$$(\delta\, x)\,\mathrm{vp.}\frac{1}{x} = 0, \quad \text{因为 } \delta\, x = 0. \tag{5.2.9}$$

$$\delta\left(x\,\mathrm{vp.}\frac{1}{x}\right) = \delta, \quad \text{因为 } x\,\mathrm{vp.}\frac{1}{x} = 1. \tag{5.2.10}$$

§3. 例子

例 1. 我们已遇到过一些例子. 例如公式 (3.8.1) 可由单位分解立刻得到:

$$1 \equiv \sum_\nu \alpha_\nu(x),$$

其中右边的那个无穷和在 $(\mathscr{E})$ 中收敛; 于是由乘法可得

$$T = \sum_\nu \alpha_\nu T. \tag{5.3.1}$$

例 2. 若用记号 $'$ 来表示一阶求导, 那么:

$$\alpha\,\delta = \alpha(0)\,\delta, \tag{5.3.2}$$

$$\alpha\,\delta' = \alpha(0)\,\delta' - \alpha'(0)\,\delta. \tag{5.3.3}$$

更一般地, 由 Leibniz 公式可知

$$\alpha\, D^p\delta = \sum_{q\leqslant p}(-1)^{|p-q|}\mathrm{C}_p^q\, D^{p-q}\alpha(0)\, D^q\delta. \tag{5.3.4}$$

一个特别有趣的情形为 $\alpha = x^l = x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}$:

$$x^l \left((-1)^{|p|} \frac{D^p \delta}{p!} \right) = \begin{cases} (-1)^{|p-l|} \frac{D^{p-l}\delta}{(p-1)!}, & \text{若 } l \leqslant p, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{5.3.5}$$

公式 (5.3.5) 的一个特殊情形为

$$x^p D^p \delta = (-1)^{|p|} p! \, \delta. \tag{5.3.6}$$

若现在采用第 3 章第 10 节中的记号, 则由 (4.5.7) 可得

$$y^l \left((-1)^{|q|} T_x \otimes \frac{D_y^q \delta_y}{q!} \right) = \begin{cases} (-1)^{|q-l|} T_x \otimes \frac{D_y^{q-l} \delta_y}{(q-l)!}, & \text{若 } l \leqslant q, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{5.3.7}$$

例 3. 设 Pf. g 为“赝函数”. 这意味着

$$(\text{Pf.}\, g). \varphi = \text{Pf.} \iint \cdots \int g \varphi \, dx. \tag{5.3.8}$$

为确定赝函数 Pf. g, 须假设已给定计算右边那个积分的有限部分的具体方法. 于是

$$[\alpha (\text{Pf.}\, g)]. \varphi = (\text{Pf.}\, g). (\alpha \varphi) = \text{Pf.} \iint \cdots \int g(\alpha \varphi) \, dx = \text{Pf.} \iiint (\alpha g) \varphi \, dx. \tag{5.3.9}$$

依据对 (5.3.9) 中最后那个积分所假设的具体算法的约定, 它表示 (Pf. αg). φ. 故

$$\alpha (\text{Pf.}\, g) = \text{Pf.}\, (\alpha g). \tag{5.3.10}$$

赝函数因此可以像函数那样来做乘法. 比如说, 由第 2 章第 3 节中的例 2 可得

$$r^k (\text{Pf.}\, r^m) = \text{Pf.}\, r^{m+k}; \tag{5.3.11}$$

其中 m 为任意复数而 $k \geqslant 0$ 为偶数, 因为 r^k 必须是无穷可导函数. 若 $\Re m + k > -n$, 此时右边的记号 Pf. 是多余的.

§4. 除法问题, 单变量的情形 ($n = 1$)

问题的提出 若 S 为给定广义函数, 显然在不包含 $H(x) \in (\mathscr{E})$ 的零点的任意一个开集中, 存在唯一一个广义函数 T 满足 $HT = S$: 由于 $\frac{1}{H}$ 为无穷可导, 于是在两边同时乘以 $\frac{1}{H}$ 可得 $T = \frac{1}{H} S$. 因此我们将只关注 H 有零点的情形. 除法问题在积分方程与偏微分方程理论中极为重要; 在波动力学中也经常会用到除法.

以 x 为分母做除法 **定理 7.** 如果 S 为 $\mathbb{R}^1$ 上的一个给定的广义函数, 则存在无穷多个广义函数 T 满足

$$xT = S; \tag{5.4.1}$$

它们当中的任意两个之间仅相差 Dirac 测度的一个任意倍数 $C\delta$.

立刻可知, 在原点的余集上, 广义函数 T 由

$$T = \frac{1}{x} S \tag{5.4.2}$$

来确定, 这是因为 $1/x$ 在该开集内为无穷可导. 于是 T 仅在原点 0 的邻域内未知. 尽管如此, 我们却无法先验地肯定该广义函数的确存在.

这里我们要打交道的是以 x 为分母做除法的问题, 这是乘法的逆问题. 我们将完全像处理求导的逆问题 – 积分 (第 2 章定理 1) 那样来进行. 为得到 (5.4.1) 当且仅当对任意形如 $\chi(x) = x\psi(x)$, $\psi \in (\mathscr{D})$ 的函数 $\chi \in (\mathscr{D})$, 均有 $T(\chi) = S(\psi)$. 这些可被 x 整除的函数 χ 构成了 $(\mathscr{D})$ 的一个向量子空间超平面 $(\mathscr{H})$: 它们其实只需要满足线性条件 $\chi(0) = 0$, 而在此条件下商 $\psi(x) = \chi(x)/x$ 正好属于 $(\mathscr{D})$.

若 T 存在, 则它为 $(\mathscr{D})$ 上的连续线性型且在 $(\mathscr{H})$ 上已知; 若已知它在 $(\mathscr{D})$ 中某一个不属于 $(\mathscr{H})$ 的元素 φ_0 处的值 $T(\varphi_0)$, 那么我们就可以完全确定它. 比如说, 选取 φ_0 使得 $\varphi_0(0) = 1$. 则对任意 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 我们将有唯一的分解

$$\begin{cases} \varphi = \lambda\varphi_0 + \chi, \\ \lambda = \varphi(0), \\ \chi = \varphi - \lambda\varphi_0 \in (\mathscr{H}), \quad \text{故 } \chi = x\psi,\ \psi \in (\mathscr{D}), \end{cases} \tag{5.4.3}$$

而这将会给出

$$T(\varphi) = \lambda T(\varphi_0) + S(\psi). \tag{5.4.4}$$

反过来, 假设 φ_0 选定而 $T(\varphi_0)$ 可任意选取. 公式 (5.4.4) 将 T 定义成 $(\mathscr{D})$ 上的线性型. 若 φ 在 $(\mathscr{D}_K)$ 中趋于 0, 则 λ 趋于 0, 因此 $\lambda T(\varphi_0)$ 也同样趋于 0; 如果我们证明了 ψ 在 $(\mathscr{D})$ 中趋于 0, 那么 $S(\psi)$ 趋于 0, 从而 $T(\varphi)$ 也会趋于 0; 于是 T 将会是一个连续线性型, 也就是说 T 是一个广义函数且满足 (5.4.1).

故只需证明 φ 在 $(\mathscr{D})$ 中趋于 0 时 ψ 也如此. 但 $\chi = \varphi - \lambda\varphi_0$ 在 $(\mathscr{D}_L)$ 中趋于 0, 其中 L 为 K 与 φ_0 的支集的并集, 因此最终需证明, 若 $\chi \in (\mathscr{H})$ 在 $(\mathscr{D}_L)$ 中趋于 0, 则 $\psi(x) = \chi(x)/x$ 在 $(\mathscr{D}_L)$ 中趋于 0. 对 $\chi(x)$ 应用泰勒公式并通过初等计算可得:

$$\left|\frac{d^m\psi(x)}{dx^m}\right| \leqslant k_m \max_{|t|\leqslant|x|} \left|\frac{d^{m+1}\chi(t)}{dt^{m+1}}\right|, \tag{5.4.5}$$

由此立刻可得所要结论.

方程 (5.4.1) 的两个不同解对应于 $T(\varphi_0)$ 的两个不同值; 它们的差因此满足

$$T_1(\varphi) - T_2(\varphi) = C\lambda = C\varphi(0)\,, \quad \text{即 } T_1 - T_2 = C\delta\,, \tag{5.4.6}$$

其中 C 为复值常数, 而 δ 为 Dirac 测度.

另外, 易见满足 $xT = 0$ 的广义函数 T 必与 δ 成比例. 因为根据 (5.4.2), 这样的一个广义函数必支撑在原点上, 故为如下形式 [公式 (3.10.1)]:

$$T = \sum_{0 \leqslant p \leqslant m} (-1)^p \frac{C_p}{p\,!}\, \delta^{(p)}\,, \tag{5.4.7}$$

于是由公式 (5.3.5) 可得

$$xT = \sum_{1 \leqslant p \leqslant m} (-1)^{p-1} \frac{C_p}{(p-1)\,!}\, \delta^{(p-1)}\,. \tag{5.4.8}$$

仅当所有的 a_p $(p \geqslant 1)$ 为零时该表达式才为零, 因此就有 $T = C_0\delta$.

以 x^l 为分母做除法 **推论.** *如果 S 为 $\mathbb{R}^1$ 上的一个给定的广义函数, 那么存在无穷多个广义函数 T 满足*

$$x^l\, T = S \quad (l > 0 \text{ 为整数})\,; \tag{5.4.9}$$

它们当中任意两个之间的差为 Dirac 测度的阶不大于 $l-1$ 的导数的任意线性组合.

对此可逐步讨论; 为用 x^l 来 "除" S, 可连续 l 次用 x 来除 S. 至于解的确定, 则可如下进行: 满足 $x^l T = 0$ 的广义函数 T 支撑在原点上, 它因此会形如 (5.4.7), 于是根据 (5.3.5), 就有

$$x^l\, T = \sum_{l \leqslant p \leqslant m} (-1)^{p-l} \frac{C_p}{(p-l)\,!}\, \delta^{(p-l)}\,. \tag{5.4.10}$$

仅当所有的 C_p $(p \geqslant l)$ 都为零时上式才会为零, 由此可得

$$T = \sum_{0 \leqslant p \leqslant l-1} (-1)^p \frac{C_p}{p\,!}\, \delta^{(p)}\,. \tag{5.4.11}$$

以某个函数 H 为分母做除法 现在我们可以来考虑将给定的广义函数 S, 除以一个在实轴上仅有有限阶孤立重根的任意函数 $H(x) \in (\mathscr{E})$.

事实上可知, 若局部上能以 H 为分母来做除法, 则整体上也能以 H 为分母来做除法 (参见后面的第 5 节第 2° 段).

不过, 在不是 H 的零点的任意点 a 的邻域内, 显然能以 H 为分母来做除法. 而在 H 的 l_ν 阶零点 a_ν 的邻域内, 则有

$$\frac{1}{H}=\frac{1}{(x-a_\nu)^{l_\nu}}\frac{(x-a_\nu)^{l_\nu}}{H}, \tag{5.4.12}$$

但 $(x-a_\nu)^{l_\nu}/H$ 在 a_ν 的邻域内无穷可导, 于是除以 H 就可转化成除以 $(x-a_\nu)^{l_\nu}$, 而后者却总是可以进行. 因此最终在 $\mathbb{R}^1$ 上总是能以 H 为分母来做除法.

解的不唯一性源于那些点 a_ν 处的不唯一性. 两个解之差满足

$$H(T_1-T_2)=0, \tag{5.4.13}$$

且可唯一表示成点状测度 δ_{a_ν} 的阶不大于 $l_\nu-1$ 的导数的 (收敛的) 无限线性组合:

$$T_1-T_2=\sum_{a_\nu}\left(\sum_{p\leqslant l_\nu-1}(-1)^p\frac{C_{p,\nu}}{p!}\,\delta_{a_\nu}^{(p)}\right), \tag{5.4.14}$$

因为它在每点的邻域内具有唯一一个这样的表示.

大家可以很容易发现, 并不是总能以一个具有无穷阶零点的函数 $H(x)\in(\mathscr{E})$ 为分母来做除法; 任意的广义函数不再总是能被 H 来“整除”.

§5. 多变量情形的除法问题的概述

我们这里仅讨论一些简单的情形. 一般的除法问题很难处理; Hörmander [2] 解决了如何以多项式为分母做除法, 更一般地, Lojasiewicz [1] 则解决了如何以解析函数为分母做除法. 也见 Schwartz [15].

1° 在 $\mathbb{R}^n$ 中总能以 x_n 为分母做除法. 为此只需推广前一节中的证明, 不过 $(\mathscr{H})$ 不再是一个超平面, 而是由满足 $\chi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},0)\equiv 0$ 的函数 χ 组成.

2° 若局部上能以 H 为分母做除法, 则整体上也能如此. 为此设 $\{\Omega_\nu\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的局部有限覆盖, 其中每个 Ω_ν 为相对紧开集并且在 Ω_ν 中总能以 H 为分母做除法. 利用第 3 章定理 29, 将给定的广义函数 S 分解成和式 $S=\sum_\nu S_\nu$, 其中 S_ν 的支集包含在 Ω_ν 中. 于是存在广义函数 T_ν 使得 $HT_\nu=S_\nu$; 我们总可以假设 T_ν 的支集包含在 Ω_ν 中, 否则将它乘以 $(\mathscr{D}_{\Omega_\nu})$ 中的一个在 S_ν 的支集的邻域上等于 1 的函数. 从而无限和 $T=\sum_\nu T_\nu$ 局部有限, 并且还有 $HT=S$.

3° 设 $P\in(\mathscr{E})$ 使得方程 $P(x)=0$ 所定义的子流形 U^{n-1} 的维数为 $n-1$, 没有奇点, 且 P 的一阶偏导数决不在该子流形上同为零. 这样的函数 P 被称为正则. 在 U^{n-1} 外每点邻域内, 总能以 P 为分母做除法且商唯一. 在 U^{n-1} 上每点邻域内, 通过坐标变换 (第 1 章第 5 节第 3° 段) 可将 P 转化为函数 x_n, 故也能以 P 为分母做除法. 最后由于局部上能以 P 为分母做除法, 故在整体上也能如此.

4° 若能以两函数 H, K 分别为分母做除法, 则总能以乘积 HK 为分母做除法, 而这可通过依次做两次除法来实现.

因此, 若 $P, Q, \ldots$ 为 $(\mathscr{E})$ 中正则函数而 $l, m, \ldots > 0$ 为整数, 则总能以 $P^l Q^m \cdots$ 为分母来做除法.

现针对上述已讨论过的情形来研究除法问题解的不唯一性, 即求满足 $HT = 0$ 的广义函数 T 的通式. 广义函数 T 的支集必包含在方程为 $H(x) = 0$ 的子流形中. 但该条件决不是充分的.

公式 (5.3.7) 表明, 为使乘积 $x_n^l T$ 为零, 当且仅当 T 为支撑在超平面 $x_n = 0$ 上的阶不大于 l 的多层:

$$T = \sum_{q \leqslant l-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^q \overline{T}_q, \quad T \in (\mathscr{D}')_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}}. \tag{5.5.1}$$

我们在以 $P^l Q^m \cdots$ 为分母做除法时进行局部坐标变换 (第 1 章第 5 节第 3° 段); 对于多个函数 $P, Q, \ldots$, 利用第 3 章定理 34.3° 可将支撑在多个子流形的并集上的广义函数分解成分别支撑在这些子流形上的广义函数的和. 由此得到下述定理:

定理 8. *若 V^n 为无穷可微流形, 而 $P, Q, \ldots \in (\mathscr{E})$ 为 V^n 上的正则函数, 则总能以 $P^l Q^m \cdots$ 为分母做除法. 为使广义函数 T 满足 $P^l Q^m \cdots T = 0$, 只需 T 可分解成分别支撑在子流形 $P = 0, Q = 0, \ldots$ 上的阶不大于 $l, m, \ldots$ 的多层的和, 而当这些子流形在其公共点处的切平面独立时, 该条件也是必要的 (参见第 72 页).*

提请大家注意, 若某点仅属于上述这些子流形当中的一个, 则在该点的邻域内, 一旦选定了横截导数, 由定义在该点所属的子流形上的广义函数在 V^n 上的延拓的横截导数的有限和所给出的多层的表达式是唯一的.

例. 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 总能以 $(1 - r^2)^l$ 为分母做除法. 并且方程 $(1 - r^2)^l T = 0$ 的通解具有唯一的分解:

$$T = \sum_{q \leqslant l-1} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^q \overline{T}_q, \tag{5.5.2}$$

其中 $\overline{T}_q$ 为定义在单位球面 S^{n-1} 上的广义函数 T_q 在 $\mathbb{R}^n$ 上的延拓.

§6. 在常微分方程和偏微分方程中的应用

定义　以广义函数 T 为未知元的 m 阶线性偏微分方程形如

$$\begin{cases} DT = B, \quad \text{其中} \\ DT = \displaystyle\sum_{|p| \leqslant m} A_p(x) D^p T; \ p = (p_1, p_2, \ldots, p_n). \end{cases} \tag{5.6.1}$$

对任意广义函数 T, 若要 DT 有意义, 方程的系数 $A_p(x)$ 须为 (通常意义下的) 无穷可导函数. 常数项 B 为给定广义函数; 若 $B=0$, 则方程为齐次的 (当然我们也可研究别的情形; 比如说, 若那些 A_p 仅为 k 阶连续可微, 则 D^pT 须属于 $(\mathscr{D}'^k)$, 而方程的解 T 不能是任意的广义函数).

为得到 N 个未知广义函数的 N 个偏微分方程组, 须假设 $T=(T_1,T_2,\ldots,T_N)$ 为取值在 N 维向量空间 $E=\mathbb{R}^n$ 中的向量值广义函数 (见第 1 章第 5 节第 1° 段). 于是 $B=(B_1,B_2,\ldots,B_N)$ 也是向量值广义函数, 而系数 $A_p=(A_{p;j,k})$ 为 $N\times N$ 的无穷可导矩阵, 从而 (5.6.1) 等价于

$$(DT)_j=B_j\,;\quad j=1,2,\ldots,N\,; \tag{5.6.2}$$

其中

$$(DT)_j=\sum_{|p|\leqslant m}\sum_{k=1}^{N}A_{p;j,k}(x)D^pT_k\,. \tag{5.6.3}$$

从 $(\mathscr{D}')$ 到 $(\mathscr{D}')$ 的连续线性映射 $T\to DT$ 具有转置; 这是一个从 $(\mathscr{D})$ 到 $(\mathscr{D})$ 的连续线性映射 $\varphi\to D'\varphi$, 其定义为

$$DT.\varphi=T.D'\varphi\,,\quad \text{即}\ \sum_{j=1}^{N}(DT)_j.\varphi_j=\sum_{j=1}^{N}T_j.(D'\varphi)_j\,, \tag{5.6.4}$$

也就是说

$$D'\varphi=\sum_{|p|\leqslant m}(-1)^{|p|}D^p\big[\,{}^tA_p(x)\varphi(x)\big]\,, \tag{5.6.5}$$

也即有

$$(D'\varphi)_j=\sum_{|p|\leqslant m}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{|p|}D^p\big(A_{p;k,j}\varphi_k\big),\ j=1,2,\ldots,N\,,$$

其中 ${}^tA_p$ 为矩阵 A_p 的转置 ①.

方程 (5.6.1) 因此表示, 对任意 $\varphi\in(\mathscr{D})$, 均有

$$T.D'\varphi-B.\varphi=0\,. \tag{5.6.6}$$

若 T 和 B 为函数, 上式不牵涉 T 通常意义下的导数; 故通常意义下不可导连续函数也可为这样方程的解 ②. 特别地, 若 $B=0$, 齐次方程的解就是与所有 $D'\varphi$, $\varphi\in(\mathscr{D})$ 正交的广义函数. 方程 $D'T=0$ 就是通常所说的伴随方程. 当然, 方程 $D'T=0$ 的

① 在无穷可微流形上也可以很容易地定义偏微分方程组.

② 公式 (5.6.6) 正是 Leray [1], pp. 204 – 206, Hilbert [1], 第 2 卷, p. 469, Bochner [2] 以及 [3], pp. 158 – 182 所给出的偏微分方程的“弱解”的定义. 也见本书引论. 参见例子, 公式 (5.6.33).

伴随方程 $D''T=0$ 就是原来的齐次方程 $DT=0$, 因为若算子 D' 和 D'' 在 $(\mathscr{D}')$ 的稠密子空间 $(\mathscr{D})$ 上完全确定, 则它们在 $(\mathscr{D}')$ 上也完全确定; 而对任意 $\varphi,\psi\in(\mathscr{D})$,

$$D\varphi.\psi=\psi.D'\varphi=D''\psi.\varphi. \tag{5.6.7}$$

常微分方程 这里我们取 $N\geqslant 1$ 为任意的整数. 若变量 x 的空间的维数 n 为 1, 则偏微分方程组 (5.6.1) 变为常微分方程组. 称该方程组正则, 若 $T_1,T_2,\ldots,T_N$ 的最高阶导数可作为方程组的未知元被解出. 于是我们总可以添加新的未知广义函数来将之归结为一阶的情形. 由此我们将假设所给的方程组为如下矩阵形式:

$$\begin{cases} DT=\dfrac{dT}{dx}+AT=B\,, \quad \text{即} \\ (DT)_j=\dfrac{dT_j}{dx}+\displaystyle\sum_{k=1}^{N}A_{j,k}(x)T_k=B_j \quad (1\leqslant j\leqslant N)\,. \end{cases} \tag{5.6.8}$$

定理 9. *对任意广义函数 B (常数项), 正则方程组 (5.6.8) 均有无穷多个解. 两解之差为齐次方程组的任意解, 故必为无穷可导函数, 也就是说为齐次方程组通常意义下的解.*

该结论在整体和局部上均成立.

齐次方程组在 $x=0$ 处取值 $u(0)=\big(u_1(0),u_2(0),\ldots,u_N(0)\big)$ 的通常意义下的解可由下列公式给出:

$$u(x)=C(x)u(0)\,, \tag{5.6.9}$$

其中 $C(x)$ 为矩阵 $\big(C_{j,k}(x)\big)$:

$$u_j(x)=\sum_{k=1}^{N}C_{j,k}(x)u_k(0) \quad (1\leqslant j\leqslant N)\,. \tag{5.6.10}$$

由于那些系数 $A_{j,k}$ 无穷可导, 故矩阵 $C(x)$ 无穷可导; 该矩阵还可逆 (其行列式即 Wronskian 不为 0) 且其逆矩阵 $C^{-1}(x)$ 也是无穷可导, 并借助 $u(0)=C^{-1}(x)u(x)$ 将解 u 在原点处的值表示成它在点 x 处的值的函数. 矩阵 $C(x)$ 为矩阵微分方程

$$\frac{dC}{dx}+AC=0 \quad \text{即} \quad \frac{dC_{j,k}}{dx}+\sum_{l}A_{j,l}C_{l,k}=0 \tag{5.6.11}$$

唯一的满足在 $x=0$ 处等于单位矩阵 I 的通常意义下的解. 由此我们就可以通过 “常数变异法” 来求解 (5.6.8). 令

$$T=CS \quad \text{即} \quad T_j=\sum_{k}C_{j,k}S_k\,. \tag{5.6.12}$$

对于任意的 T, 由此可以得到唯一一个 S, 这是因为 S 可由

$$S = C^{-1}T \tag{5.6.13}$$

来确定. 于是沿用经典的计算, 我们将得到下述等价于 (5.6.8) 的方程组:

$$C\frac{dS}{dx} = B \quad 即 \quad \frac{dS}{dx} = C^{-1}B. \tag{5.6.14}$$

问题由此转化成寻求一个广义函数的原函数; 而对任意的 B, 此时总有无穷多个解.

两解之差为齐次方程组的任意解; 因此对于 $B=0$, 由第 2 章定理 1 可知 S 为常向量 $k=(k_1,k_2,\ldots,k_N)$, 而 $T=Ck$ 则为齐次方程组通常意义下的解.

齐次方程组只有通常意义下的解这一个事实, 可以通过另外一种方式来理解. 若齐次方程组的解 T 的阶不大于 l $(l \geqslant 1)$ (相应地 T 为测度, 函数或 l 阶连续可微函数), 公式 (5.6.8) (此时 $B=0$) 表明 $\frac{dT}{dx}$ 也将会具有同样性质; 故由第 2 章定理 2, 定理 3 及其推论知 T 的阶不大于 $l-1$ (相应地 T 为函数, 连续函数或 $l+1$ 阶连续可微函数). 但根据第 3 章定理 20 可知 T 在任何紧集上的阶 $< +\infty$, 故 T 必为无穷可导函数, 因此它是齐次方程组通常意义下的解. 更为一般地, 若 B 为连续函数, 则方程组仅有通常意义下的解.

现假设方程组 (5.6.1) 非正则. 则它一般没有解. 比如说对于 $N=1$, 一阶方程

$$x^2\frac{dT}{dx} + 2T = 0 \tag{5.6.15}$$

在原点的余集上仅有解:

$$T = \begin{cases} k_1 \exp(1/x^2), & 若\ x>0, \\ k_2 \exp(1/x^2), & 若\ x<0. \end{cases} \tag{5.6.16}$$

然而可知不存在能在原点邻域内延拓 T 的广义函数 (若 k_1 或 k_2 不为 0), 这是因为当 $x \to 0$ 时 T 增长得过快 (见后面第 7 章定理 8). 方程 (5.6.15) 仅有零解. 相反, 当 Fuchs 定理① 的条件满足时, 方程组则会有一些解所依赖的常数的个数大于 N. 例如, 当 $N=1$ 时, 一阶方程

$$x\frac{dT}{dx} - \lambda T = 0 \tag{5.6.17}$$

的通解就依赖两个常数 [参见公式 (2.2.27) 和 (2.2.28)]:

$$T = \begin{cases} k\left(\mathrm{Pf.}\, x^{-l}\right) + k'\delta^{(l-1)}, & 若\ \lambda=-l<0\ 为整数, \\ k_1\left(\mathrm{Pf.}\, x^{\lambda}\right)_{x>0} + k_2\left(\mathrm{Pf.}\, |x|^{\lambda}\right)_{x<0}, & 其它. \end{cases} \tag{5.6.18}$$

① 关于广义函数的 Fuchs 型方程的一般情形已由 Methée [2] 解决.

偏微分方程的解的一个性质

定理 10. *每个偏微分方程组的全部解构成广义函数空间的一个闭向量子空间.*

事实上, 若在 $(\mathscr{D}')$ 中, 方程组的解 T_j (依赖 j) 收敛于广义函数极限 T, 那么由算子 D 的连续性可知 DT 为 DT_j 的极限, 故 $DT = B$.

尽管该定理对任意偏微分方程均成立, 但通常的证明却仅针对于 Laplace 方程 (*调和函数的任意一致极限为调和函数*) 或椭圆方程. 这是因为, 比如说在双曲方程的情形, 若 $B = g$ 为函数而 T_j 为方程在通常意义下的函数解 f_j 且一致收敛于极限函数 f, 则 f 可能会在通常意义下不可导, 故不是通常意义下的解; 它只能是广义函数论意义下的解. 相反地, 在后面我们将会看到, 对于一个椭圆方程, 它的任意广义函数解均无穷可导: 见定理 12. 为了回到通常的情形, 由定理 10 可导出:

若 m 阶偏微分方程组通常意义下的解 f_j 在任意紧集上一致收敛于极限函数 f 且 f 为 m 阶连续可微, 那么即使对 f_j 的各阶导数的收敛性不作任何假设 (实际上它们在通常意义下一般也不收敛于任何极限), 函数 f 也为方程组通常意义下的解.

Cauchy 问题 基本形式的 Cauchy 问题在于寻求 m 阶偏微分方程组 (5.6.1) 在通常意义下的解 $T = f$ (其中 B 为一个函数 g), 使得该解的所有的阶不大于 $m-1$ 的偏导数在一个足够正则的超曲面 S 上等于事先给定的函数. 若 ∂ 为定义在 S 的邻域上的横截求导 (参见第 2 章第 3 节例 5), 横截导数 $\partial^k f$ $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ 在 S 上显然确定了所有其它的阶不大于 $m-1$ 的导数. 人们通常会提出一个更为高级的 Cauchy 问题, 仅仅要求 f 在 S 的余集 Ω 上为 m 阶连续可微, 在 Ω 中满足 (5.6.1), 并且定义在 Ω 内的横截导数 $\partial^k f$ $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ 在 S 上具有给定的极限 $f^{(k)}$ [“在 S 上有极限”这一说法可以在一个更为广泛的意义下来理解], 但不假设 f 在 S 上有切向导数. 我们自然可以只限于讨论局部的 Cauchy 问题.

为此, 在 S 的邻域内的一边, 也即在位于 S 的邻域内的 Ω 的两连通分支 Ω', Ω'' 当中的一个内来寻求 f. 设 f', g' 为在 Ω' 内等于 f, g 而在 Ω'' 内等于 0 的函数. 假设, 比如说超曲面 S 以及横截求导 ∂ 为 m 阶连续可微, 利用第 2 章第 3 节例 1 中的方法可知 Df' 在 S 的邻域内为通常意义下的导数 $[Df'] = g'$ 与支撑在 S 上完全由 Cauchy 条件 $f^{(k)}$ $(k \leqslant m-1)$ 确定的多层 H 之和. 这对于基本形式的 Cauchy 问题来说是显然的. 对于高级的 Cauchy 问题, 首先将 S 换成 Ω' 中的一个与之很接近的超曲面 S', 由此使得 f' 在 S' 上为 m 阶连续可微, 随后再让这个超曲面趋近于 S. 函数 $T' = f'$ 因此会受到三种条件的约束:

1° 在广义函数论的意义下, 它应为下述带修正常数项的偏微分方程组的解:

$$DT' = g' + H, \tag{5.6.19}$$

其中 H 依赖初始条件 $f^{(k)}$.

2° 其支集应包含于 $\overline{\Omega'} = \Omega' \cup S$.

3° 它应满足某些正则性条件: 它在 Ω' 内应为一个 m 阶连续可微函数 f', 且其各阶导数 $\partial^k f'$ $(k \leqslant m-1)$ 应在 S 上有极限.

如上提出的新问题会与最初的 Cauchy 问题等价吗? 仅当 $\partial^k f'$ 在 S 上的极限等于给定函数 $f^{(k)}$, 也就是说两组不同的初始条件定义两个不同的广义函数 H 时, 新问题才与最初的 Cauchy 问题等价. 可以证明, 若 S 在任意点处为"非特征的", 则二者总是等价; 若 S 为"特征超曲面", 则二者永远不会等价[①].

例. *a*) 考虑方程 $(N=1)$

$$\frac{\partial^m T}{\partial x_n^m} + \sum_{|p| \leqslant m, p_n < m} A_p D^p T = B, \tag{5.6.20}$$

其中 S 为超平面 $x_n = 0$, Ω' 为区域 $x_n > 0$; 而 $\partial = \partial/\partial x_n$. 那么

$$\begin{aligned}(5.6.21)\ H = &\sum_{\nu=1}^{\nu=m} f^{(\nu-1)}_{x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}} \otimes \left(\frac{d}{dx_n}\right)^{m-\nu} \delta_{x_n} \\ &+ \sum_p A_p(x) \left[\sum_{\nu=1}^{\nu=p_n} \frac{\partial^{|p|-p_n}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_{n-1}^{p_{n-1}}} f^{(\nu-1)}_{x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}} \otimes \left(\frac{d}{dx_n}\right)^{p_n-\nu} \delta_{x_n}\right],\end{aligned}$$

这里记号 $\otimes$ 表示一个关于 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ 的广义函数与另一个关于 x_n 的广义函数之间的张量积 (第 4 章); 另外 $f^{(k)}$ 的各阶切向导数属于 $(\mathscr{D}')_{x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}}$. 若 $H=0$, 依次让阶为 $m, m-1, \ldots$ 的多层为零, 则由分解 (3.10.5), (4.5.7) 的唯一性可知

$$f^{(0)} = f^{(1)} = \cdots = f^{(m-1)} = 0.$$

b) 考虑方程 $(N=1,\ n=2,\ m=2)$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} = B, \tag{5.6.22}$$

其中 S 和 ∂ 的选取如*a*) 中一样. 于是 S 为特征超曲面. 又我们有

$$H = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_1} \otimes \delta_{x_2}; \tag{5.6.23}$$

由 $H=0$ 仅能导出 $f^{(0)}$ 为常数, 而 $f^{(1)}$ 则可以是任意的.

---

① 译者注: 关于特征超曲面的定义, 见 F. Treves 的名著 Basic linear partial differential equations. Academic Press (1975), pp. 162 – 163.

在如上提出的广义函数论 Cauchy 问题中, 条件 (1°) 将初始条件融入常数项中, 这就解释了偏微分方程理论中的那些常见公式. 条件 (2°) 一般可由基本解的支集的性质立刻导出. 仅条件 (3°) 难以验证. 另外, 众所周知对条件 (3°) 没有令人满意的解决方案, 这是因为它要求的可微性条件比所给方程所需要的可微性条件还要强. 在广义函数论中, 所找到的广义函数 T' 一旦满足了条件 1° 和 2°, 大家就可以认为 Cauchy 问题已得到圆满解决. 在一些重的要情形 [参见第 6 章第 5 节公式 (6.5.26)], 如上提出的问题会相对简单且有唯一解; 至于该解是一个任意的广义函数还是一个足够正则的函数 (条件 3°), 则是一个更为精细和次要的问题.

现在若在 Ω'' 中对同样的常数项 g 和初始条件 $f^{(k)}$ 来求解 Cauchy 问题, 此时应将 H 换成 $-H$. 于是将得到的广义函数 T', T'' 相加后 H 会被抵消掉, 由此可得下面的延拓定理:

定理 11. *设 (5.6.1) 是以连续函数 g 为常数项的 m 阶偏微分方程组, 超曲面 S 为 m 阶连续可微而 ∂ 为在 S 的邻域上给定的一个 m 阶连续可微横截求导. 若连续函数 f 在 Ω' 和 Ω'' 内 m 阶连续可微且满足 (5.6.1), 并在 S 的两边分别在 S 上满足同样的 Cauchy 初始条件, 那么 f 在广义函数论的意义下在 $\mathbb{R}^n$ 中满足 (5.6.1).*

当然 f 可能不是方程组在通常意义下的解, 因为它在 S 上可能没有切向导数. 这就解释了为什么如同定理 10, 人们通常仅能针对椭圆方程来陈述该定理:

分别定义在 S 的两边的两个调和函数, 若它们本身及其法向导数在 S 上重合, 则它们当中的每一个均是另外一个的延拓.

基本解 首先考虑单个 m 阶方程 ($N = 1$) 的情形. 基本解通常被定义成齐次方程在一点处具有某种类型的奇异性的通常意义下的解. 我们认为应彻底抛弃此定义. 我们称广义函数 $e_{(a)}$ 为关于点 $a \in \mathbb{R}^n$ 和微分算子 D 的基本解, 若它满足

$$De_{(a)} = \delta_{(a)} = \text{仅在点 } a \text{ 处有质量 } +1\,, \tag{5.6.24}$$

这等价于说, 若 D' 为算子 D 的转置而 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 则

$$e_{(a)} . D'\varphi = \varphi(a)\,. \tag{5.6.25}$$

基本解可能仅在点 a 的邻域内局部存在. 但若关于点 a 有一个基本解, 则显然就有无穷多个: 任意两个基本解之差为齐次方程 $DT = 0$ 的任意解.

我们已给出了下列微分算子关于原点的基本解:

$$\begin{array}{llllll} \Delta^k & [(2.3.19)]\,, & \left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k & [(2.3.22)]\,, & \frac{\partial}{\partial \bar z} & [(2.3.28)]\,, \\ \Box^k & [(2.3.34)]\,, & \frac{\partial^k}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_k} & [(4.5.11)]\,. & & \end{array}$$

关于 $\mathbb{R}^n$ 中任意一点 a 的基本解可通过平移而得到, 这是因为所考虑的算子的系数为常数, 因而平移不变. 对形如 (5.6.20) 的 m 阶微分方程 ($n = 1$), 公式 (5.6.21) 表明

若函数 f 在 $x<a$ 时等于 0, 而在 $x\geqslant a$ 时等于与初始条件

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-2)}(a)=0\,,\ f^{(m-1)}(a)=1\ (\text{通常意义下的导数})$$

相对应的齐次 Cauchy 问题的解, 则 f 为关于点 a 的基本解; 另外, 这也是唯一那个支集包含在右半直线 $x\geqslant a$ 里的基本解, 这是因为别的基本解是由添加齐次方程的一个解而得到, 因此其支集就是整个实轴 (这对于齐次方程通常意义下的解来说是显然的, 因为它自己本身以及所有的阶不大于 $m-1$ 的导数在一点处均为零的解恒等于零; 而根据定理 9, 除了那些通常意义下的解以外, 就没有别的解).

对于方程组 (N 为任意), 基本解被定义为 $N\times N$ 的矩阵 $e_{(a)}$, 该矩阵的 N^2 个系数 $e_{(a);j;k}$ 均为广义函数且满足矩阵方程

$$De_{(a)}=I\delta_a\,, \tag{5.6.26}$$

其中 I 为单位矩阵. 若采用更为具体的记号来表示, 则上式等价于说

$$\sum_{\substack{|p|\leqslant m\\ 1\leqslant k\leqslant N}} A_{p;j,k}D^p e_{(a);k,l}=\begin{cases}0\,, & \text{若 } j\neq l\,,\\ \delta_{(a)}\,, & \text{若 } j=l\,.\end{cases} \tag{5.6.27}$$

例如, 对于 (5.6.8) 中的常微分方程组 ($n=1$), 关于原点的基本解为 YC, 其中 Y 为 Heaviside 函数 (第 2 章第 2 节例 1), 而矩阵 C 由公式 (5.6.11) 所确定, 这是因为

$$\frac{d}{dx}(YC)+AYC=\delta I+Y\frac{dC}{dx}+YAC=\delta I\,. \tag{5.6.28}$$

而函数 $Y(x-a)C(x)C^{-1}(a)$ 为关于点 a 的一个基本解. 该基本解也是唯一那个支集包含在右半直线 $x\geqslant a$ 上的基本解.

回到 $N=1$ 的情形. 若函数 φ 足够光滑有紧支集为非齐次方程 $D'\varphi=\psi$ 的解, 那么由公式 (5.6.25) 可得

$$\varphi(a)=e_{(a)}\cdot\psi\,. \tag{5.6.29}$$

由此可知非齐次方程的一个解在点 a 处的值, 若我们能拥有该方程的伴随方程关于点 a 的一个基本解 ①.

① 在这里我们不可能给出关于基本解的所有文献. 首先要提的是 Hadamard 先生关于 Cauchy 问题的工作 [1], 该研究使得基本解变得极为重要; 在维数 n 为奇数的情形, Hadamard 的基本解与这里讲的意思不一样, 因此与我们所介绍的没有任何关系 [公式 (2.3.34)]. 另外还需指出的是: Zeilon [1], [2], Herglotz [1], Bureau (对各种方程特别是双曲方程进行了系统研究并给出了显式表达式: [1], [2], [3], [4], 等等), Marcel Riesz [2] (Riesz 先生的那些在常系数方程情形为基本解的卷积的算子, 解决了 Cauchy 问题且避免了 Hadamard 方法的计算困难), Leray [2], F. John [1], Kodaira [1], de Rham [3], Garnir, 尤其是 [3], [4], Gårding [1], Schwartz [12]. 任意一个常系数偏微分方程均有基本解: Malgrange [1], [2], Ehrenpreis [1], Hörmander [1], [2].

基本核 所谓 $\mathbb{R}^n$ 上的核[①] 就是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的一个广义函数. 每个这样的核 $K_{x,\xi}$ 在 $(\mathscr{D})_{x,\xi}$ 上定义了一个连续线性型, 因此更是 $(\mathscr{D})_x \times (\mathscr{D})_\xi$ 上的亚连续双线性型:

$$(u,v) \to K_{x,\xi}.u(x)v(\xi)\,, \quad u \in (\mathscr{D})_x,\ v \in \mathscr{D})_\xi\,.$$

于是 $u \to K.uv$ 为 $(\mathscr{D})_x$ 上的连续线性型, 从而为 $(\mathscr{D}')_x$ 中的广义函数; 该广义函数线性地依赖 $v \in (\mathscr{D})_\xi$, 故我们可将之记作 $K \cdot v$; 则 $v \to K \cdot v$ 为从 $(\mathscr{D})_\xi$ 到 $(\mathscr{D})_x$ 的连续线性映射 ${}^tL_K$. 同样 $v \to K.uv$ 也是 $(\mathscr{D})_\xi$ 上的连续线性型, 因此为 $(\mathscr{D}')_\xi$ 中的广义函数, 该广义函数线性地依赖 u, 我们将之记作 $u \cdot K$; 则 $u \to u \cdot K$ 为从 $(\mathscr{D})_x$ 到 $(\mathscr{D})_\xi$ 的连续线性映射, 恰为 ${}^tL_K$ 的转置, 我们将之记作 L_K.

如果 K 为局部可积的函数, 那么由 Fubini 定理可知, 对几乎所有 x (相应地, 对几乎所有 ξ), 该函数关于 ξ (相应地, 关于 x) 局部可积且对几乎所有 x (相应地, 对几乎所有 ξ), 我们有:

$$(K \cdot v)(x) = \iint \cdots \int K(x,\xi)v(\xi)\,d\xi\,,$$

$$(u \cdot K)(\xi) = \iint \cdots \int K(x,\xi)u(x)\,dx\,.$$

称核 K 关于 x*半正则*或*左半正则*, 若 ${}^tL_K$ 将 $(\mathscr{D})_\xi$ 映入 $(\mathscr{E})_x$, 此时 ${}^tL_K$ 是一个从 $(\mathscr{D})_\xi$ 到 $(\mathscr{E})_x$ 的*连续* 线性映射 (我们可利用比如说闭图像定理来得到此结论[②]: 由于 ${}^tL_K$ 为从 $(\mathscr{D})_\xi$ 到 $(\mathscr{D})_x$ 的连续线性映射, 故其图像为 $(\mathscr{D})_\xi \times (\mathscr{D})_x$ 中的闭集, 因此更是 $(\mathscr{D})_\xi \times (\mathscr{E})_x$ 中的闭集). 借助转置, 这等价于说 L_K 可连续延拓成从 $(\mathscr{E}')_x$ 到 $(\mathscr{D}')_\xi$ 的连续线性映射.

同样地, 称核 K 关于 ξ*半正则*或*右半正则*, 若 L_K 将 $(\mathscr{D})_x$ 映入 $(\mathscr{E})_\xi$, 则 L_K 为从 $(\mathscr{D})_x$ 到 $(\mathscr{E})_\xi$ 的*连续*线性映射; 而这又等价于说 ${}^tL_K$ 可以连续延拓成从 $(\mathscr{E}')_\xi$ 到 $(\mathscr{D}')_x$ 的连续线性映射.

称核 K*正则*, 若它同时关于 x 和 ξ 半正则. 这里我们不关心使一个核为半正则或正则的那些条件[③].

称核 K*极正则*, 若它关于 ξ 半正则且对任意 $S \in (\mathscr{E}')_\xi$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 中任意开集 Ω, 当 S 为 Ω 上无穷可导函数时 $K \cdot S$ 亦如此. 由此知 K 关于 x 半正则, 故 K 正则. 若 K 为极正则, 则它在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 的对角线 $x = \xi$ 的余集上为关于 x, ξ 的无穷可导函数 [为此设 Ω_1, Ω_2 为 $\mathbb{R}^n$ 的两不相交开集; 若 $S \in (\mathscr{E}')_\xi$ 的支集包含于 Ω_1, 则 $K \cdot S$ 在 Ω_2 上为无穷可导函数, 故 K 定义了一个从 $(\mathscr{E}'_{\Omega_1})$ 到 $(\mathscr{E}_{\Omega_2})$ 的线性映射 $({}^tL_K)_{\Omega_1,\Omega_2}$;

① 见 Schwartz [7], [9], [10], [11]. 我们这里所称的 ${}^tL_K$ 就是 [7] 中所谓的 $\mathscr{L}_K$.

② 见 Bourbaki [6], 第 15 分册, 定理 1 的推论 5, p. 37. 闭图像定理, 对从一个 Fréchet 空间到另外一个 Fréchet 空间的映射成立, 也对从一个 $\mathscr{LF}$ 空间到一个 Fréchet 空间的映射平凡成立. 译者注: 所谓 "$\mathscr{LF}$ 空间" 指一个可表示成一列 Fréchet 空间正向极限的拓扑向量空间, 例如 $(\mathscr{D})$.

③ 见 Schwartz [7], pp. 227 – 228, 以及 [10] 中的命题 23 和命题 24, p. 55.

由于 $(\mathscr{E}')$ 为自反 Fréchet 空间的对偶, 故完备且为有界型, 又 $(\mathscr{E})$ 为 Fréchet 空间, 故这里闭图像定理可用①, 由此可知映射 $({}^tL_K)_{\Omega_1,\Omega_2}$ 连续; 则 K 为正则化核②, 从而在 $\Omega_1\times\Omega_2$ 上为无穷可导函数, 进而它在对角线的余集上亦是如此]. 反过来, 若正则核 K 在对角线的余集上为无穷可导函数, 则 K 为极正则 [为此设 $S\in(\mathscr{E}')_\xi$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的可设之为相对紧的开子集 Ω 上为无穷可导函数. 设 ω 为开集并且其闭包包含在 Ω 中; 而 $\alpha\in(\mathscr{D})$ 为在 ω 上等于 1 且其支集包含在 Ω 中的函数. 则 $\alpha S\in(\mathscr{D})_\xi$, 从而由 K 关于 x 半正则知 $K\cdot\alpha S$ 为无穷可导函数. 另外, 由 K 关于 ξ 半正则, 于是 $K\cdot S$ 以及 $K\cdot(1-\alpha)S$ 均有意义; 又由于 K 在 $\omega\times\complement\bar\omega$ 上为无穷可导函数, 因此 K 为正则化核, 也即说 $({}^tL_K)_{\omega,\complement\bar\omega}$ 是一个从 $(\mathscr{E}'_{\complement\bar\omega})$ 到 $(\mathscr{E}_\omega)$ 的连续线性映射, 而 $K\cdot(1-\alpha)S$ 为 ω 上因此也是 Ω 上的无穷可导函数, 故 K 极正则]. 若 K 极正则而 S 在 $(\mathscr{E}')_\xi$ 中趋于 0 且在开集 Ω 上的限制在 $(\mathscr{E}_\Omega)$ 中趋于 0, 则 $K\cdot S$ 在 $(\mathscr{D}')_x$ 中趋于 0 且它在 Ω 上的限制在 $(\mathscr{E}_\Omega)$ 中趋于 0 (重新沿用前述记号, 事实上可知 $K\cdot\alpha S$ 在 $(\mathscr{E})_x$ 中趋于 0 且 $K\cdot(1-\alpha)S$ 在 $(\mathscr{E}_\omega)$ 中趋于 0, 前者是因为 K 关于 x 半正则, 而后者则是由于 K 在 $\omega\times\complement\bar\omega$ 上的限制为正则化核).

称核 K *解析极正则*, 若它关于 ξ 半正则且对任意 $S\in(\mathscr{E}')_\xi$ 及 $\mathbb{R}^n$ 中任意开集 Ω, 当 S 为 Ω 上解析函数时 $K\cdot S$ 亦如此. 我们不研究一个核在何条件下会有此性质③.

定义. *设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 上系数无穷可导的微分算子. 核 E 被称为 D 的左基本核或左逆核* (相应地, *右基本核或右逆核*), *若对任意 $\varphi\in(\mathscr{D})_\xi$, 我们有:*

$$E\cdot D\varphi=\varphi\quad\left[\text{相应地, } D(E\cdot\varphi)=\varphi\right]. \tag{5.6.30}$$

若 E 关于 ξ 半正则, 由连续延拓知将 φ 换成 $S\in(\mathscr{E}')_\xi$ 时同样关系式也成立.

若 D 为 $N\times N$ 矩阵微分算子, 其基本核也为 $N\times N$ 矩阵, 该矩阵的元素为核且它满足同样的关系式 (5.6.30). 在左基本核的情形, 等式 $E\cdot D\varphi=\varphi$ 意味着

$$\sum_{k,l}E_{j,k}\cdot D_{k,l}\varphi_l=\varphi_j\quad(1\leqslant j\leqslant N).$$

若 D 有左基本核 E, 则非齐次方程 $D\varphi=\psi\in(\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{D})$ 中*至多*有一个解, 因为此时必有 $\varphi=E\cdot\psi$. 若 E 关于 ξ 正则, 将 $(\mathscr{D})$ 换成 $(\mathscr{E}')$ 同样的结果也成立.

若 D 有右基本核 E, 则非齐次方程 $DT=\psi\in(\mathscr{D})$ *至少*有一个解, 因为 $T=E\cdot\psi$ 就是这样的一个解. 若 E 关于 ξ 正则, 将 $(\mathscr{D})$ 换成 $(\mathscr{E}')$ 同样的结果也成立.

因此若存在左基本核, 则会有一些唯一性定理, 若存在右基本核, 则会有一些存在性定理. 可以想象, *双边基本核* (也即同时为左、右基本核) 的存在会很有用④.

---

① 关于闭图像定理的有效性, 见 Bourbaki [6], 第 8 分册, 习题 13. d, p. 36; 关于 $(\mathscr{E}')$ 为有界型这一事实, 见 Grothendieck [4], 定理 7, p. 73.

② 见 Schwartz [7], 定理 8, pp. 228 – 229.

③ 见 de Barros Neto – Browder [1], 以及 de Barros – Neto [1].

④ 基本核仅部分解决存在性定理, 因为需对常数项做限制: 其支集为紧集. 对于双曲方程组的 Cauchy 问题, 可去掉该限制 (常系数的情形, 见 pp. 127 – 128 和 Malgrange [1], Ehrenpreis [1]).

理解基本解与基本核这些概念之间的关系会很有益处.

设核 E 关于 x 半正则. 对任意 $a \in \mathbb{R}^n$, $E \cdot \varphi$ 在点 a 处的值为 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 的连续线性映射, 因此定义了一个广义函数 $e_{(a)}$. 另外 $a \to e_{(a)} . \varphi = (E \cdot \varphi)(a)$ 为无穷可导函数, 故广义函数 $e_{(a)}$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中关于参数 a 连续可导. 因此这等价于说 E 为 D 的左基本核, 也即说, 对任意 $a \in \mathbb{R}^n$, $e_{(a)}$ 为 D 的转置算子 D' 关于点 a 的基本解. 事实上, 公式 (5.6.30) 等价于说, 对任意 $a \in \mathbb{R}^n$, 我们有

$$(5.6.31) \qquad (E \cdot D\varphi)(a) = \varphi(a), \quad \text{也就是说 } e_{(a)} . D\varphi = \varphi(a) \text{ 即 } D' e_{(a)} = \delta_{(a)} .$$

于是从 D 的一个关于 x 半正则的左基本核出发, 对任意 a, 均可得到 D' 关于 a 的一个基本解, 且后者关于 a 无穷可导. 可以证明其逆命题也成立[①].

利用同样的推理可知, 从 D 的一个关于 ξ 半正则的右基本核出发, 对任意 a, 均可得到 D 自己关于 a 的基本解且后者关于 a 无穷可导; 反之亦然. 于是若 D 为常系数微分算子而 e 为 D 关于原点的基本解, 则 e 的 a 平移为 D 关于 a 的基本解且该解关于 a 无穷可导; 由此推出存在 D 的可被记作 $e_{x-\xi}$ 的正则的右基本核[②]; 对任意的 $T \in (\mathscr{E}')$, $e_{x-\xi} \cdot T$ 为卷积 $e * T$ (见第 6 章). 我们将不再详细讨论此问题; 这里仅指出 $N = 1$ 时, $e_{x-\xi}$ 也为 D 的左基本核故为双边基本核; 而对称核 $e_{\xi - x}$ 为伴随算子 D' 的双边基本核. 若 e 为函数, 则 $e_{x-\xi}, e_{\xi-x}$ 为函数 $e(x-\xi), e(\xi - x)$.

在实际应用中, 给出偏微分方程组基本解的大多数方法也同时给出该方程组的正则基本核. 我们仅指出, 对于形如 (5.6.8) $(n = 1)$ 的任意方程, 函数

$$(5.6.32) \qquad E(x, \xi) = Y(x - \xi) C(x) C^{-1}(\xi)$$

为极正则的双边基本核, 而当方程的系数为解析函数时, 该函数为解析极正则.

椭圆方程组解的正则性 与在常微分方程的情形 $(n = 1)$ 所得到的不同 (见定理 9), 齐次 $(B = 0)$ 偏微分方程 $(n > 1)$ 一般会有异于其通常意义下的解的其它解; 它的解可为任意的没有通常意义下的导数的连续函数, 任意的测度或广义函数. 比如说, 当 $B = 0$ 时, 方程 (5.6.22) 的通解为

$$(5.6.33) \qquad T = U + V ,$$

其中 U 仅依赖 x_1, 而 V 仅依赖 x_2; 除此以外对 U, V 没有任何别的限制. 同样地, 任意的一阶 $(m = 1)$ 实系数偏微分方程 $(N = 1)$ 总有一些局部的阶可任意高的广义函数解. 任意的偏微分双曲方程组亦如此. 另外, 长期以来人们已在使用偏微分双曲方程的一些非连续函数解; 但"解"这个词的定义则通常极为复杂.

---

① 关于半正则核的刻画, 见 SCHWARTZ [7], p. 228, 或 SCHWARTZ [9], 命题 23 和命题 24, p. 55.

② 参见 SCHWARTZ [7], 公式 (25), p. 228, 以及 SCHWARTZ [9], 命题 2 和命题 4, pp. 55 – 56.

相反, 存在某些类齐次偏微分方程组, 它们的广义函数解必为无穷可导函数, 也即为偏微分方程组通常意义下的解.

定义. 称 (矩阵) 微分算子 D 为亚椭圆 (相应地, 解析亚椭圆) 微分算子, 如果对 $\mathbb{R}^n$ 的任意开集 Ω, 当 DT 在 Ω 上为无穷可导 (相应地, 解析) 函数时 T 亦如此. 此时齐次方程 $DT=0$ 的任意解 T 为无穷可导 (相应地, 解析) 函数①.

在经典分析中, 称一个微分算子为椭圆微分算子, 若它的最高次项的全体满足某种正性条件. 比如说, 在 $N=1$ 的情形, 对于二阶算子

$$D=\sum_{j,k} g_{jk}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}+\sum_j a_j\frac{\partial}{\partial x_j}+b,$$

假设二次型 $\sum_{j,k} g_{jk}\xi_j\xi_k$ 为正定 (或负定). 此时可证明齐次方程的解均为无穷可导函数, 并且当 D 的系数为解析函数时齐次方程的解也解析 (Bernstein 定理②). 我们可推广该性质并证明前面定义的算子 D, 特别是 Laplace 算子 Δ③, 为亚椭圆算子. 更一般地, 我们可定义任意阶的椭圆微分算子并证明它们的亚椭圆性④.

定理 12. 若系数为无穷可导函数的 (矩阵) 微分算子 D 具有极正则的 (相应地, 解析极正则的) 左基本核 $E_{x,\xi}$, 那么 D 为亚椭圆 (相应地, 解析亚椭圆) 微分算子. 于是如果 T 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋近于 0 而 DT 在 $(\mathscr{E})$ 中趋近于 0 (特别地, 如果 T 为齐次方程 $DT=0$ 的解), 则 T 在 $(\mathscr{E})$ 中趋近于 0⑤.

首先假设 T 的支集为紧集. 由于 E 为左基本核且为右正则, 于是 $T=E\cdot DT$. 又因为 T 为极正则 (相应地, 解析极正则), 则对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意开集 Ω, 若 DT 在 Ω 上为无穷可导 (相应地, 解析) 函数, 则 T 在 Ω 上亦如此.

现假设 T 的支集任意而 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集使得 DT 在 Ω 上为无穷可导 (相应地, 解析) 函数. 设 ω 为相对紧开集且其闭包包含于 Ω. 设 $\beta\in(\mathscr{D})$ 的支集包含在 Ω 中且在 ω 上等于 1. 则 βT 有紧支集且 $D(\beta T)$ 在 ω 上等于 DT, 于是 $D(\beta T)$ 在 ω 上为无穷可导 (相应地, 解析) 函数; 从而 βT 也是如此, 故 T 在 ω 上进而在 Ω 上也是如此, 因此 D 为亚椭圆 (相应地, 解析亚椭圆) 微分算子.

---

① 在第一版中所使用的术语“椭圆”太容易引起误会. 这就是为什么我们现在用“亚椭圆”, 而保留“椭圆”的经典意义.

② S. Bernstein [2].

③ 在广义函数的意义下满足 Laplace 方程 $\Delta f=0$ 的任意函数 f, 为无穷可导函数, 因此为 Laplace 方程通常意义下的解. 该事实时常被应用于调和函数理论中 (Weyl 引理, H. Weyl [1]).

④ 见 Malgrange [4], Schwartz [16'], Hörmander [3], 第 3 部分第 7 章第 4 节, p. 176.

⑤ 在本书第一版中所给出的条件并不涉及核理论中的记号, 这使得它们缺乏启发性. 另外那些条件也并不充分: 它们等价于假设左基本核关于 x 半正则且在对角线的余集上为无穷可导函数, 因此还需额外假设左基本核关于 ξ 半正则, 从而为正则进而为极正则. 事实上, 在第 138 页倒数第 14 行至倒数第 4 行的证明中有一个错误: 我们其实并不知道那些在其邻域内 βT 为无穷可导函数的点, 因为这正是所要证明的可微性!

最后假设 T 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋近于 0 且 DT 在 $(\mathscr{E}_\Omega)$ 中趋近于 0. 那么 βT 在 $(\mathscr{E}')$ 中趋近于 0 且 $D(\beta T)$ 在 $(\mathscr{E}_\omega)$ 中趋近于 0. 由第 101 页中所指出那个极正则核的性质可知 $\beta T = E\cdot D(\beta T)$ 在 $(\mathscr{E}_\omega)$ 中趋近于 0, 从而 T 在 $(\mathscr{E}_\omega)$ 中进而在 $(\mathscr{E}_\Omega)$ 中趋近于 0. 这就是所要证明的 ①.

评注. 我们刚才应用了基本核这一强大工具. 借助 D 的极正则“左拟基本解”, 也就是说满足下式的极正则核 ϖ,

$$\varpi \cdot D\varphi = \varphi + L\cdot\varphi, \tag{5.6.34}$$

我们也可以得到同样的结果, 其中 L 为在整个 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的 x,ξ 的无穷可导函数. 若 ω 为这样的一个左拟基本解而 $\alpha\in(\mathscr{D})$ 在原点的邻域上等于 1, 则 $\alpha(x-\xi)\varpi_{x,\xi}$ 为另一个左拟基本解; 这使得我们可以使用在开集 $|x-\xi|>\varepsilon$ 上为零的左拟基本解, 这里 $\varepsilon>0$ 可以取得任意小. 另外还可逐步证明, 若 DT 无穷可导, 则 T 具有所要的任意可导性; 为此只需拥有满足较少限制条件的核 ϖ: 故 L 应仅为“改良”核而不是一个无穷可导函数即正则化核, 也就是说只要使 $L\cdot T$ 为比 T 更正则的广义函数. 这样的核 ϖ 可用非常初等的方法来构造 ②.

现在来看看该定理的几个应用.

1° 设 D 为常系数标量微分算子 $(N=1)$, 而 e 为关于原点的基本解. 则 $e_{x-\xi}$ 为 D 的正则双边基本核 (第 102 页). 该核极正则当且仅当它在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 的对角线的余集上为无穷可导函数, 也即当且仅当 e 在 $\mathbb{R}^n$ 的原点的余集上为无穷可导函数.

正因如此, 微分算子 $\Delta^k, (1-\frac{\Delta}{4\pi^2})^k, \frac{\partial}{\partial\bar z}$ 为亚椭圆 [公式 (2.3.19), (2.3.22), (2.3.28)]. 抛物算子, 比如说热算子:

$$\frac{\partial}{\partial x_n}-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

也为亚椭圆算子, 因为其基本解

$$e(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi x_n}}\right)^{n-1}\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2}{4x_n}\right)Y(x_n) \tag{5.6.35}$$

在原点的余集上无穷可导. Hörmander 先生研究了所有常系数的亚椭圆算子 ③.

---

① 上述收敛性可以不用基本核来证明, 它实际上是亚椭圆性的定义和闭图像定理的推论. 参见 Malgrange [1], 第 3 章命题 2.

② 这就是所谓的奇异积分算子方法. 参见, 比如说 Seeley [2], Cartan – Schwartz [1], 报告 11, p. 11. 09, Mizohata [1].

③ 见 Hörmander [1], 以及 Hörmander [2], 第 2 部分, 第 4 章第 4.1 节, p. 97.

2° 若 D 为常系数, 可以证明 $e_{x-\xi}$ 为解析极正则当且仅当 e 在原点的余集上为解析函数[①]. 正因如此, 微分算子 $\Delta^k, (1-\frac{\Delta}{4\pi^2})^k, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 为解析亚椭圆. 但热算子不是, 因为虽然其基本解 e 在原点的余集上为齐次方程的解, 但它在该开集上不解析.

3° 直线上的任意常微分方程组 ($n=1$) 为亚椭圆的, 因为双边基本核 (5.6.32) 为极正则; 若方程组的系数为解析函数, 则该方程组为解析极正则.

4° 若 D_1 和 D_2 为亚椭圆微分算子, 则 D_1D_2 亦如此. 因为若 D_1D_2T 在 $\mathbb{R}^n$ 的某一个开集上为无穷可导函数, 则由 D_1 为亚椭圆的可知 D_2T 亦如此, 再由 D_2 为亚椭圆的可知 T 亦如此. 反过来, 若 D_1D_2 为亚椭圆的, 则 D_2 亦如此. 因为若 D_2T 在 $\mathbb{R}^n$ 的某个开集上为无穷可导函数, 则 D_1D_2T 亦如此, 从而由 D_1D_2 为亚椭圆的可知 T 亦如此. 而算子 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中为亚椭圆的这一事实, 正是源于 $\Delta = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 为亚椭圆的这一事实.

评注. 我们可以提下列问题:

1° 若常微分方程组使得其齐次方程 $DT=0$ 的解均为无穷可导 (相应地, 解析) 函数, 该方程组是否为亚椭圆 (对应地, 解析亚椭圆)? 在常数系数方程 ($N=1$) 的情形的确如此[②].

2° 如果一个任意的齐次偏微分方程组的所有通常意义下的解, 它们一旦是足够可导 (相应地, 无穷可导) 就会无穷可导 (相应地, 解析), 那么该方程组的所有广义函数解是否为无穷可导 (相应地, 解析)? 对于常系数方程组, 我们将既不用基本核也不用拟基本解来证明该定理 (第 6 章定理 29).

大家可设想定理 12 在变分计算的直接方法中的所有应用. 比如说设 V^n 为一个紧的、定向无穷可微 Riemann 空间. 大家知道[③], 与任意的 r 阶微分形式 ω, 对应着一个 $n-r$ 阶的伴随微分形式 ω^*. 我们将令 $(\mathscr{H})$ 为满足 $\iint\cdots\int \omega\omega^* < +\infty$ 的 r 阶微分形式 ω 所构成的 Hilbert 空间, 其点积为:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \iint \cdots \int \alpha\beta^* \quad [\alpha, \beta \in (\mathscr{H})]. \tag{5.6.36}$$

对于这些微分形式, 当它们为可微时, 可以定义其求导 d 和余求导 ∂; 而当它们不可微时, 则 $d\omega$ 和 $\partial\omega$ 为流.

称微分形式 ω 为闭形式 (相应地, 余闭形式), 若在广义函数论的意义下 $d\omega=0$ (相应地, $\partial\omega=0$). 这等价于说 ω 与所有无穷可微、上同调 (相应地, 同调) 于 0 的微分形式 φ 相正交. 又 d 和 ∂ 为关于流的连续线性算子, 由此可导出 $(\mathscr{H})$ 中所有闭形式 (相应地, 余闭形式) 组成的子空间为 $(\mathscr{H})$ 的闭子空间.

① 见 SCHWARTZ [12], 报告 6.

② 关于亚椭圆情形, 见 HÖRMANDER [1], 定理 3.7, p. 231; 第 271 页定理 3.2 的推论 3.1 证明了, 若齐次方程的解均为解析函数, 则该方程没有特征超平面, 从而为解析椭圆方程.

③ 见 DE RHAM [3], 第 5 章, 以及 KODAIRA [1], 第 3 章.

闭形式 ω 的周期为积分

$$\iint\cdots\int\omega\varphi^*,$$

其中 φ 跑遍一个极大的、由上同调独立的无穷可微余闭形式组成的集合. 在 $(\mathscr{H})$ 中, 每个同调类由具有给定周期的闭形式的全体组成, 因此为 $(\mathscr{H})$ 的一个非空仿射闭子空间 W. 于是存在 $\omega \in (\mathscr{H})$ 为 $(\mathscr{H})$ 中原点 0 在 W 上的正交投影. 该微分形式 ω 属于 W, 因此是闭形式; 它垂直于过 0 且与 W 平行的流形, 故与 $(\mathscr{H})$ 中同调于 0 的所有微分形式正交, 它因此为余闭微分形式. 于是在广义函数论的意义下, 它满足:

$$\Delta\omega = d\partial\omega + \partial d\omega = 0\,.$$

但根据定理 12, 该微分形式 ω 为通常意义下的无穷可微 (解析, 若 V^n 为解析) 调和微分形式. 于是借助于对我们来说最适合于所讨论的问题的方法, 我们证明了在每一个同调类中均存在调和微分形式. 别的变分问题也可用同样的方式来处理. 一般地, 求解椭圆"边值问题"时首先要依靠定理 12①.

① 在 Lions [1] 中可以找到许多利用这种思想来处理的椭圆边值问题.

第六章　卷积

内容提要　本章将 $\mathbb{R}^n$ 上函数的卷积的经典性质推广到广义函数; 该章对整个理论以及各种实际应用来说都非常重要.

第 1 节给出了两个函数 f 和 g 的卷积的通常定义

$$h = f * g = \iint \cdots \int f(x-t)g(t)\,dt \quad [公式\,(6.1.1)]$$

以及该卷积的主要性质.

第 2 节给出了卷积的另外一种形式的定义, 该定义可被推广到广义函数: 广义函数 S 和 T 的卷积被定义为

$$(S * T).\,\varphi = (S_\xi \otimes T_\eta).\,\varphi(\xi + \eta) \quad [公式\,(6.2.4)]\,.$$

当上述两广义函数中至少有一个的支集为紧集时, 该卷积总存在 (定理 1, p. 111).

第 3 节给出了广义函数的卷积的基本性质: 连续性 (定理 5, p. 113), 结合律与交换律 (定理 7, p. 114). 平移与求导为特殊的卷积 (定理 8, p. 114), 由此可得卷积的平移或求导的法则 (定理 9, p. 115); 这些部分地为人熟知的性质是符号计算, 积分方程和偏微分方程理论, Fourier 变换和 Laplace 变换的基础.

卷积是唯一可与求导交换的连续线性运算 (定理 10, p. 117).

第 4 节研究了"正则化": 广义函数 T 关于无穷可导函数 α 的正则化, 也即 T 与 α 的卷积 $T * \alpha$, 其本身也为无穷可导函数 (定理 11, p. 119). 广义函数的正则化具有与函数的正则化类似的应用 (逼近定理). 在本节的末尾将给出一些基本例子.

第 5 节将卷积推广到每个广义函数的支集均非紧的情形. 该推广是单变量符号计算的基础, 对在电学中的应用, 非整数阶求导, 形式求解常系数常微分方程或积分方程来说都很重要. 多变量情形的类似推广是常系数双曲偏微分方程理论的基础.

第 6 节讨论"细微理论": 从广义函数导数的局部性质出发来研究其本身的局部性质. 本节提出了一些很困难的问题但没有将它们都解决, 该节仅在一些非常特殊、纯理论性的问题中有用处, 而不会在本书的其它部分用到 (除了定理 19, p. 137).

第 7 节从一个广义函数的正则化出发来给出其性质. Tauber 型定理 20 (p. 138), 定理 21 (p. 140) 和定理 24 (p. 143) 在该理论中很有价值. 正则化是一个可用来刻画广义函数的有界集或收敛序列的非凡工具: 定理 22 (p. 140) 和定理 23 (p. 142) 时常会在后面的各种理论应用中用到. 技术人员可以跳过本节.

第 8 节引入一些新的、类似经典的 L^p 空间的广义函数空间 ($\mathscr{D}'_{L^p}$). 这些空间有许多理论和实际应用, 特别是 $(\mathscr{D})'_{L^\infty}$ 也即 $(\mathscr{B}')$ ["在 $\mathbb{R}^n$ 上有界"的广义函数空间]. 大家可以很容易理解和应用这些定理而无需知道它们的那些有时是很棘手的证明.

第 9 节研究"概周期广义函数", 该节是第 8 节的简单应用. 我们还不知道这些广义函数是否有实际应用.

在第 10 节中, 我们将会给出卷积在偏微分方程、积分方程, 以及更为一般的"卷积方程"[公式 (6.10.1)] 中的应用. 我们正确地定义了基本解 (6.10.7) 并给出它的主要性质. 势论中的经典 Poisson 公式 (6.10.18) 为其特殊情形. 定理 29 (p. 155) 与第 5 章的定理 12 很类似, 它证明了常系数椭圆偏微分方程解的解析性. 本节末尾同时研究调和函数与上调和函数, 并将 F. Riesz 分解公式 (6.10.32) 作为一个非常一般性的研究的特殊情形而给出.

记号. 设 A 和 B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的两个集合, 令 $A+B$ (相应地, $A-B$) 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有形如 $x+y$ (相应地, $x-y$) 这样的元素所组成的集合, 其中 $x \in A$, $y \in B$. 若上述两集合中的一个为开集, 则 $A+B$ 为开集; 若 A 和 B 均为紧集, 则 $A+B$ 为紧集; 若两集合当中的一个为闭集而另外一个为紧集, 则 $A+B$ 为闭集.

§1. 通常意义下的卷积的定义

两个函数的卷积 卷积在越来越多的分析领域起着越来越重要的作用: 概率计算, 符号计算, 群论, Fourier 级数与 Fourier 积分, 势论, 积分方程[①].

卷积与群的结构相联. 在本章中, 我们将在群 $\mathbb{R}^n$ 上讨论卷积, 但所得到的结论几乎可以不加修改地在环面 $\mathbb{T}^n$ 或乘积 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^n$ 上成立; 那些不涉及群的交换律的结论甚至在李群上也成立[②].

对于 $\mathbb{R}^n$ 上的两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 我们将它们的卷积记作 $h = f * g = g * f$, 这是 $\mathbb{R}^n$ 上由下述公式所定义的另外一个函数:

$$h(x) = \iint \cdots \int f(x-t)g(t)\,dt = \iint \cdots \int g(x-t)f(t)\,dt\,. \tag{6.1.1}$$

① 关于经典卷积的研究, 参见 A. WEIL [1], 第 3 章.

② 在 RISS [1] 中可以找到关于任意局部紧阿贝尔群上的卷积的研究.

当 f 和 g 为任意函数时, 该函数 h 没有定义. 首先 f 和 g 应在任意的紧集上可积; 其次它们须在无穷远处递降地足够快以保证定义 h 的那个积分绝对收敛; 比如说, 若 f 为任意函数, 则当 $|x|$ 趋于无穷时 g 的递降速度应与 f 的递增速度一样快.

$a)$ 易见, 当 $f \in L^p$, $g \in L^q$ 时 (其中 $1 \leqslant p \leqslant +\infty, 1 \leqslant q \leqslant +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geqslant 0$), 函数 h 几乎处处有定义且 $h \in L^r$, 这里 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$:

$$(6.1.2)\quad \left(\iint \cdots \int |h(x)|^r \, dx\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\iint \cdots \int |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint \cdots \int |g(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

当 $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, $p = q = r = 1$ 时, 该不等式变成等式. 当 $r = +\infty$ 时, 函数 h 处处有定义且为连续; 此时除非 $p = +\infty$ 或 $q = +\infty$, 函数 h 将随 $|x| \to +\infty$ 而趋于 0.

$b)$ 若函数 f, g 当中的一个在任意紧集上可积而另外一个在任意紧集上为 L^p 类, 并且它们当中的一个还具有紧支集, 则 h 几乎处处存在且在任意紧集上为 L^p 类; 当 $p = +\infty$ 时, 函数 h 处处有定义且为连续.

若 f 和 g 均有紧支集, 则 h 也有紧支集.

评注. 在零测度集上改变 f, g 不会影响 h; 由于 h 一般仅几乎处处有定义, 因此卷积更适合于在任意紧集上可积、几乎处处有定义的函数的类而不是函数本身.

函数与测度的卷积 我们也可定义函数 $f(x)$ 与测度 μ 的卷积; 它为函数 $h(x)$:

$$(6.1.3)\qquad h(x) = \iint \cdots \int f(x - t) \, d\mu(t).$$

如何交换 f 和 μ 的作用有些让人棘手; 我们时常通过引入那个用于定义 μ 的有界变差函数来达到这个目的, 正如我们所知, 后者是 μ 的一个原函数 (第 2 章定理 2). 后面我们将不加区别地将 h 记作 $f * \mu$ 或 $\mu * f$. 这里 f 和 μ 也需要满足某些条件来保证 h 的存在性. 函数 f 应在任意紧集上可积.

$a)$ 若 f 为 L^p 类而 μ 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 则 h 几乎处处存在且为 L^p 类, 其中

$$(6.1.4)\quad \left(\iint \cdots \int |h(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\iint \cdots \int |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\iint \cdots \int |d\mu|\right).$$

当 $f \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $p = 1$ 时, 上述不等式变成等式.

$b)$ 若 f 在任意紧集上为 L^p 类且 f 或 μ 有紧支集, 则 h 几乎处处存在且在任意紧集上为 L^p 类; 若 f 还连续, 则 h 处处有定义且为连续. 若 μ 为绝对连续测度, 则我们可将它与某个函数 g 视为等同, 此时 $f * \mu$ 恰好就是 $f * g$.

评注. 虽没有前面的来得那么显然, 但我们依然可证明, 若在某一个零测度集上改变 f, 则 h 也只会在一个零测度集上发生改变.

两个测度的卷积 若现在 μ 和 ν 是两个测度, 则我们也可以 (比如说, 利用定义 μ 和 ν 的有界变差函数) 来定义它们的卷积, 该卷积为测度 $\lambda=\mu*\nu=\nu*\mu$.

$a)$ 若 μ 和 ν 可积, 则卷积有意义, 此时 λ 可积且

$$\iint\cdots\int|d\lambda|\leqslant\left(\iint\cdots\int|d\mu|\right)\left(\iint\cdots\int|d\nu|\right), \tag{6.1.5}$$

当 $\mu,\nu\geqslant 0$ 时, 该不等式变成等式.

$b)$ 当其中一个测度任意而另外一个有紧支集时, 卷积也有意义. 若这两个测度当中至少有一个, 比如说 μ 为绝对连续, 因此可被视为等同于函数 f, 则卷积 $\mu*\nu$ 是一个绝对连续的测度 λ, 该测度可被视为等同于 h, 也即前面定义的卷积 $f*\nu$.

测度的卷积常被应用于概率计算; 如果 μ 和 ν 为 $\mathbb{R}^n$ 中的向量的两个分布律, 则它们是总质量均为 1 的两个非负测度; 假设涉及的向量为两个独立的随机变量, 则它们之和遵守由测度 $\lambda=\mu*\nu$ 所给出的分布律; 由此可理解为何 λ 也是总质量等于 1 的非负测度.

§2. 空间 $\mathbb{R}^n$ 上的两个广义函数的卷积

泛函定义. 两个函数的情形 我们将修改卷积定义, 将 f,g,h 看成广义函数来引入卷积的泛函定义. 对任意 $\varphi\in(\mathscr{D})$, 计算

$$\begin{aligned}h(\varphi)&=\iint\cdots\int h(\varphi)\varphi(x)\,dx\\&=\iint_{x\in\mathbb{R}^n}\cdots\int\cdot\iint_{t\in\mathbb{R}^n}\cdots\int\varphi(x)f(x-t)g(t)\,dx\,dt\,.\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

作变量替换 $x-t=\xi,\ t=\eta$ 可得:

$$h(\varphi)=\iint_{\xi\in\mathbb{R}^n}\cdot\int\cdot\iint_{\eta\in\mathbb{R}^n}\cdot\varphi(\xi+\eta)f(\xi)g(\eta)\,d\xi\,d\eta\,. \tag{6.2.2}$$

对于我们在第 1 节中讨论的所有情形, 上述计算均正确, 所得积分为绝对收敛. 我们由此可见该公式的价值: 首先它直接凸显了 f,g 的对称作用; 其次它可被推广到测度和广义函数. 事实上, 若 f 和 g 为 $\mathbb{R}^n$ 上给出的函数, 则 $f(\xi)g(\eta)$ 为 $2n$ 维空间 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的函数, 其中每一个点 (ξ,η) 的坐标为 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ \eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$. 在第 4 章中, 我们已将这个拥有 $2n$ 个变量的函数称为张量积, 并记作 $f(\xi)\otimes g(\eta)$. 另外, 若 φ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的无穷可导函数, 则 $\varphi(\xi+\eta)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上有确切定义的无穷可导函数; 而 $h(\varphi)$ 恰好是 $f(\xi)\otimes g(\eta)\in(\mathscr{D}')_{\xi,\eta}$ 与函数 $h(\xi+\eta)\in(\mathscr{E})_{\xi,\eta}$ 的点积. 对任意的 $\varphi(x)\in(\mathscr{D})_x$, 该性质定义了 $h(\varphi)$ 且完全刻画了函数 h. 于是若我们将上面最后那个定义拓广到 f,g 为广义函数的情形, 则当这些广义函数为函数且使得通常意义下的卷积有定义时, 我们肯定可以重新得到通常意义下的卷积.

两个广义函数的情形 为此设 S, T 为 $\mathbb{R}^n$ 上的任意两个广义函数, 其张量积 $S_\xi \otimes T_\eta$ 作为 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的广义函数总存在; 提请大家注意, 对于变量 ξ, η 的一个形如 $u(\xi)v(\eta)$ 这样的函数, 我们有

$$(S_\xi \otimes T_\eta).\left[u(\xi)v(\eta)\right] = S(u)T(v)\,. \tag{6.2.3}$$

另外, 正如我们在前面所说, 若 $\varphi \in (\mathscr{D})_x$, 则 $\varphi(\xi+\eta)$ 为无穷可导函数, 但其支集不是紧集, 除非 $\varphi \equiv 0$: 其支集事实上是与"第二平分线" $\xi + \eta = 0$ 平行的一些仿射流形的并集. 在这些条件下, 当 S 和 T 为任意时 $(S_\xi \otimes T_\eta).\varphi(\xi+\eta)$ 没有意义; 如同我们在第 1 节所见, 还须在无穷远处满足某些递降条件. 特别地, 当 $S_\xi \otimes T_\eta$ 的支集与 $\varphi(\xi+\eta)$ 的支集的交集为紧集时, 上述表达式总有意义 (参见第 63 页).

对支集的限制 这里我们仅讨论广义函数中的一个, 比如说 S 有紧支集 A 的情形. 那么当 $\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中有紧支集 K 时, 上述条件均成立. 事实上, 张量积 $S_\xi \otimes T_\eta$ 的支集包含在 $A \times \mathbb{R}^n$ 中; 而 $\varphi(\xi+\eta)$ 的支集则可以由关系式 $\xi + \eta \in K$ 来确定, 于是这两个支集的交集 I 中的任意点均满足 $\xi \in A$, $\xi + \eta \in K$, 故 $\eta \in K - A$, 即 I 包含在紧集 $A \times (K - A)$ 中. 利用第 63 页中的方法, 我们可以引入一个在 A 的邻域上等于 1 且有紧支集的无穷可导函数 $\alpha(\xi)$, 从而由第 3 章第 7 节中的公式可得

$$\begin{aligned}(S * T)_x.\varphi(x) &= (S_\xi \otimes T_\eta.\varphi(\xi+\eta) \\ &= (S_\xi \otimes T_\eta).\left[\alpha(\xi)\varphi(\xi+\eta)\right],\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

这里函数 $\alpha(\xi)\varphi(\xi+\eta)$ 有紧支集且在 $S_\xi \otimes T_\eta$ 的支集的邻域上等于 1. 我们因此可以对任意的 $\varphi \in (\mathscr{D})_x$ 来定义 $(S * T).\varphi$. 若现在 $\varphi_j \in (\mathscr{D})_x$ 在 $(\mathscr{D})_x$ 中趋于 0 且其支集包含在同一紧集 K 中, 则 $\alpha(\xi)\varphi_j(\xi+\eta)$ 的支集包含在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 的某固定紧集中, 且这些函数本身及其各阶导数一致趋于 0; 由于 $S_\xi \otimes T_\eta$ 为 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的广义函数, 故 $(S_\xi \otimes T_\eta).\left[\alpha(\xi)\varphi_j(\xi+\eta)\right]$ 趋于 0. 上述线性型 $(S * T).\varphi$ 因此为 $\mathbb{R}^n$ 上广义函数.

存在性与计算 我们因此有下述结论:

定理 1. *若 S 和 T 为 $\mathbb{R}^n$ 上的任意两个广义函数且其中至少有一个广义函数的支集为紧集, 则存在确定的广义函数, 称为 S 和 T 的卷积且被记作 $S * T$ 或 $T * S$, 使得对任意 $\varphi(x) \in (\mathscr{D})_x$, 均有*

$$(S * T)_x.\varphi(x) = (S_\xi \otimes T_\eta).\varphi(\xi+\eta)\,^{①}. \tag{6.2.5}$$

在后面我们将有机会见到可使卷积有定义的别的情形 (第 5 节和第 8 节).

① 该卷积表达式曾被用于两个测度的卷积; 参见 A. WEIL [1], 第 3 章.

在紧支集情形定义卷积没有任何困难这一事实表明, 定义卷积的唯一麻烦源于无穷远处的增长性而不是局部非正则性. 这完全不同于广义函数的乘积 (第 5 章); 那时无穷远处的性态毫不重要, 仅局部正则性起作用. 如同我们在研究广义函数的乘积时曾假设两个广义函数当中的一个在局部上完全正则, 即为通常意义下的无穷可导函数, 我们这里则假设它们当中的一个在无穷远处完全正则, 即具有紧支集.

利用我们关于广义函数的张量积所得到的结论可以导出, 我们可通过两个逐次"积分"来计算卷积 (Fubini 定理: 参见第 4 章定理 4):

$$(6.2.6)\qquad \begin{cases} (S*T).\varphi = (S_\xi \otimes T_\eta).\varphi(\xi+\eta) = S_\xi.[T_\eta.\varphi(\xi+\eta)] \\ \qquad\qquad = T_\eta.[S_\xi.\varphi(\xi+\eta)]. \end{cases}$$

若 S 具有紧支集, 则 $S_\xi.\varphi(\xi+\eta)$ 为关于变量 η 的一个具有紧支集的无穷可导函数 $\chi(\eta)$, 故我们可计算 $T_\eta.\chi(\eta)$; 而 $T_\eta.\varphi(\xi+\eta)$ 则是关于变量 ξ 的一个无穷可导但支集任意的函数 $\psi(\xi)$, 又 S 具有紧支集, 因此我们也可计算 $S_\xi.\psi(\xi)$. 上述这两种方法应给出同样的结论.

注意到 $\varphi(\xi+\eta)$ 为函数 $\varphi(x)$ 在从 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射 $H:(\xi,\eta)\to\xi+\eta$ 下的*转置像* (参见第 1 章第 5 节第 3° 段), 则 $S*T$ 为张量积 $S_\xi\otimes T_\eta$ 在映射 H 下的*直接像* [公式 (1.5.6)]. 但映射 H 在无穷远处不正则, 正是这个原因导致 $S*T$ 对于两个任意的广义函数一般没有意义, 但对于具有紧支集的广义函数却总有意义.

§3. 卷积的性质

支集 **定理 2.** *若 S 和 T 的支集分别为 A 和 B (二者当中至少有一个支集为紧集), 则 $S*T$ 的支集包含在和集 $A+B$ 中.*

集 $A+B$ 为闭集; 设 Ω 为它在 $\mathbb{R}^n$ 中的余集. 我们只需证明, 若 $\varphi(x)\in(\mathscr{D})$ 的支集包含在 Ω 中, 则 $(S*T).\varphi$ 为零. 函数 $\varphi(\xi+\eta)$ 在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的支集包含在由关系式 $\xi+\eta\in\Omega$ 所定义的开集中; 而 $S_\xi\otimes T_\eta$ 的支集等于 $A\times B$ (第 4 章定理 5), 故可由关系式 $\xi\in A$, $\eta\in B$ 来定义, 由此导出 $\xi+\eta\in A+B$; 于是 $\varphi(\xi+\eta)$ 的支集与 $S_\xi\otimes T_\eta$ 的支集没有公共点, 从而 $(S_\xi\otimes T_\eta).\varphi(\xi+\eta)$ 为零.

特别地, 若 S 和 T 均有紧支集, 则 $S*T$ 也有紧支集.

定理 3. *若 S 的支集为 A, 则 $S*T$ 在开集 Ω 上的值仅依赖 T 在 $\Omega-A$ 上的值.*

事实上, 如果 $\varphi(x)$ 的支集包含在 Ω 中, 那么关系式 $\xi+\eta\in\Omega$ 可在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 中定义 $\varphi(\xi+\eta)$ 的支集的一个邻域. 又 $S_\xi\otimes T_\eta$ 的支集与 $\varphi(\xi+\eta)$ 的支集的交集 I 中每点 (ξ,η) 均满足 $\xi\in A$, 因此 $\eta\in\Omega-A$; 而 I 包含在 (开) 积集 $\mathbb{R}^n\times(\Omega-A)$ 中; 故若知 S 在 $\mathbb{R}^n$ 上的值以及 T 在 $\Omega-A$ 上的值, 则可知 $(S_\xi\otimes T_\eta).\varphi(\xi+\eta)$ 的值.

特别地, 若 S 的支集 A 很小且为坐标原点的邻域, 则 $S*T$ 的支集包含在 T 的支集的小邻域内且 $S*T$ 在开集 Ω 上的值仅依赖 T 在 $\overline{\Omega}$ 的小邻域上的值.

连续性 **定理 4.** 将 $S \in (\mathscr{E}')$, $T \in (\mathscr{E}')$ 与卷积 $S * T \in (\mathscr{E}')$ 相对应的映射为连续的双线性映射.

上述映射显然为双线性. 若 S, T 在 $(\mathscr{E}')$ 中趋于 0, 我们将证明 $S * T$ 在 $(\mathscr{E}')$ 中趋于 0 (提醒大家, 对于滤子, 趋于 0 并不意味着 S 和 T 保持有界). 该证明需借助第 4 章中关于 $(\mathscr{E}')$ 的定理 6. 若 φ 属于 $(\mathscr{E})$ 中有界集 B, 则 $\varphi(\xi+\eta)$ 属于 $(\mathscr{E})_{\xi,\eta}$ 中有界集 B_1. 于是当 S 和 T 在 $(\mathscr{E}')$ 中趋于 0 时, 张量积 $S_\xi \otimes T_\eta$ 在 $(\mathscr{E}'_{\xi,\eta})$ 中趋于 0, 从而 $(S_\xi \otimes T_\eta).\varphi(\xi+\eta)$ 关于 $\varphi(\xi+\eta) \in B_1$ 也即 $\varphi \in B$ 一致趋于 0. 由此得证.

我们也可这样来论证. 从 $(\mathscr{E}') \times (\mathscr{E}')$ 到 $(\mathscr{E}')$ 的映射 $(S, T) \to S_\xi \otimes T_\eta$ 为连续; 作为从 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射 $H : (\xi, \eta) \to \xi + \eta$ 的直接像 (第 1 章第 5 节第 3° 段), 从 $(\mathscr{E}')_{\xi,\eta}$ 到 $(\mathscr{E}')$ 的映射 $S_\xi \otimes T_\eta \to S * T$ 也连续. 虽然 H 在无穷远处并不正则, 但这对于有紧支集的广义函数来说毫不重要.

关于弱拓扑, 也有与第 3 章定理 11 一样的评注.

定理 5. 将 $S \in (\mathscr{E}')$, $T \in (\mathscr{D}')$ 与 $S * T \in (\mathscr{D}')$ 相对应的映射为亚连续双线性映射. 若 S 的支集包含在某个固定的紧集中, 则该映射甚至为连续双线性映射①.

a) 假设 S 的支集包含在某个固定紧集 A 中 (当 S 属于某个有界集时必如此), 同时选定公式 (6.2.4) 中的函数 $\alpha(\xi)$. 如果 φ 属于 $(\mathscr{D})$ 中有界集 B, 则 $\alpha(\xi)\varphi(\xi+\eta)$ 属于 $(\mathscr{D})_{\xi,\eta}$ 中某个有界集 B_1, 如同前面定理, 问题可被归结为第 4 章中的定理 6.

b) 若仅假设 S 在 $(\mathscr{E}')$ 中趋于 0 而 T 在 $(\mathscr{D}')$ 中有界, 则须采用另外一种证法. 大家可注意到, 若 φ 属于 $(\mathscr{D})$ 中有界集 B 而 ξ 属于某一个紧集, 则 $\varphi(\xi+\eta)$ 为 η 的函数且属于 $(\mathscr{D})_\eta$ 中某个有界集, 它关于 ξ 的各阶偏导数亦如此; 若 T 属于 $(\mathscr{D}')$ 中某个有界集, 则 $T_\eta.\varphi(\xi+\eta)$ 及其关于 ξ 的各阶偏导数在 ξ 所属的任意紧集上有界, 因此属于 $(\mathscr{E}_\xi)$ 中某个有界集 B_1; 于是若 S 在 $(\mathscr{E}')$ 中趋于 0, 那么 $S_\xi.[T_\eta.\varphi(\xi+\eta)]$ 关于 $\varphi \in B$ 一致趋于 0. 这就是所要证明的.

在实际应用中, 定理 5 最后那一部分仅会带来非常弱的限制.

相反, 可知上述双线性映射关于 $(\mathscr{E}')$ 上的拓扑不连续: 若 S 在 $(\mathscr{E}')$ 中趋于 0, 而 T 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0 但不假设它们有界, 那么 $S * T$ 不一定在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0 [这是因为 $\varphi(\xi+\eta)$ 没有紧支集]. 另外, 在实际应用中通常仅有亚连续性的条件就足够了. 关于弱拓扑, 我们也有与前面类似的评注.

卷积与张量积 **定理 6.** 若 X^m 和 Y^n 分别为 m 维和 n 维的向量空间, 则张量积的卷积为卷积的张量积: 若 $A_x \in (\mathscr{D}')_x$, $B_x \in (\mathscr{D}')_x$, $C_y \in (\mathscr{D}')_y$, $D_y \in (\mathscr{D}')_y$, 那么

$$(A_x \otimes C_y) * (B_x \otimes D_y) = (A_x * B_x) \otimes (C_y * D_y) . \tag{6.3.1}$$

① 该双线性映射不仅亚连续而且还连续这一事实, 是本书引论第 9° 段中所指出的那个一般性定理的推论; 参见 DIEUDONNÉ – SCHWARTZ [1], 定理 9, p. 96

为证明出现在等式两边的广义函数相等, 只需证明它们在任意形如 $u(x)v(y)$ 的函数 $\varphi \in (\mathscr{D})_{x,y}$ 处取相同值 (见第 4 章定理 3): 而这是显然的, 因为其公共值为

$$(A_\xi \otimes B_\eta \otimes C_\zeta \otimes D_\theta).\, u(\xi+\eta)v(\zeta+\theta)\,. \tag{6.3.2}$$

结合律与交换律 我们可以毫无困难地定义多个广义函数的卷积, 只要它们当中至多除了一个以外其余均具有紧支集.

定理 7. 至多除了一个以外其余均具有紧支集的若干个广义函数的卷积, 满足结合律和交换律.

事实上, 若 A, B, C 为三个广义函数, 我们将立刻有

$$(A * b * C).\, \varphi = (A_\xi \otimes B_\eta \otimes C_\zeta).\, \varphi(\xi+\eta+\zeta)\,. \tag{6.3.3}$$

结合律和交换律表明卷积使 $(\mathscr{E}')$ 变成一个交换的代数而 $(\mathscr{D}')$ 变成 $(\mathscr{E}')$ 上拓扑模.

评注. 若定理中所列出的条件不满足, 则卷积不一定满足结合律 [公式 (6.5.3)].

卷积, 平移, 求导 **定理 8.** 广义函数 T 与 Dirac 测度 δ 的卷积 $\delta * T$ 等于 T; 广义函数 T 与在点 h 处质量为 1 的测度 $\delta_{(h)}$ 的卷积 $\delta_{(h)} * T$ 等于 T 的平移 $\tau_h(T)$; 广义函数 T 与 Dirac 测度的偏导数的卷积 $\frac{\partial \delta}{\partial x_k} * T$ 等于偏导数 $\frac{\partial T}{\partial x_k}$.

$$\delta * T = T\,; \quad \delta_{(h)} * T = \tau_h(T)\,; \quad \frac{\partial \delta}{\partial x_k} * T = \frac{\partial T}{\partial x_k}\,. \tag{6.3.4}$$

事实上, 我们有

$$\begin{aligned}(\delta_{(h)} * T).\, \varphi &= T_\xi.\, [(\delta_{(h)})_\eta.\, \varphi(\xi+\eta)] = T_\xi.\, \varphi(\xi+\eta) \\ &= T.\, \tau_{-h}(\varphi) = \tau_h(T).\, \varphi\,.\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

特别地, 令 $h = 0$, 则我们可得 $\delta * T = T$; 这就表明 δ 为卷积代数的单位元. 另外, 若令 $h_k = (0, 0, \ldots, \varepsilon, 0, \ldots, 0)$, 则由偶极子的定义可知

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_{(h_k)} - \delta}{\varepsilon} = -\frac{\partial \delta}{\partial x_k}\,, \tag{6.3.6}$$

借助卷积的连续性以及公式 (3.4.3), 由此可得

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_k} * T = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\delta_{(h_k)} - \delta}{-\varepsilon} * T \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_{(h_k)}(T) - T}{-\varepsilon} = \frac{\partial T}{\partial x_k}\,. \tag{6.3.7}$$

但给出这个非常重要的公式的一个直接证明会更加有趣.

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial x_k} * T \right).\, \varphi = T_\xi.\, \left[\left(\frac{\partial \delta}{\partial x_k} \right)_\eta .\, \varphi(\xi+\eta) \right] = T_\xi.\, \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k} \right) = \frac{\partial T}{\partial x_k}.\, \varphi(x)\,. \tag{6.3.8}$$

由此可见求导是一种卷积运算. 其连续性 (第 3 章定理 18) 因此是卷积连续性定理 (定理 5) 的特殊情形. 由定理 7 立刻可导出下列结论.

定理 9. 为对卷积进行平移或求导, 只需对其中一个因子进行平移或求导.

这是 (6.3.4) 以及卷积满足结合律和交换律这一事实的直接推论:

$$\tau_h(S * T) = \delta_{(h)} * (S * T) = (\delta_{(h)} * S) * T = \tau_h(S) * T = S * \tau_h(T)\,, \tag{6.3.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(S * T) = \frac{\partial \delta}{\partial x_k} * (S * T) = \left(\frac{\partial \delta}{\partial x_k} * S\right) * T = \frac{\partial S}{\partial x_k} * T = S * \frac{\partial T}{\partial x_k}\,. \tag{6.3.10}$$

由此可知, 在对一个卷积进行多次求导时, 每次可只对一个因子求导, 但每次求导时我们可以选择不同的因子来施行求导运算. 于是

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(S * T) = \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_k} * T = S * \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial S}{\partial x_j} * \frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\partial S}{\partial x_k} * \frac{\partial T}{\partial x_j}\,. \tag{6.3.11}$$

当然这些公式广为人知; 但它们在应用时通常需附加一些很强的限制性条件: 必须假设 S 和 T 为通常意义下的无穷可微函数. 否则这些公式在通常意义下可能是错的且需添加一些附加项; 但在这里它们总成立. 用一个简单的例子就可以将之说清楚. 取 S 为 Heaviside 函数 $Y(x)$ (单变量的情形; $n = 1$), 它在 $x \leqslant 0$ 时等于 0 而在 $x > 0$ 是等于 $+1$, 令 T 为有紧支集的连续函数 f. 则在广义函数论的意义下,

$$\frac{d}{dx}(Y * f) = \frac{dY}{dx} * f = \delta * f = f\,, \tag{6.3.12}$$

但若我们遵循导数通常的定义, 则 $\frac{dY}{dx}$ 会几乎处处为零, 而生硬地应用公式 (6.3.10) 则会给出错误的公式

$$\frac{d}{dx}(Y * f) = \frac{dY}{dx} * f = 0.$$

对于在原点处具有第一类间断且"跳跃"为 g_0 的函数 $g(x)$, 人们通常利用下述公式来纠正上述错误:

$$\frac{d}{dx}(g * f) = g'(x) * f + g_0 f\,, \tag{6.3.13}$$

这等于是在广义函数论的意义下进行求导. 我们因此避免在各种特殊情形应用特别规则, 而在任何时候只需应用同一规则.

需指出的是, 公式 (6.3.4) 通常以如下形式应用于波动力学. 我们将采用函数的记号来记 Dirac 测度: Dirac 函数 $\delta(x)$. 我们以同样方式来记卷积, 就如同所涉及的都是函数 [(6.1.1)]. 于是 (6.3.4) 可以写成

$$\begin{cases} f(x) = \displaystyle\iint \cdots \int \delta(x - t) f(t)\, dt\,, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial x_k} = \displaystyle\iint \cdots \int \frac{\partial \delta}{\partial x_k}(x - t) f(t)\, dt\,. \end{cases} \tag{6.3.14}$$

卷积, 平移运算的线性组合 任意广义函数 $S \in (\mathscr{E}')$ 均为点质量的有限线性组合所构成的测度在 $(\mathscr{E}')$ 中的极限 (第 3 章定理 25 及其之后的有关结论):

$$S = \lim_j \sum_\nu a_{\nu j} \delta_{h_{\nu j}} = \lim_j \sum_\nu a_{\nu j} \tau_{h_{\nu j}} \delta \,. \tag{6.3.15}$$

而卷积的连续性则表明卷积 $S * T$ 为 T 的平移的有限线性组合的极限:

$$S * T = \lim_j \sum_\nu a_{\nu j} \delta_{h_{\nu j}} T \,. \tag{6.3.16}$$

我们曾在以前的一篇论文中反复运用该性质①.

公式 (6.3.16) 立刻让人联想到卷积的一个新定义. 设 T 为广义函数, 其平移 $\tau_h T$ 为 h 的函数, 该函数取值在广义函数空间 $(\mathscr{D}')$ 中且对任意 $h \in \mathbb{R}^n$ 都有定义. 正如我们在第 56 页所看到的, 这是一个关于 h 的无穷可导函数, 记作 $\Phi(h)$. 于是若 S 为变量 h 的空间 $\mathbb{R}^n$ 上的广义函数, 则我们可以计算 $S_h . \Phi(h)$②, 这是一个新的广义函数 (参见第 1 章第 5 节第 2° 段); 这个新的广义函数不是别的正是 $S * T$. 事实上, 对任意的 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 我们有

$$\Phi(h) . \varphi = \tau_h T . \varphi = T_x . \varphi(x+h) \,,$$

从而由 Fubini 公式 (6.2.6) 可得

$$[S_h . \Phi(h)] . \varphi = S_h . [T_x . \varphi(x+h)] = (S_h \otimes T_x) . \varphi(x+h) = (S * T) . \varphi \,, \tag{6.3.17}$$

特别地, 若 S 为有限多个质点组成的测度, 即

$$S = \sum_\nu a_\nu \delta_{(h_\nu)} \,, \tag{6.3.18}$$

则我们将有

$$S * T = \sum_\nu a_\nu \Phi(h_\nu) = \sum_\nu a_\nu \tau_{h_\nu}(T) \,, \tag{6.3.19}$$

这正是公式 (6.3.16) 的源头. 若 S 为连续函数 $f(x)$, 则我们可将 $f * T$ 表示成 T 的平移的常义均值

$$f * T = \iint \cdots \int f(h) \Phi(h) \, dh = \iint \cdots \int f(h) \tau_h(T) \, dh \,. \tag{6.3.20}$$

① SCHWARTZ [4].

② 若 S 有紧支集, 则我们可毫无困难地定义 $S_h . \Phi(h)$. 若是 T 有紧支集, 这时问题有些棘手: 事实上, 由于 Φ 没有紧支集, 按理说 $S_h . \Phi(h)$ 应该没有意义. 但 Φ 取点积后有紧支集, 这是因为对任意的 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 点积 $\Phi(h) . \varphi$ 作为 h 的函数具有紧支集, 而这足以来定义 $S_h . \Phi(h)$. 关于这个问题, 参见 SCHWARTZ [9], 命题 21, p. 135.

与求导可交换的运算 **定理 10.** 所有从 $(\mathscr{E}')$ 到 $(\mathscr{D}')$ 且与求偏导 $\frac{\partial}{\partial x_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 可交换的连续线性运算, 均为卷积运算

$$\mathscr{L}(T) = S * T\,, \tag{6.3.21}$$

其中 $S \in (\mathscr{D}')$ 为某个固定的广义函数; 反之亦然.

逆命题源于前面的讨论, 仅定理的正向需要证明. 由假设可知

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\mathscr{L}(T) = \mathscr{L}\left(\frac{\partial T}{\partial x_k}\right). \tag{6.3.22}$$

我们将证明运算 $\mathscr{L}$ 与平移 τ_h 可交换, 而这反过来由 (3.4.3) 可导出 (6.3.22):

$$\tau_h[\mathscr{L}(T)] = \mathscr{L}(\tau_h T)\,, \tag{6.3.23}$$

也就是说

$$\tau_h[\mathscr{L}(T)].\,\varphi(x-h) = \mathscr{L}(\tau_h T).\,\varphi(x-h)\,, \quad \varphi \in (\mathscr{D})\,, \tag{6.3.24}$$

而由于左边那项等于 $\mathscr{L}(T).\,\varphi(x)$, 故对固定的 T 和 φ, 我们仅需证明 h 的数值函数

$$\psi(h) = \mathscr{L}(\tau_h T).\,\varphi(x-h) \tag{6.3.25}$$

不依赖于 h. 为此我们将证明其偏导数为零.

$$\frac{\partial}{\partial h_k}\psi(h) = \left[\frac{\partial}{\partial h_k}\mathscr{L}(\tau_h T)\right].\,\varphi(x-h) + \mathscr{L}(\tau_h T).\,\frac{\partial}{\partial h_k}\varphi(x-h)\,. \tag{6.3.26}$$

对于右边中的第一项, 由 $\mathscr{L}$ 的连续性以及公式 (3.4.11) 和公式 (6.3.22), 可得:

$$\frac{\partial}{\partial h_k}\mathscr{L}(\tau_h T) = \mathscr{L}\left[\frac{\partial}{\partial h_k}(\tau_h T)\right] = -\mathscr{L}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_h T)\right] = -\frac{\partial}{\partial x_k}\mathscr{L}(\tau_h T)\,, \tag{6.3.27}$$

最终我们有

$$\frac{\partial}{\partial h_k}\psi(h) = \mathscr{L}(\tau_h T).\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi(x-h) + \frac{\partial}{\partial h_k}\varphi(x-h)\right] = 0\,. \tag{6.3.28}$$

根据 (6.3.16), 算子 $\mathscr{L}$ 因此可与由具有紧支集的广义函数所定义的卷积运算相交换. 这反过来可导出 (6.3.23) 和 (6.3.22). 令

$$\mathscr{L}(\delta) = S\,. \tag{6.3.29}$$

若 T 具有紧支集, 则我们有

$$\mathscr{L}(T) = \mathscr{L}(T * \delta) = T * \mathscr{L}(\delta) = S * T\,. \tag{6.3.30}$$

这就是所要证明的.

评注. 若 $\mathscr{L}$ 为从 $(\mathscr{D}')$ 到 $(\mathscr{D}')$ 的连续线性运算, 则 S 必有紧支集. 为此, 我们在 $\mathbb{R}^n$ 中考虑质量任意大、所处位置彼此无限远离的点测度 $C_\nu\delta_{(h_\nu)}$; 它们在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0, 因此其卷积变换 $C_\nu(S*\delta_{(h_\nu)}) = C_\nu(\tau_{(h_\nu)}S)$ 亦如此, 而当 S 的支集不紧时, 这是不可能的. 当 S 具有紧支集时, 对任意 $T\in(\mathscr{E}')$, 公式 (6.3.30) 均成立, 又 $(\mathscr{E}')$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中稠密, 于是通过取极限可知该公式对任意 $T\in(\mathscr{D}')$ 也成立.

推广 我们将在后面看到 (见第 142 页), 若 $\mathscr{L}$ 为从 $(\mathscr{D})$ 到 $(\mathscr{D}')$ 的连续线性运算且与偏导运算交换, 则它必为与 $(\mathscr{D}')$ 中广义函数的卷积运算. 这个一般性定理覆盖了实际应用中遇到的所有情形. 假设, 比如说 $\mathscr{L}$ 为从 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到它自己的连续线性运算且与作用在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的无穷可微函数上的求导运算交换 (或总与平移运算交换), 则它是从 $(\mathscr{D})$ 到 $(\mathscr{D}')$ 的连续线性运算, 因此形如 $\mathscr{L}(T) = S*T$, 其中 S 为广义函数, 它一般既不是一个函数也不是一个测度, 但满足下列性质: 若 $f\in(\mathscr{D})$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中趋于 0, 则 $S*f$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中趋于 0. 例如: $S = \mathrm{vp.}\,\frac{1}{x}$ $(n=1)$; 映射

$$f(x) \to \mathrm{vp.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{x-t}$$

在 $L^2(\mathbb{R})$ 中连续. 此时可知 S 为广义函数且其 Fourier 变换为有界函数. 然而上述一般性定理并不需要用到 Fourier 变换.

多项式求导算子 在整个卷积理论中, 有时用 $\frac{\partial}{\partial x_k}$ 表示广义函数 $\frac{\partial\delta}{\partial x_k}$ 会更方便, 则

$$\frac{\partial}{\partial x_k} * T = \frac{\partial\delta * T}{\partial x_k}. \tag{6.3.31}$$

但在这样的公式中没有必要区别 $\frac{\partial}{\partial x_k}$ 和 T 的作用; 它们只不过是要被施行卷积运算的两个广义函数, 因此我们也可以将之记作:

$$T * \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial T}{\partial x_k}. \tag{6.3.32}$$

(常系数) 求导算子多项式因此是有明确定义的广义函数:

$$D = \sum_p A_p D^p \quad (\text{第 1 章中的记号}), \tag{6.3.33}$$

其中 p 为 n 个非负整数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 所构成的数组, 上述和式为有限求和且 A_p 为复值常数; 而 D 则为下式的简写:

$$D\delta = \sum_p A_p D^p \delta, \tag{6.3.34}$$

从而对任意的 $T\in(\mathscr{D}')$, 我们有

$$DT = D*T = T*D. \tag{6.3.35}$$

这样的两个求导算子多项式的卷积就是关于 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ 的多项式之积:

$$\left(\sum_p A_p D^p\right) * \left(\sum_q B_q D^q\right) = \sum_{p,q} A_p B_q D^{p+q}. \tag{6.3.36}$$

由此可见, 卷积在由以原点为支集的广义函数所构成的向量空间上定义了一个代数结构, 并且该代数与多项式代数同构.

§4. 广义函数的正则化

定义 设 μ 为测度而 f 为连续函数 (其中一个具有紧支集). 在第 1 节中, 我们已知

$$\mu * f = \iint \cdots \int f(x-t)\, d\mu(t) = \mu_t . f(x-t). \tag{6.4.1}$$

该公式利用了 μ 为连续函数上的线性型这个泛函定义; 上述卷积为连续函数, 而前面的公式则定义了该函数在任意点 x 处的值. 上述公式可以如下方式来推广. 若 T 为广义函数, 而 α 为通常意义下的无穷可导函数 (二者当中一个具有紧支集), 则在假设 x 固定时 $\alpha(x-t)$ 为关于 t 的无穷可导函数; 我们因此可以计算

$$\theta(x) = T_t . \alpha(x-t), \tag{6.4.2}$$

这是一个关于 x 的函数, 且由第 4 章定理 2 可知它为无穷可导函数, 其中

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}[T_t . \alpha(x-t)] = T_t . \frac{\partial}{\partial x_k}[\alpha(x-t)]. \tag{6.4.3}$$

但变量 x 的这个在通常意义下无穷可导的函数不是别的正是卷积 $T * \alpha$; 事实上

$$\begin{cases} (T*\alpha).\varphi = T_\xi . [\alpha_\eta . \varphi(\xi+\eta)] = T_\xi . \displaystyle\iint \cdots \int \alpha(\eta)\varphi(\xi+\eta)\, d\eta \\ \qquad = T_\xi . \displaystyle\iint \cdots \int \alpha(x-\xi)\varphi(x)\, dx \\ \qquad = T_\xi \otimes \varphi_x . \alpha(x-\xi) \\ \qquad = \varphi_x . [T_\xi . \alpha(x-\xi)] = \varphi_x . \theta_x = \theta . \varphi. \end{cases} \tag{6.4.4}$$

我们因此有下述结论:

定理 11. *若无穷远处的正则性条件保证广义函数 T 与无穷可导函数 α 的卷积存在 $[T \in (\mathscr{D}'),\ \alpha \in (\mathscr{D})$; 或 $T \in (\mathscr{E}'),\ \alpha \in (\mathscr{E})]$, 则该卷积为通常意义下的无穷可导函数, 称为 T 关于 α 的正则化, 并且上述函数还可由下列公式给出*

$$(T*\alpha)_x = T_t . \alpha(x-t), \quad \frac{\partial}{\partial x_k}(T*\alpha) = T * \frac{\partial \alpha}{\partial x_k}. \tag{6.4.5}$$

同样可见, 若 $T \in (\mathscr{D}'^m),\ \alpha \in (\mathscr{D}^m)$ [或 $T \in (\mathscr{E}'^m),\ \alpha \in (\mathscr{E}^m)$], 则卷积 $T * \alpha$ 可由同一公式 (6.4.5) 给出且它为连续函数.

由上述定理可给出第 3 章定理 15 的一个极其优美的新证明. 若 T 为任意广义函数, 而 α 为具有紧支集的无穷可导函数, 则正则化 $T*\alpha$ 为无穷可导函数; 若 α_j 在 $(\mathscr{E}')$ 中趋于 δ (比如说 $\alpha_j \geqslant 0$, 其支集一致趋于原点, 并且 $\iint\cdots\int \alpha_j(x)\,dx = 1$), 则由卷积的连续性可知正则化 $T*\alpha_j$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 T. 正则化给我们提供了一个用无穷可导函数列来逼近广义函数的正则线性方法①. 另外, 如果 T 为连续函数, 则它关于括号中所指出的那些 α_j 的正则化为连续函数且这个连续函数列在任意紧集上一致收敛于 T 本身 (若 T 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续, 则该序列在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛); 若 T 为 m 阶连续可微函数, 则由

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(T*\alpha) = \frac{\partial T}{\partial x_k} * \alpha \tag{6.4.6}$$

可知上述函数列在 $(\mathscr{E}^m)$ 中收敛.

若 T 为 L^p 类函数 (相应地, 若 T 在每个紧集上为 L^p 类函数) $(1 \leqslant p < +\infty)$, 则前面那个函数列在 L^p 内收敛 (相应地, 在每一个紧集上依 L^p 范数收敛); 若 T 为有界函数 (相应地, 为阶 m 测度或广义函数), 则该函数列在 L^∞ 中 [相应地, 在 $(\mathcal{C}')$ 或 $(\mathscr{D}'^m)$ 中] 弱收敛.

当然, 正则化是用支集非紧的无穷可导函数来逼近一个支集非紧的广义函数 T, 不过支集非紧的无穷可导函数可以很容易地被 $(\mathscr{D})$ 中函数来逼近 [比如说乘以支集越来越大且在越来越大的紧集上等于 1 的函数 $\beta \in (\mathscr{D})$].

连续性　定理 12. 将 $T \in (\mathscr{D}')$, $\alpha \in (\mathscr{D})$ 与正则化 $T*\alpha \in (\mathscr{E})$ 对应的映射为亚连续双线性映射.

为此假设两元素 α, T 当中一个保持有界而另外一个趋于 0; 若 x 属于某个紧集而 α 在 $(\mathscr{D})$ 中保持有界, 则 $\alpha(x-t)$ 被看作 t 的函数时一致有界, 且当 α 在 $(\mathscr{D})$ 中趋于 0 时也一致趋于 0; 因此当上述两个假设当中有一个满足时, 函数

$$\theta(x) = T*\alpha$$

在通常意义下在变量 x 的任意紧集上一致趋于 0; 由于该函数的各阶导数亦如此, 从而它在 $(\mathscr{E})$ 中趋于 0.

但这个亚连续双线性映射并不连续. 关于此方面以及弱拓扑, 我们可以作出与第 3 章定理 11 类似的评注.

该定理可立刻推广到从 $(\mathscr{E}')\times(\mathscr{E})$ 到 $(\mathscr{E})$, 从 $(\mathscr{E}')\times(\mathscr{D})$ 到 $(\mathscr{D})$, 从 $(\mathscr{D}'^m)\times(\mathscr{D}^m)$ 或 $(\mathscr{E}'^m)\times(\mathscr{E}^m)$ 到 $(\mathscr{E}^0)$ 上的双线性映射 $(T,\alpha)\to T*\alpha$, 其中连续函数空间 $(\mathscr{E}^0)$ 被赋予了在每个紧集了一致收敛的拓扑.

① 第 3 章定理 15 仅证明了任意一个广义函数均是一个由无穷可导函数构成的滤子的极限.

点积与卷积的迹 公式 (6.4.5) 表明, 对于任意的 T 和 φ, 只要卷积有意义, 则 $T(\varphi)$ 正好就是 $T*\varphi(-x)$ 在原点的值. 若我们将 φ 和 T 关于原点作对称变换后所得到的函数和广义函数分别记作 $\check{\varphi}$ 和 $\check{T}$:

$$(6.4.7) \qquad \check{\varphi}(x)=\varphi(-x)\,, \quad \check{T}(\check{\varphi})=T(\varphi)\,, \quad \check{T}(\varphi)=T(\check{\varphi})\,,$$

而将连续函数在原点的值称为“迹”:

$$\mathrm{Tr.}f(x)=f(0)\,,$$

于是可知我们有:

$$(6.4.8) \qquad T(\varphi)=\mathrm{Tr.}(T*\check{\varphi})=\mathrm{Tr.}(\check{T}*\varphi)\,.$$

该公式起着与公式 (5.1.5) 同样的作用; 后者将 $T(\varphi)$ 表示成乘积 φT 的积分, 而公式 (6.4.8) 则将 $T(\varphi)$ 表示成卷积 $T*\check{\varphi}$ 的迹. 由此可知, 若对任意的 $\varphi\in(\mathscr{D})$, 均有 $T*\varphi=0$, 则 T 为零.

关于原点的对称运算 $^\vee$ 显然保持由函数以及广义函数所组成的集合的所有代数结构: 尤其是乘法和卷积

$$(6.4.9) \qquad (ST)^\vee=\check{S}\check{T}\,, \quad (S*T)^\vee=\check{S}*\check{T}\,.$$

可见, 若在函数与广义函数之间的点积公式中出现卷积, 则我们可以通过对称变换将一个元素从一边过度到另外一边: 比如说

$$(6.4.10) \qquad \begin{aligned}(A*B*C).(D*E*\varphi*\psi)&=(A*B*\check{\varphi}*\check{\psi}).(\check{C}*D*E)\\&=\mathrm{Tr.}(A*B*C*\check{D}*\check{E}*\check{\varphi}*\check{\psi})\,,\end{aligned}$$

这里 A,B,C,D,E,φ,ψ 当中至多除了一个以外, 其余所有的均有紧支集.

特别地, 公式 (6.4.10) 表明

$$(6.4.11) \qquad (S*T).\varphi=T.(\check{S}*\varphi)=S.(\check{T}*\varphi)\,,$$

这就证明了, 在 $(\mathscr{D})$ 与 $(\mathscr{D}')$ 之间的对偶关系中, 空间 $(\mathscr{D})$ 中的元素与 $S\in(\mathscr{E}')$ 的卷积运算是 $(\mathscr{D}')$ 中的元素与 $\check{S}$ 的卷积运算的转置.

作为特殊情形, 我们重新得到曾针对公式 (2.1.6) 和 (2.5.2) 所说的: τ_h 和 τ_{-h} 互为转置, 而 $\frac{\partial}{\partial x_k}$ 和 $-\frac{\partial}{\partial x_k}$ 也是如此.

公式 (6.4.11) 还表明, 若对任意的 $\varphi\in(\mathscr{D})$, 我们能知道 $\check{T}*\varphi$ 的大小, 则我们就可知道卷积 $S*T$ 的取值, 而 $\check{T}*\varphi$ 则可由 (6.4.5) 直接给出.

我们将给出几个例子和公式来结束本节.

几个公式

公式 1. 若 $E(x)$ 和 $L(x)$ 分别是一个指数函数和一个线性函数:

$$E(x) = \exp.(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) = \exp.(a.x)\,, \tag{6.4.12}$$

$$L(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a.\,x\,, \tag{6.4.13}$$

则由定义立刻可以证明下述出现了卷积和乘积的公式:

$$E(x)(S * T) = [E(x)S] * [E(x)T]\,, \tag{6.4.14}$$

$$L(x)(S * T) = [L(x)S] * T + S * [L(x)T]\,. \tag{6.4.15}$$

公式 2. 对任意具有紧支集的广义函数 T, 卷积 $T * 1$ 等于常数

$$T(1) = \iint \cdots \int T,$$

参见公式 (6.4.5), 其中 $\alpha = 1$.

更一般地, 若 $P(x)$ 为次数不大于 m 的多项式, 则 Taylor 公式

$$P(x-t) = \sum_{|p|\leqslant m} \frac{x^p}{p\,!}\,[D^pP(t)]^\vee \tag{6.4.16}$$

表明

$$T * P = T_t.\,P(x-t) = \sum_{|p|\leqslant m} [T.(D^pP)^\vee]\frac{x^p}{p\,!} \tag{6.4.17}$$

是一个次数不大于 m 的多项式.

故 T 关于多项式 α 的正则化是一个多项式 $T*\alpha$; 若在 $(\mathscr{D}')$ 中用一列多项式 α_j 来趋近 Dirac 测度 δ, 则 $T*\alpha_j$ 给出了 T 的一个多项式逼近. 若广义函数 T 的支集任意, 则在任意一个具有紧闭包的开集 Ω 上, 我们可将 T 用一个具有紧支集的广义函数 T_1 来替代, 而后者的正则化 $T_1 * \alpha_j$ 则在 Ω 上给出了 T 的一个多项式逼近.

公式 3. 将公式 (6.4.5) 应用于 $\alpha = E(x)$ 可证明一个具有紧支集的广义函数与一个指数函数的卷积正比于一个指数函数:

$$E(x) * T = (T.\,\check{E})E(x)\,. \tag{6.4.18}$$

更一般地, 可知 T 与一个次数不大于 m 的指数 - 多项式函数 (一个指数函数与一个次数不大于 m 的多项式的乘积) 的卷积是一个次数不大于 m 的指数 - 多项式函数; 它与一个由指数函数或指数 - 多项式函数所组成的有限线性组合的卷积还是一个由指数函数或指数 - 多项式函数所组成的有限线性组合.

故 T 关于一个三角多项式的正则化是一个三角多项式 (一个三角多项式是一个指数函数, 其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为纯虚数); 利用一列在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 δ 的三角多项式, 我们由此可导出 T 的一个三角逼近.

§5. 支集非紧时的卷积

定义和性质 设 S 和 T 为两个广义函数, 支集为 A 和 B 且不为紧集. 当 A 和 B 具有如下性质时, 广义函数 S,T 的卷积有确切意义: 对任意 $\xi \in A$, $\eta \in B$, 仅当 ξ, η 都有界时 $\xi + \eta$ 才会有界. 而这等价于说从 $A \times B$ 到 $A + B$ 的映射 $(\xi, \eta) \to \xi + \eta$ 在无穷远处正则; 这可由如下事实说明: 对任意紧集 K, 交集 $A \cap (K - B)$ 为紧集.

为此, 假设 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 的支集为紧集 K, 那么 $\varphi(\xi + \eta)$ 的支集与 $S_\xi \otimes T_\eta$ 的支集的交集 $I \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 由满足 $\xi \in A$, $\eta \in B$, $\xi + \eta \in K$ 的点 (ξ, η) 组成; 因此 I 为紧集; 利用第 63 页中所说的可定义 $(S_\xi \otimes T_\eta) . \varphi(\xi + \eta)$, 且它等于 $(S_\xi \otimes T_\eta) . \alpha(\xi)\varphi(\xi + \eta)$; 其中 $\alpha(\xi) \in (\mathscr{D})$ 在 $A \cap (K - B)$ 的邻域上等于 1.

如此定义的量 $(S_\xi \otimes T_\eta) . \varphi(\xi + \eta)$ 因此是 $(\mathscr{D})$ 上的连续线性型, 从而定义了一个广义函数 $S * T \in (\mathscr{D}')$. 后者的支集也包含在 S 的支集与 T 的支集之和 $A + B$ 中, 而根据对 A 和 B 所作的假设, 这是一个闭集. 另外可知卷积 $S * T$ 为 S, T 在如下意义下的连续双线性映射: 若广义函数 S_j 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0 且其支集包含在某固定闭集 A 中, 而广义函数 T_j 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0 且其支集也包含在某固定闭集 B 中, 其中 A 和 B 满足前面的条件, 则广义函数 $S_j * T_j$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0.

交换律与结合律 如此定义的卷积满足交换律, 但不一定满足结合律. 设 R, S, T 为三个广义函数, 其支集分别为 A, B, C. 结合律意味着我们有

$$(R * S) * T = R * (S * T) . \tag{6.5.1}$$

仅当一上来就能定义必然交换的卷积 $R * S * T$ 时, 我们才能断言该等式成立.

当 A, B, C 满足下列性质时, 我们可定义上述卷积: 对任意 $\xi \in A$, $\eta \in B$, $\zeta \in C$, 仅当 ξ, η, ζ 三个均有界时 $\xi + \eta + \zeta$ 才有界. 或者说: 从 $A \times B \times C$ 到 $A + B + C$ 的映射 $(\xi, \eta, \zeta) \to \xi + \eta + \zeta$ 在无穷远处正则. 对任意 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 由 $R_\xi \otimes S_\eta \otimes T_\zeta$ 的支集与 $\varphi(\xi + \eta + \zeta)$ 的支集在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 中的交集为紧集, 故我们可以直接令

$$(R * S * T) . \varphi = (R_\xi \otimes S_\eta \otimes T_\zeta) . \varphi(\xi + \eta + \zeta) . \tag{6.5.2}$$

公式 (6.5.1) 两边的公共值因此就是由 (6.5.2) 所定义的 $R * S * T$.

不满足结合律的例子 若 Y 为 Heaviside 函数 (单变量的情形, $n = 1$), 那么

$$\begin{cases} \left(1 * \frac{d}{dx}\right) * Y = 0 , & \text{因为 } 1 * \frac{d}{dx} = 0 , \\ 1 * \left(\frac{d}{dx} * Y\right) = 1 * \delta = 1 . \end{cases} \tag{6.5.3}$$

另外可知, 对于多个广义函数, 若其中一个的支集为整个空间, 则只有当所有其它广义函数的支集均为紧集时, 它们的卷积才肯定有意义.

这里我们给出两个在实际应用中非常重要、支集非紧的广义函数的卷积例子.

单变量 ($n=1$) 符号计算中的运算 我们现在来考虑支集左有界 (相应地, 右有界) 广义函数, 也就是说其支集包含在半直线 $(c,+\infty)$ 中 [相应地, 包含在 $(-\infty,c)$ 中], 其中 c 可依赖所考虑的广义函数. 特别地, 如果广义函数 S 和 T 为函数 f 和 g, 且它们的支集包含在 $(0,+\infty)$ 中, 则卷积 $f*$ 具有非常简单的经典形式:

$$h(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt\,, \tag{6.5.4}$$

因此当 $x\leqslant 0$ 时上式等于 0. 由上述公式可知 h 总存在, 且 f 和 g 在 $x\to+\infty$ 时的性态对其存在性来说不重要. 但在前面所作的那些评注表明, 更一般地, 任意有限多个支集左有界的广义函数的卷积总有意义; 这是因为有限多个下有界的实数之和有界当且仅当其中每个实数均有界.

注意到当 T 为支集左有界广义函数, 而 φ 为支集右有界 (通常意义下的) 无穷可导函数时, 点积 $T.\varphi$ 总有意义, 这是因为 T 的支集与 φ 的支集的交集为紧集. 我们由此提出下列定义:

a) 令 $(\mathscr{D}_+)$ [相应地, $(\mathscr{D}_-)$] 为支集左有界 (相应地, 右有界) (通常意义下的) 无穷可导函数 φ 的空间; 在 $(\mathscr{D}_+)$ 上引入那些 $(\mathscr{E}_{(c,+\infty)})$ 的正向极限拓扑, 其中 $(\mathscr{E}_{(c,+\infty)})$ 为支集包含在 $(c,+\infty)$ 中的函数 $\varphi\in(\mathscr{E})$ 的空间, 且被赋予由 $(\mathscr{E})$ 所诱导的拓扑;

b) 令 $(\mathscr{D}'_+)$ [相应地, $(\mathscr{D}'_-)$] 为 $(\mathscr{D}')$ 中支集左有界 (相应地, 右有界) 广义函数的空间; 在 $(\mathscr{D}'_+)$ 上引入那些 $(\mathscr{D}'_{(c,+\infty)})$ 的正向极限拓扑, 其中 $(\mathscr{D}'_{(c,+\infty)})$ 则为 $(\mathscr{D}')$ 中支集包含在 $(c,+\infty)$ 中的广义函数的子空间, 且被赋予由 $(\mathscr{D}')$ 所诱导的拓扑.

于是 $(\mathscr{D}'_+)$ 为空间 $(\mathscr{D}_-)$ 的对偶, 也就是说 $(\mathscr{D}_-)$ 上的连续线性型的空间; 另外, 空间 $(\mathscr{D}_-)$ 也为 $(\mathscr{D}'_+)$ 的对偶①.

可证明 $(\mathscr{D}_-)$ 和 $(\mathscr{D}'_+)$ 互为强对偶且具有在第 3 章中针对 $(\mathscr{D})$ 和 $(\mathscr{D}')$ 所给出的各种性质. 同样地, 空间 $(\mathscr{D}_+)$ 和 $(\mathscr{D}'_-)$ 也互为强对偶.

定理 13. *空间 $(\mathscr{D}'_+)$ 中的广义函数的卷积满足结合律和交换律. 卷积 $S*T$ 的支集包含在 S 的支集 A 与 T 的支集 B 之和 $A+B$ 中. 将 S 和 T 与 $S*T$ 对应的映射为双线性映射且它在 $(\mathscr{D}'_{(c,+\infty)})\times(\mathscr{D}'_{(c,+\infty)})$ 上的限制为连续映射.*

该定理的证明与前面几节中的证明完全类似.

引入 $(\mathscr{D}'_+)\times(\mathscr{D}'_+)$ 给出一个亚连续双线性函数, 但如同定理 5, 该函数不连续.

对任意 $T\in(\mathscr{D}'_+)$ 和 $\varphi\in(\mathscr{D}_-)$, 均有 $\check{\varphi}\in(\mathscr{D}_+)$, $T*\check{\varphi}\in(\mathscr{D}_+)$ 且 (6.4.8) 也成立:

$$T(\varphi)=\mathrm{Tr.}(T*\check{\varphi})=\mathrm{Tr.}\,(\check{T}*\varphi)\,.$$

从 $(\mathscr{D}'_+)\times(\mathscr{D}_+)$ 到 $(\mathscr{D}_+)$ 的双线性映射 $(T,\alpha)\to T*\alpha$ 为亚连续.

如同 $(\mathscr{E}')$ 一样, 空间 $(\mathscr{D}'_+)$ 是一个交换的代数. 而 Dirac 测度 δ 为其单位元.

---

① 参见第 63 页.

定理 14. 代数 $(\mathscr{D}'_+)$ 没有零因子.

事实上, 可知支集左有界的两个连续函数 f 和 g 的卷积 $f*g$ 恒等于零当且仅当其中一个恒等于零[①]. 我们必须对 $(\mathscr{D}'_+)$ 中的两个广义函数 S 和 T 证明同样性质.

设 α 和 β 为 $(\mathscr{D}_+)$ 中两个不恒为零的函数; 由 $S*T=0$ 可得

$$(S*\alpha)*(T*\beta)=(S*T)*(\alpha*\beta)=0\,.$$

但 $S*\alpha$ 和 $T*\beta$ 均为支集左有界的两个连续函数; 由于它们的卷积为零, 因此它们当中的一个, 比如说 $S*\alpha$ 为零. 于是对任意 $\varphi\in(\mathscr{D}_-)$, 我们有

$$(S*\check{\varphi})*\alpha=(S*\alpha)*\check{\varphi}=0\,.$$

由于 $S*\check{\varphi}$ 和 φ 为两个连续函数, 故其中一个为零, 又由假设 α 不为零, 因此 $S*\check{\alpha}$ 为零; 从而由 (6.4.8) 可知 $S(\varphi)$ 对任意 φ 均为零, 故 S 为零. 这就是所要证明的.

这个重要性质是支集在同一边有界的两个广义函数的特殊情形; 因此该性质对两个具有紧支集的广义函数更加成立. 故 $(\mathscr{E}')$ 没有零因子. 相反, 一个属于 $(\mathscr{D}')$ 而另外一个属于 $(\mathscr{E}')$ 的两广义函数的卷积可能为零但其中任何一个均不为零: 例如

$$\frac{d}{dx}*1=\frac{d1}{dx}=0\,. \tag{6.5.5}$$

对 $(\mathscr{D}'_+)$ 中的卷积以及由之给出的方程的研究通常通过 Laplace 变换来进行; 而这正构成了所谓的符号计算.

应用: 非整数阶求导 将 $(\mathscr{D}'_+)$ 中由公式 (2.2.31) 所定义的广义函数 Y_m 取作我们的特殊广义函数. 对固定的 $\varphi\in(\mathscr{D}'_-)$, 复变量 m 的函数 $Y_m(\varphi)$ 为全纯函数; 我们因此也可以说 Y_m 是取值在 $(\mathscr{D}'_+)$ 中而变量为 m 的全纯函数.

我们有下述卷积公式:

$$Y_p*Y_q=Y_{p+q}\,. \tag{6.5.6}$$

事实上, 当复数 p 和 q 均有正实部时, 该公式是显然的, 这是因为此时的记号 Pf. 是多余的, 而 Y_p 和 Y_q 为函数且当 $x>0$ 时, 前面的公式可写成:

$$\int_0^x\frac{(x-t)^{p-1}t^{q-1}\,dt}{\Gamma(p)\Gamma(q)}=\frac{x^{p+q-1}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\,, \tag{6.5.7}$$

而这是欧拉函数的性质的一个经典推论. 于是当 $\Re p>0$, $\Re q>0$ 时, 这两个关于 p 和 q 的全纯函数 Y_p*Y_q 和 Y_{p+q} 相等, 因此对任意的 p 和 q, 它们也都相等.

① 该定理首先被 Titchmarsh 所证明 (Titchmarsh [2], p. 327), 随后被 Crum [1], Dufresnoy [1], Mikusinski [7] 等人证明. 正是基于此定理, Mikusinski 先生在 Mikusinski [2], [3] 中建立一个与广义函数论类似的理论.

对任意的 m, 公式 (6.5.6) 使我们可将 Y_m 写成 Y^{*m} 的形式, 这是因为当 m 为整数时, 上式就是 Y 在代数 $(\mathscr{D}'_+)$ 中的 m 次幂. 故我们可由下述公式来定义 T 的复数 m 阶原函数和导函数:

(6.5.8) $$I^m T = Y_m * T\,, \quad D^m T = Y_{-m} * T\,.$$

作为 (6.5.6) 的推论, 我们有下述公式:

(6.5.9) $$I^p(I^q T) = I^{p+q} T\,, \quad D^p(D^q T) = D^{p+q} T\,, \quad D^m(I^m T) = I^m(D^m T) = T\,.$$

我们重新得到了一些经典公式 [通常对可导性有很强的约束条件; 参见 (6.3.13)], 但不需要附加任何限制条件. 对于支集左有界的任意广义函数 T, 原函数 $I^m T$ 连续依赖被积广义函数的 T, 而解析依赖积分的复数阶 m.

对于任意整数 $m > 0$, 由 (2.2.31) 中的第二个公式可知 $D^m S$ 就是通常的导数. 但 $I^m S$ 并不是 S 的一个任意的原函数: 它是唯一的那个支集左有界的广义函数; 其它原函数均与之相差一个次数不大于 $m-1$ 的多项式, 故这些原函数的支集必然不会左有界 [也见公式 (6.5.24)].

由这些公式可见, 对 $(\mathscr{D}'_+)$ 中广义函数求导和积分是同一种性质的运算: 它们都是卷积运算.

若想对支集右有界的广义函数定义同样的概念, 则须考虑广义函数 $\check{Y}_m = (Y_m)^\vee$ 并由下式来定义算子 $(-I)$ 和 $(-D)$ 的 m 次幂:

(6.5.10) $$(-1)^m S = \check{Y}_m * S\,, \quad (-D)^m S = \check{Y}_{-m} * S\,.$$

当 S 的支集同时左有界和右有界也就是说为紧集时, 上述这两种运算可以同时定义. 特别地, 令 $m = 1$, 则由此可导出当 S 为有紧支集的广义函数时, 它的唯一那个支集左有界的原函数为 $Y * S$, 而其唯一那个支集右有界的原函数为 $-\check{Y} * S$.

这给我们提供了寻求任意一个广义函数 T 的原函数的新方法 (第 2 章第 4 节). 我们将选定一个在通常的意义下无穷可导, 当 $x \leqslant -c$ 时等于 0, 而当 $x \geqslant c > 0$ 时等于 1 的任意函数 α; 我们将令

(6.5.11) $$S = \alpha S + (1-\alpha) S\,,$$

则 αS 的支集左有界, 而 $(1-\alpha)S$ 的支集右有界. 故

(6.5.12) $$Y * (\alpha S) - \check{Y} * [(1-\alpha)S]$$

为 S 的一个特殊原函数. 这个方法可立刻推广到在 $\mathbb{R}^n$ 中求解方程 $\frac{\partial T}{\partial x_1} = S$: 将 Y 换成线性测度 $Y_{x_1} \otimes \delta_{x_2 x_3 \dots x_n} = Y_1$ [公式 (4.5.9)], 并利用那个同样的函数 $\alpha(x_1)$.

若我们现在令

(6.5.13) $${}_aY_m = [\exp.(ax)] Y_m\,,$$

则公式 (6.4.14) 和公式 (6.5.6) 合起来表明我们也有

$$ {}_aY_p * {}_aY_q = {}_aY_{p+q}\,, \quad \text{由此可得 } {}_aY_m = ({}_aY)^{*m}\,, \tag{6.5.14} $$

对任意复数 m 和广义函数 $T \in (\mathscr{D}'_+)$, 令

$$ \begin{cases} {}_aI^m T = {}_aY_m * T\,, \\ {}_aD^m T = {}_aY_{-m} * T\,, \end{cases} \tag{6.5.15} $$

则算子 ${}_aI^m$ 和 ${}_aD^m$ 也为复数阶积分型和求导型算子. 但大家立刻可知

$$ {}_aY_{-1} = [\exp.(ax)]\delta' = \delta' - a\delta\,, \tag{6.5.16} $$

从而运算 ${}_aD$ 为复合求导

$$ {}_aDT = \frac{dT}{dx} - aT\,, \tag{6.5.17} $$

而 ${}_aD^m$ 为 ${}_aD$ 的 m 次幂. 特别地, 若 $m \geqslant 0$ 为整数, 那么 $T = {}_aI^m S$ 为下述 m 阶常微分方程唯一的那个支集左有界的解:

$$ \left(\frac{d}{dx} - a\right)^m T = S\,. \tag{6.5.18} $$

即便 T 的支集非紧, 在公式 (6.5.11) 和公式 (6.5.12) 中所指出的方法也将给出一个连续依赖 T 的解.

此外, 借助 Volterra 卷积的推广, 可将上述方法推广到系数不为常数的常微分方程. 另一方面, 利用 $\mathbb{R}^n$ 中的张量积, 我们可将第 4 章例 3 中的公式推广到关于不同变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的非整数阶求导. 另外, 也可容易地给出本节在常微分方程符号计算中更多的应用, 简化 (或纠正) 常用的公式, 并找到新的公式.

多变量符号计算中的运算 我们仅限于给出一些说明. 设 Γ 是一个以原点为顶点的凸闭圆锥 (也就是说 Γ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的集合, 且为从同一点发出的一些半直线的并集. 圆锥 Γ 可退化成一条半直线或一个圆锥体) 使得至少存在一个过其顶点的超平面上不含有圆锥的母线. 我们将包含在 Γ 的某个平移里的支集称为"关于 Γ 左有界"; 将包含在 Γ 的对称 $-\Gamma = \check{\Gamma}$ 的某个平移里的支集称为"关于 Γ 右有界".

对任意有限多个支集左有界的广义函数可进行卷积; 卷积满足结合律和交换律.

定理 14′. *代数 $(\mathscr{D}'_{+\Gamma})$ 没有零因子.*

在 LIONS [2] 中有该定理的证明.

同样可知, 对任意有限多个广义函数, 若它们当中至多除了一个以外, 其它的均属于 $(\mathscr{D}'_{+\Gamma})$, 那个或许不属于 $(\mathscr{D}'_{+\Gamma})$ 的广义函数的支集与任意 $K-\Gamma$ 的交为紧集, 其中 K 为紧集 (比如说该支集包含在某个适当的半空间中), 则这些广义函数的卷积有意义且满足结合律和交换律.

这些是正规双曲型常系数偏微分方程理论真正的基础 (利用广义 Volterra 卷积甚至可知系数不为常数时亦如此). 所涉及的圆锥 Γ 是由下述方程给出的圆锥体:

$$x_n \geqslant 0\,, \quad x_n^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-1}^2 \geqslant 0.$$

现在考虑 Marcel Riesz 先生的广义函数 Z_m [公式 (2.3.31)], 它们均属于 $(\mathscr{D}'_{+\Gamma})$ 且 Z_m 为取值在 $(\mathscr{D}'_{+\Gamma})$ 中而变量为复数 m 的全纯函数. 我们有下面的卷积公式:

$$Z_p * Z_q = Z_{p+q}\,. \tag{6.5.19}$$

若 p 和 q 的实部均大于 n, 则 Z_p 和 Z_q 为连续函数, 其卷积可借助一个通常的积分来计算, 而上述公式则为欧拉积分的性质的推论 [①]; 由于公式的两边为 p, q 的全纯函数, 故该式对任意 p 和 q 均成立. 鉴于 (2.3.32), 公式 (2.3.33) 因此是 (6.5.19) 在 $p=-2k \leqslant 0$ 为偶数时的一个特殊情形.

我们因此就有:

$$\begin{aligned} &Z_1 = Z\,,\ Z_m = Z^{*m}\,,\ Z_{-2m} = (\Box\delta)^{*m} = \Box^{*m}\,, \\ &\Box^{*(-m)} = \frac{1}{\pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{2m-1}\Gamma(m)\Gamma\left(1+m-\frac{n}{2}\right)} \operatorname{Pf.}(s^{2m-n})\,. \end{aligned} \tag{6.5.20}$$

于是当 T 的支集包含在半空间 $x_n \geqslant 0$ 中 (或更一般地, 当其支集与圆锥 $-\Gamma$ 的平移的交为紧集时), 我们令:

$$J^m T = Z_{2m} * T; \quad \Box^m T = Z_{-2m} * T\,. \tag{6.5.21}$$

积分算子 J^m 和求导算子 $\Box^m$ 具有与算子 I^m 和 D^m 同样的性质 [公式 (6.5.9)]. 若 $m>0$ 为整数, 则

$$J^m T \tag{6.5.22}$$

是下列常数项为 S 的迭代波动方程的那个支集包含在半空间 $x_n \geqslant 0$ 中的唯一解:

$$\Box^m T = S\,. \tag{6.5.23}$$

① Marcel Riesz 先生在针对波动方程求解 Cauchy 问题时用的正是这个 (也经过了解析延拓的) 卷积公式. 参见 M. Riesz [2], p. 32 – 33.

事实上, 若 S 和 T 的支集均包含在这个半空间中, 而 m 为任意复数, 则借助 (6.5.9) 可知 (6.5.22) 和 (6.5.23) 等价:

$$\begin{cases} \Box^m T = S \rightrightarrows J^m \Box^m T = T = J^m S\,, \\ J^m S = T \rightrightarrows \Box^m J^m S = S = \Box^m T\,. \end{cases} \tag{6.5.24}$$

算子 J^m 给出波动方程 Cauchy 问题的解. 事实上, 正如我们在第 5 章第 6 节所见, 寻求方程 (6.5.23) 的 Cauchy 问题的一个在超平面 $x_n = 0$ 上满足所给的初始条件而在 $x_n \geqslant 0$ 上等于一个函数的解 T, 等价于求解 (6.5.23) 的修正方程:

$$\Box^m T = S + H\,, \tag{6.5.25}$$

其中 H 是一个支撑在超平面 $x_n = 0$ 上, 依赖所给初始条件的已知广义函数. 上述方程唯一的那个定义在 $\mathbb{R}^n$ 上、支集包含在半空间 $x_n \geqslant 0$ 中的广义函数解 T 为

$$T = J^m(S + H)\,. \tag{6.5.26}$$

若 S 和 H 足够正则使得 T 本身及其阶不大于 $m-1$ 的导数均为 $x_n \geqslant 0$ 上的连续函数, 则 T 的确为问题的解. 当 $n > 2m$ 为偶数时没有波扩散 (Huygens 原理), 这是因为 Z_{2m} 的支集为波锥面.

若现在利用二项式公式来展开 $\Box - \lambda\delta$ 的幂 (其中 λ 为复数), 则形式上我们有

$$(\Box - \lambda\delta)^{*(-m)} = \sum_k \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-k+1)}{k\,!}(-1)^k \lambda^k \Box^{*(-m-k)}\,. \tag{6.5.27}$$

对任意的复数 m, 右边那个级数在 $(\mathscr{D}'_{+\Gamma})$ 中收敛, 这是因为 $\Box^{*(-m-k)} = Z_{2(m+k)}$ 在 k 充分大时为连续函数, 并且由表达式 (2.3.31) 或 (6.5.20), 我们还可以立刻给出一个 (在 Volterra 积分方程理论中是经典的) 上界使得该级数在 $\mathbb{R}^n$ 的任意紧集上均一致收敛. 于是由二项式系数之间的代数关系可得

$$(\Box - \lambda\delta)^{*p} * (\Box - \lambda\delta)^{*q} = (\Box - \lambda\delta)^{*(p+q)}\,, \tag{6.5.28}$$

而这反过来解释了为什么会采用记号 $(\Box - \lambda\delta)^{*m}$.

我们因此得到与"减幅波"型方程 $\Box T - \lambda T = 0$ 的求解密切相关的广义函数. 由上述计算立刻可知:

$${}_{\lambda}\Box^{*(-m)} = (\Box - \lambda\delta)^{*(-m)} = \frac{\mathrm{Pf.}\, s^{2m-n}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(m)2^{2m-1}} \left(\sum_k \frac{\left(\frac{\lambda s^2}{4}\right)^k}{k\,!\,\Gamma\left(k+1+m-\frac{n}{2}\right)} \right). \tag{6.5.29}$$

对于 m 的那些奇异值, 我们应将上式理解成广义函数在点 m 处连续且通过取极限来得到. 当 λ 为实数, 我们有 ①,

$$(6.5.30)\qquad {}_{\lambda}\Box^{*(-m)} = \frac{|\lambda|^{\frac{n}{4}-\frac{m}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(m)2^{m+\frac{n}{2}-1}} \times \begin{cases} \text{Pf.}\, s^{m-\frac{n}{2}} I_{m-\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}s), & 若\ \lambda > 0, \\ \text{Pf.}\, s^{m-\frac{n}{2}} J_{m-\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}s), & 若\ \lambda < 0, \end{cases}$$

其中 I 和 J 为 Bessel 函数. 当 $\lambda = 0$ 时, 我们重新得到 (6.5.20).

另外, 可通过将一个分式分解成最简分式来得到 $(\Box - \lambda\delta) * (\Box - \mu\delta)$ 的基本解:

$$(6.5.31)\qquad [(\Box - \lambda\delta) * (\Box - \mu\delta)]^{*(-1)} = \frac{1}{\lambda - \mu}\left[(\Box - \lambda\delta)^{*(-1)} - (\Box - \mu\delta)^{*(-1)}\right],$$

也即

$$(6.5.32)\qquad {}_{\lambda}\Box^{*(-1)} * {}_{\mu}\Box^{*(-1)} = \frac{1}{\lambda - \mu}\left({}_{\lambda}\Box^{*(-1)} - {}_{\mu}\Box^{*(-1)}\right).$$

§6. 卷积在积分研究中的应用

在原函数研究中的应用 卷积使得我们可以重新来彻底解决广义函数的积分问题. 我们曾见过 [公式 (6.5.12)] 卷积如何给出方程 $\frac{\partial T}{\partial x_1} = S$ 的一个特解; 它同时揭示了问题的解的不唯一性, 这是因为若广义函数 T 满足 $\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$, 则该广义函数的所有正则化 $T * \alpha$ $(\alpha \in (\mathscr{D}))$ 均为函数且满足:

$$\frac{\partial T * \alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial x_1} * \alpha = 0,$$

它们因此都是在通常意义下不依赖 x_1 的连续函数; 于是对任意的 $h = (h_1, 0, \ldots, 0)$, 均有 $\tau_h(T * \alpha) - T * \alpha = 0$, 由定理 9 可知 $(\tau_h T - T) * \alpha = 0$, 这就证明了 $\tau_h T - T = 0$, 也就是说 T 在平行于 x_1 轴的平移下不变 (第 2 章定理 4). 同样地, 如果 T 为一阶偏导数均为零的广义函数, 则它的任意正则化 $T * \alpha$ 均为连续函数且其一阶偏导数均为零, 故 $T * \alpha$ 是一个常数; 又 T 是 α 在 $(\mathscr{E}')$ 中趋于 δ 时正则化 $T * \alpha$ 的极限, 因此它也是常值函数的极限, 但常值函数构成了 $(\mathscr{D}')$ 中的一维子空间, 因此是一个闭子空间, 从而 T 为常值函数.

卷积将尤其会告诉我们偏导数

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = S_1,\ \frac{\partial T}{\partial x_2} = S_2,\ \ldots,\ \frac{\partial T}{\partial x_n} = S_n,$$

具有某些局部正则性的广义函数 T 的性质.

① M. Riesz [2], p. 89 – 90 "形式地" 施行了上述计算. 我们这里给出了一个严格的论证并使之成为一个真正的方法, 使得可以从一个偏微分方程过度到另外一个.

一阶偏导数均为测度的广义函数 我们将会用到 Soboleff 先生[①]证明的一个引理:

引理. 若 $f(x)$ 具有紧支集且为 L^p 类 $(p \geqslant 1)$ 而 $0 \leqslant \lambda < n$, 则下述条件满足时:

$$\frac{1}{q} \geqslant \max\left(\frac{1}{q_1}, 0\right), \quad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} + \frac{\lambda}{n} - 1 . \tag{6.6.1}$$

卷积 $g(x) = \left(\frac{1}{r}\right)^\lambda * f$ 在任意紧集上为 L^p 类.

仅在下述情形才会有例外:

a) $p = 1$. 若 $\frac{1}{q} > \frac{1}{q_1} = \frac{\lambda}{n}$, 则 g 在任意紧集上为 L^q 类. 将 f 换成一个测度时, 该性质依然成立.

b) $\frac{1}{q_1} = 0$ 且 $\lambda \neq 0$. 则对任意实数 $q \geqslant 1$, 卷积 g 均在任意紧集上为 L^q 类.

在上述所有情形中, 我们在任意紧集上均有上界估计:

$$\|g\|_q \leqslant C\|f\|_p , \tag{6.6.2}$$

其中常数 C 依赖 q, 在其上求 g 的上界的紧集, 以及 f 的紧支集.

评注. 我们可以去掉所有的"具有紧支集"或者"在任意紧集上"这样的限制; 若 $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则 $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 此时 $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1}$, 除非 $p = 1$ 或 $\frac{1}{q_1} \leqslant 0$. 在上述例外情形不可能有任何整体性的结论.

我们因此可将第 2 章中的定理 7 推广如下:

定理 15. (Kryloff[②]) 若 T 的所有一阶偏导数 S_i 在任意紧集上为 L^p 类函数, 则当 $\frac{1}{q} \geqslant \max\left(\frac{1}{q_1}, 0\right)$ 且 $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} + \frac{\lambda}{n} - 1$ 时 T 在任意紧集上为 L^p 函数, 且当 $p > n$ 或 $p = n = 1$ 时 T 为连续函数.

仅在下述情形才会有例外:

a) $p = 1$ 且 $n \neq 1$. 若 $\frac{1}{q} > \frac{1}{q_1}$, 则 T 在任意紧集上为 L^q 类函数. 当所有 S_i 均为测度时, 该结论依然成立.

b) $p = n \neq 1$. 则 T 为函数且它的任意有限次幂均在任意紧集上可积.

1° 首先假设 T 具有紧支集. 考虑和式:

$$\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}}\right) * S_i\right) = \frac{n-2}{N} \sum_i \left(\frac{x_i}{r^n} * S_i\right) , \tag{6.6.3}$$

其中 N 为公式 (2.3.10) 中的常数. 根据 (2.3.10), 该表达式等于

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}}\right) * \frac{\partial}{\partial x_i} * T = \Delta * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}}\right) * T = \delta * T = T . \tag{6.6.4}$$

---

① SOBOLEFF [3].

② 参见 KRYLOFF [1]. Kryloff 所证明的定理仅针对我们事先已知 T 为函数的情形, 但所遇到的困难是一样的. 我们的证明与 Kryloff 的证明很类似.

由此可得

$$T = \frac{n-2}{N} \sum_i \left(\frac{x_i}{r^n} * S_i \right) . \tag{6.6.5}$$

当 $n=2$ 时, 须将 $-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}}$ 换成 $-\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$, 而在 (6.6.5) 中将 $\frac{n-2}{N}$ 换成 $\frac{1}{2\pi}$.

另外, 还可以验证如此找到的广义函数的确以 S_i 作为其一阶偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_j} &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}} \right) * \frac{\partial S_i}{\partial x_j} \\ &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}} \right) * \frac{\partial S_j}{\partial x_i} \\ &= \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}} \right) * S_j \\ &= \Delta * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}} \right) * S_j = \delta * S_j = S_j . \end{aligned} \tag{6.6.6}$$

由于根据假设 S_i 均为测度且 $\frac{x_i}{r^n}$ 为函数, 故 T 为函数. 另外, 若 $\mu \geqslant 0$ 为测度且为所有测度 S_i 的上界, 则由 $\left|\frac{x_i}{r^n}\right| \leqslant \frac{1}{r^{n-1}}$ 可知 T 可被 $C\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} * \mu$ 界住, 从而在对 S_i 或等价地说对 μ 所做的各种假设条件下, 应用 Soboleff 先生的引理就可给出定理的结论. 然而在例外情形 $b)$, T 的连续性实在不能像在 $p > n$ 时由一个简单的上界估计导出; 但由于在任意紧集上 S_i 为 L^p 类而 $\frac{x_i}{r^n}$ 为 $L^{p'}$ 类, 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} \leqslant 1$, 因此连续性可由曾对 (6.1.2) 所说的导出.

2° 现假设广义函数 T 的支集任意. 设函数 $\gamma \in (\mathscr{D})$ 在原点邻域上等于 1. 我们将利用 $\frac{\gamma}{r^{n-2}}$ 而不是 $\frac{1}{r^{n-2}}$ 来进行计算:

$$\Delta\left(-\frac{1}{N}\frac{\gamma}{r^{n-2}}\right) = -\frac{1}{N}\left[\frac{\Delta\gamma}{r^{n-2}} + 2\sum_i \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\right] + \delta = \zeta + \delta . \tag{6.6.7}$$

由于 $\frac{1}{r^{n-2}}$ 仅在原点处奇异, 故 $\zeta \in (\mathscr{D})$. 另外 γ 在原点处的各阶导数均为零. 由此我们用一个有紧支集的"拟基本解"取代了 Laplace 方程的基本解 (见第 104 页):

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{1}{N}\frac{\gamma}{r^{n-2}}\right) * S_i = \Delta * \left(-\frac{1}{N}\frac{\gamma}{r^{n-2}}\right) * T = T + \zeta * T . \tag{6.6.8}$$

由于 $\zeta * T \in (\mathscr{E})$ (定理 11), 因此对 T 的局部研究可归结为对上式左边的局部研究. 上述这些量 $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{r^{n-2}}\right)$ 可被 $\frac{A}{r^{n-1}}$ 界住, 而那些 S_i 则可被同一个测度 $\mu \geqslant 0$ 界住. 由于 γ 的支集为紧集, 因此在一个具有紧闭包的开集 Ω 上研究 T 时, 仅仅那些 S_i 在某个具有紧闭包的开集上的值会在公式 (6.6.8) 的左边的卷积中起作用 (定理 3), 而这等价于假设 μ 具有紧支集; 我们因此再次将问题归结为 Soboleff 先生的引理.

若选取 γ 的支集使之与原点足够接近, 则当那些广义函数 S_i 仅仅定义在 $\mathbb{R}^n$ 的某一个开子集 Ω 上时, 我们可将 T 当作上述广义函数的函数来研究. 定理 15 具有纯局部的特性, 因此经过适当的修改, 可被移植到任意的无穷可微流形 V^n 上.

评注. 1° 若这些 S_i 属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 但其支集可以任意, 则由公式 (6.6.5) 的右边所定义的那个函数存在且属于 $L^q(\mathbb{R}^n)$, 这里 $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$. 例外情形为 $p=1$ 或 $p\geqslant n$, 此时不能得出任何整体性结论. 上述函数依旧以 S_i 作为一阶偏导数①, 因此它与 T 仅相差一个常值函数; 例如, 当 T 在无穷远处趋于 0 或属于 L^r, 其中 $r\geqslant 1$ 为任意实数时 (或者 T 为"在无穷远处趋于 0 的广义函数"时, 参见第 8 节), 该函数肯定等于 T. 在 $p>n$ 的情形, 由 Hölder 不等式知 (6.6.8) 的左边在 $\mathbb{R}^n$ 上有界, 若 $\zeta * T$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上有界连续函数, 比如说当 $T\in L^r(\mathbb{R}^n)$, 其中 $r\geqslant 1$ 为任意实数时 (或 T 为"在 $\mathbb{R}^n$ 上有界的广义函数"时, 见第 8 节), 则 T 也为 $\mathbb{R}^n$ 上的有界连续函数.

2° 该定理可推广到广义函数的有界集、序列或收敛的滤子. 若 T_j 的所有一阶偏导数在任意紧集上依 L^p 范数趋于 0, 则 (除了所指出的例外情形外) T_j 为常数 C_j 与函数 f_j 之和, 后者在任意紧集上依 L^q 范数趋于 0, 其中

$$\frac{1}{q}\geqslant\frac{1}{p}-\frac{1}{n}.$$

这依旧可由公式 (6.6.8) 来证明: 该式左边依 L^p 范数趋于 0; 而右边中的 $g_j=\zeta * T_j$ 为连续函数且它的一阶偏导数 $\frac{\partial g_j}{\partial x_k}=\zeta * S_{kj}$ 在任意的紧集上一致趋于 0, 从而 g_j 为常数 $C_j=g_j(0)$ 与连续函数 h_j 之和, 后者在任意紧集上一致趋于 0. 如同定理 15, 该性质也可被推广成 $\mathbb{R}^n$ 上的整体性结论. 我们通常以如下形式下来应用该性质:

如果 T_j 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0 且其一阶偏导数在任意紧集上依 L^p 范数趋于 0, 则在任意紧集上 T_j 依 L^q 范数趋于 0②.

3° 若 S_i 均为函数, 则 T 在几乎所有的直线上为绝对连续且几乎处处以那些 S_i 作为其通常意义下的偏导数 (第 2 章定理 5).

4° 函数 $\frac{1}{r^\lambda}$ $(0<\lambda<n)$ 这个例子表明 $\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$ 为最佳上界. 而函数

$$\left(\log\frac{1}{r}\right)^k,\ k<1-\frac{1}{n},\ (n>1)$$

这个例子则说明了当 $p=n$ 时, 我们不能取 $q=+\infty$.

相反, 我没有反例可以证明当 $p=1$ 时不能取 $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{n}$. 这个 q 的值因此可能也可以接受, 虽然这不能从 Soboleff 先生的引理导出.

① 由后面定理 26 $[\frac{1}{r^k}\in(\mathscr{D}')_{L^k},\ k>\frac{n}{\lambda}]$ 可注意到 (6.6.6) 中计算还有意义, 由此可得所要结论.
② 参见 SCHWARTZ [19] 中的其它整体性定理.

Lipschitz 条件 称函数 $f(x) \in L^p$ 在 L^p 中满足阶为 s 的 Lipschitz 条件 $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, 若存在常数 $K > 0$ 使得对任意 $h \in \mathbb{R}^n$, 均有

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p \leqslant K|h|^s. \tag{6.6.9}$$

当 $p = +\infty$ 时 f 为连续函数, 而这正是通常意义下的 Lipschitz 条件.

若函数 $f(x)$ 在任意紧集上为 L^p 可积且它在任意紧集上的限制关于充分小的 h 满足上述不等式, 则称 f 在任意紧集上依 L^p 范数满足阶为 s 的 Lipschitz 条件.

定理 16. 若 T 的所有一阶偏导数均为在任意紧集上 L^p 可积的函数, 而

$$\frac{1}{q} \geqslant \max\left(\frac{1}{q_1}, 0\right) \text{ 且 } \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} + \frac{s}{n},$$

则 T 为在任意紧集上依 L^q 范数满足阶为 $s < 1$ 的 Lipschitz 条件的函数.

仅在下述情形才会有例外:

a) $p = 1$, $n \neq 1$. 则当 $\frac{1}{q} > \frac{1}{q_1}$ 时 T 在任意紧集上依 L^p 范数满足阶为 s 的 Lipschitz 条件. 当 T 的所有一阶偏导数均为测度时, 此结果依旧成立.

b) $\frac{1}{q_1} = 0$, $n \neq 1$. 则 T 在任意紧集上依 L^q 范数满足阶为 s 的 Lipschitz 条件, 其中 $q \geqslant 1$ 为任意实数.

事实上, 对于 $0 \leqslant s \leqslant 1$, 我们有下述上界估计:

$$\left|\frac{x_i + h_i}{|x+h|^n} - \frac{x_i}{|x|^n}\right| \leqslant K|h|^s \left[\frac{1}{|x|^{n-1+s}} + \frac{1}{|x+h|^{n-1+s}}\right]. \tag{6.6.10}$$

上述估计对固定的 h 是显然的; 当 h 变动时, 分子中出现的 $|h|^s$ 源于齐次性.

首先假设 $n > 1$. 我们仅在 T 具有紧支集时证明该定理; 我们曾在前一定理中解释过如何处理 T 的支集不紧的情形. 公式 (6.6.5) 表明

$$\tau_{-h}T - T = (\delta_{(-h)} - \delta) * T = \sum_i \frac{n-2}{N}\left((\delta_{(-h)} - \delta) * \frac{x_i}{r^n}\right) * S_i. \tag{6.6.11}$$

若 S_i 均被非负测度 μ 界住, 则由 (6.6.11) 可导出对 $s < 1$ 成立的上界估计,

$$|\tau_{-h}T - T| \leqslant K_1|h|^s \left[\frac{1}{r^{n-1+s}} * \mu + \delta_{(-h)} * \frac{1}{r^{n-1+s}} * \mu\right]. \tag{6.6.12}$$

上述方括号中的那两个表达式可借助 Soboleff 先生的那个引理来同样地估计, 而我们则可立刻得到定理中的结论.

若现在 $n = 1$, 大家可以很容易地注意到

$$T(x+h) - T(x) = \int_x^{x+h} S(t)\, dt,$$

随后由一些很初等的上界估计就可给出所要的结论 [(6.1.2)].

我们已将阶为 $s=1$ 的 Lipschitz 条件放在一边; 该定理可被加强:

定理 17. 如果函数 $f(x)$ (在广义函数论意义下的) 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ 为函数 g_1, 并且函数 f, g_1 局部上为 L^p 类, 则 f 关于平行于 Ox_1 的任意平移 h 在局部上依 L^p 范数满足 1 阶 Lipschitz 条件; 另外, 对任意的实数 $p \geqslant 1$, 函数 g_1 在任意的紧集上为 f 在 L^p 范数下的强导数.

在上述定理的陈述中可删除所有"在任意紧集上"(或"局部上") 这个限定. 我们将仅对 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 给出证明. 由于 f 在几乎所有平行于 Ox_1 的直线上绝对连续, 则对于 $h=(h_1,0,\ldots,0)$, 我们有下列公式

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h_1}=\frac{1}{h_1}\int_{x_1}^{x_1+h_1} g_1(t_1,x_2,\ldots,x_n)\,dt. \tag{6.6.13}$$

另外, 该公式可以写成:

$$\frac{\tau_{-h}f-f}{h_1}=g_1*\mu=\int \tau_\xi g_1\,d\mu(\xi), \tag{6.6.14}$$

其中 μ 为支撑在 Ox_1 轴上的测度, 它在该轴的线段 $(-h_1,0)$ 上的线性密度等于 $\frac{1}{h_1}$, 而在此轴其余部分为 0. 则将 f 换成任意广义函数 T 后, 公式 (6.6.14) 也成立, 因为

$$\frac{\tau_{-h}T-T}{h_1}=\frac{\delta_{(-h)}-\delta}{h_1}*T=\frac{\partial\mu}{\partial x_1}*T=\mu*\frac{\partial T}{\partial x_1}. \tag{6.6.15}$$

由于 μ 是一种均值 (也即总质量为 1 的非负测度), 则对任意广义函数 T 可知, 当 $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ 为测度或 L^p 类函数时 $\tau_{-h}T-T$ 也为测度或 L^p 类函数. 如果 $g_1\in L^p$, 那么可知 $\|g_1*\mu\|_p$ 被 $\|g_1\|_p$ 界住 [公式 (6.1.4)], 故 f 在 L^p 中满足 1 阶 Lipschitz 条件. 另外, 对任意实数 $p\geqslant 1$, 当 $\xi\to 0$ 时 $\tau_\xi g_1$ 在 L^p 中趋于 g, 因此 $g_1*\mu$ 亦如此. 于是对任意实数 $p\geqslant 1$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h_1}$ 在 L^p 中趋于 g_1. 这就是所要证明的.

若 $p=+\infty$, 则当 $\xi\to 0$ 时 $\tau_\xi g_1$ 仅在 L^∞ 中弱收敛于 g_1. 故我们只能说 f 满足通常的 1 阶 Lipschitz 条件, 且 g_1 为 f 在 L^∞ 中的弱导数. 当 $p=1$ 时, 我们可以假设 g_1 为测度; 卷积公式 (6.6.14) 依旧可用且表明, 若 f 为测度, 则它也满足 1 阶 Lipschitz 条件且 g_1 为它在测度空间 $(\mathcal{C}')$ 中的弱导数.

反过来, 若函数 $f(x)$ (在任意紧集上) 依 L^p 范数对平行于 Ox_1 的任意平移满足 1 阶 Lipschitz 条件, 那么 $f(x)$ 会拥有一个广义函数导数使得当 $p>1$ 时, 该导数 (在任意紧集上) 为 L^p 类函数, 而当 $p=1$ 时为测度; 这是因为该导数为 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h_1}$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中的极限, 而对此只需援用第 53 页中的评注 2.

若在前面的定理中不但假设 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ 而且假设它的所有偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 为测度或函数, 则 $f(x)$ 对任意平移 $h\in\mathbb{R}^n$ 满足 1 阶 Lipschitz 条件.

评注. 由此可以导出 L^p 中相对紧集的一个充分性判别准则: 若一些函数 $f(x)$ 及其 (在广义函数论意义下的) 所有一阶偏导数在任意紧集上依 L^p 范数有界, 则由这些函数 $f(x)$ 所构成的集合关于在任意紧集上依 L^p 收敛这个拓扑为相对紧的.

高阶导数 现在假设某一个广义函数所有的 m 阶偏导数均为测度或在任意紧集上为 L^p 类函数, 则通过累次积分递升, 我们可导出 T 本身的性质. 大家立刻可知 T 在任意紧集上均为 L^p 类函数, 其中

$$\frac{1}{q} \geqslant \max\left(\frac{1}{q_1}, 0\right), \quad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}, \tag{6.6.16}$$

在一些已指出的例外情形 ($p = 1$ 或 $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$), 符号 $\geqslant$ 或许会被 $>$ 替代. 因此, 若 T 的所有 $\left[\frac{2}{n}\right] + 1$ 阶偏导数在任意紧集上为 L^p 类函数, 则 T 为连续函数.

在有界集或序列或收敛滤子的情形, 以及 m 阶偏导数均属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的情形, 我们自然会有类似于定理 15 那样的推广 (仅需将那些常数换成次数不大于 $m-1$ 的多项式). 例如, 若 T_j 的 m 阶偏导数在任意紧集上依 L^p 范数趋于 0, 而 T_j 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0, 则当 $\frac{1}{q} \geqslant \max(\frac{1}{q_1}, 0)$ 时 (除了所指出的那些例外情形外), 它们在任意紧集上依 L^q 范数趋于 0.

值得注意的是, 对于阶为 $m = n$ 的偏导数没有例外情形, 而我们则可断言:

定理 18. *如果广义函数 T 的所有秩不大于 1 的偏导数均为测度, 则 T 为局部有界函数且具有局部有限变差; 若 T 的所有秩不大于 1 的偏导数均为函数, 则 T 为绝对连续函数.*

提醒大家, 导数 D^pT 的秩等于 $\max(p_1, \ldots, p_n)$. 故关于秩不大于 1 的偏导数的假设比阶不大于 n 的偏导数的类似假设要弱很多.

为了能在相对紧开集 Ω 上研究 T, 我们将用 αT 来替代 T, 其中 $\alpha \in (\mathscr{D})$ 在 Ω 上等于 1; 故 αT 有紧支集, 且由 Leibniz 公式立刻可证明 αT 的所有秩不大于 1 的偏导数均为测度 (或函数). 这等价于说保留 T 所满足的性质且额外假设 T 的支集为紧集. 我们将证明, 若 T 具有紧支集, 则仅由假设 "$S = \frac{\partial^n T}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$ 是一个测度 μ 或一个函数 g" 就可导出定理的结论.

利用在 $x \geqslant 0$ 处为 1 而在其它点处为 0 的 Heaviside 函数 $Y(x)$ [(4.5.8)], 我们有

$$Y * S = Y * \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} * T = \left(\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} * Y\right) * T = \delta * T = T. \tag{6.6.17}$$

于是, 若 S 为测度 μ, 而 T 为一个测度与有界函数 Y 的卷积, 则 T 是一个有界函数; 若 S 为函数, 则 T 为连续函数; 我们还有

$$|T| \leqslant \iint \cdots \int |d\mu|.$$

上述公式因此也可以写成:

$$T = f(x) = \iint \cdots \int_{t \leqslant x} d\mu(t_1, t_2, \ldots, t_n), \tag{6.6.18}$$

[当 S 为函数时该式曾在第 59 页中用过; 公式 (3.6.11) 现在则为卷积理论的推论].

另外, 任意有界变差函数 f 也即某个测度的任意不定积分, 反过来在局部上均可表示成一个卷积 $\mu * Y$, 而 Y 的所有秩不大于 1 的的偏导数为测度, 故 f 亦如此.

评注. 由前面证明并由从 T 的偏导数所得到的 αT 的偏导数的上界, 立刻可知:

若 T 的秩不大于 1 的偏导数为测度 (或函数) 且这些偏导数在一个半径为 R 的球上的 $(\mathscr{C}')$ (或 L^1) 范数被 M 界住, 则 T 为函数且在与上述球同心半径为 $R-\varepsilon$ 的球上的模被 $C(R,n)\varepsilon^{-n}M$ 界住, 其中常数 $C(R,n)$ 不依赖 T 和 ε.

在前面所有的定理中, 我们引入了与给定阶或秩的所有偏导数均有关的假设; 但仅由对这些偏导数的一个"椭圆"组合所作的同样假设就可给出同样结论. 例如, 由 $S = \Delta T$ 在任意紧集上为 L^p 类与 T 的所有二阶偏导数均在任意紧集上为 L^p 类可推出同样的性质: T 在任意紧集上为 L^q 类, 其中

$$\frac{1}{q} \geqslant \max\left(\frac{1}{q_1}, 0\right), \quad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n} \quad \left(\text{例外情形为 } p=1 \text{ 或 } \frac{1}{p} - \frac{2}{n} = 0\right).$$

为此, 我们将应用 Poisson 公式 (这里 T 具有紧支集)

$$-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}} * S = \Delta * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}}\right) * T = \delta * T = T, \tag{6.6.19}$$

并利用 Soboleff 先生的那个引理. 同样地, 在二维平面上, 由 (复值) 广义函数 T 的偏导数 $S = \frac{\partial T}{\partial \bar{z}}$ 为 L^p 类 (参见第 2 章第 3 节例 3) 与它的两个一阶偏导数均为 L^p 类可推出同样的性质: $T \in L^q$, 其中

$$\frac{1}{q} \geqslant \max\left(\frac{1}{q_1}, 0\right), \ \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \text{ (除了那些例外的情形)}.$$

这次我们则 (对具有紧支集的 T) 应用公式:

$$\frac{1}{\pi z} * S = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} * \frac{1}{\pi z}\right) * T = \delta * T = T. \tag{6.6.20}$$

最后, 若 T 为 (2.3.19) 左边所定义的迭代 Laplace 方程 $\Delta^k E = \delta$ 的"基本解", 对 $S = \Delta^k T$ 应用广义 Poisson 公式 (若 T 具有紧支集):

$$E * S = E * \Delta^k * T = \delta * T = T, \tag{6.6.21}$$

由此可将 T 作为 S 的函数来直接研究. 当 k 充分大时 E 为 m 阶连续可微函数, 从而若 S 为 m 阶广义函数 [也即属于 $(\mathscr{D}'^m)$], 则 T 为连续函数. 由此可导出:

定理 19. *所有阶导数均为测度 (或更一般地, 属于 $(\mathscr{D}'^m)$, 其中 m 固定) 的任意广义函数为通常意义上的无穷可导函数.*

在做适当修改后, 公式 (6.6.21) 对支集非紧的广义函数 T 也成立且在后面起着一个非常重要的作用 (第 7, 8, 9 节). 如同在定理 15 的证明中一样, 我们将 E 换成一个"拟基本解" γE [其中 $\gamma \in (\mathscr{D})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的原点的某个邻域上等于 1], 则

$$\begin{cases} \Delta^k * (\gamma E) - \zeta = \delta, \quad \zeta \in (\mathscr{D}); \\ \Delta^k * [(\gamma E) * T] - \zeta * T = T. \end{cases} \tag{6.6.22}$$

例如, 在第二个公式中, 若取 T 为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的函数而让 k 充分大使得 E 为连续函数, 则可知: 空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ 中的任意函数 (相应地, 范数 $\iint\cdots\int |d\mu|$ 有限的任意测度 μ) 可表示成 $L^p(\mathbb{R}^n)$ [相应地, 为 $L^1(\mathbb{R}^n)$] 中的在 $\mathbb{R}^n$ 上有界的连续函数的偏导数的有限和, 并且当 $p < +\infty$ 时, 这些函数在无穷远处趋于 0.

我们通常应用所得到的公式而应用同样的运算两次:

$$\begin{cases} \Delta^{2k} * \big[(\gamma E) * (\gamma E)\big] - 2\Delta^k * \big[(\gamma E) * \zeta\big] + \zeta * \zeta = \delta, \\ \Delta^{2k} * \big[(\gamma E) * (\gamma E) * (\gamma E)\big] - 2\Delta^k * \big[(\gamma E) * \zeta * T\big] + \zeta * \zeta * T = T. \end{cases} \tag{6.6.23}$$

所提出的问题　若 T 的所有一阶偏导数 S_i 均为阶不大于 m 的广义函数, 则它本身在 $m \geqslant 1$ 时是否也为阶不大于 $m-1$ 的广义函数?

若 T 的所有 l 阶偏导数均为阶不大于 m 的广义函数, 则当 $m-l \geqslant 0$ 时它本身是否为阶不大于 $m-l$ 的广义函数?

这在直线 $(n=1)$ 上是对的; 但在其它情形, 由 ORNSTEIN [1] 可知这是错的.

由 J. Deny 先生的工作 ① 可知, 若 T 的一阶偏导数均为测度, 则可定义 T 使之在势论意义下为 Riesz 先生的阶为 $\alpha < 1$ 的拟处处伪连续函数 (也可取 $\alpha = 1$ 吗?); 若这些偏导数在局部上为 L^2 类, 则可定义 T 使之在 (二阶) Newton 势的意义下为拟处处伪连续函数 (于是 T 在局部上为一个能量有限的广义函数 ΔT 的势).

§7. 卷积在一个或一族广义函数的正则化研究中的应用

对测度以及阶有限的广义函数的刻画　定理 20. *广义函数 T 是一个测度当且仅当它关于函数 $\alpha \in (\mathscr{C})$ (具有紧支集的连续函数) 的所有正则化 $T * \alpha$ 为连续函数.*

必要性源于第 1 节第 2° 段 (在定理 11 之后曾谈及的特殊情形). 现证明充分性. 我们甚至可证的更多一点: 若对任意 $\alpha \in (\mathscr{C})$, $T * \alpha$ 为局部有界函数, 则 T 为测度.

设 K 为任意紧集, 而 H 为原点的紧邻域. 则对任意 $\varphi \in (\mathscr{C})$, $T * \check{\varphi}$ 在 H 上的限制属于 L^∞_H; 我们将证明由 $\varphi \to T * \check{\varphi}$ 定义的从 $(\mathscr{C})$ 到 L^∞ 的线性映射 $\mathscr{L}$ 连续. 若 T 为连续函数, 这是显然的; 若用 $T_j = T * \alpha_j$ 代替 T $[\alpha_j \in (\mathscr{D})]$, 则由 $\varphi \to T_j * \check{\varphi}$ 定义的映射 $\mathscr{L}_j$ 连续. 但若 $\alpha_j \geqslant 0$ 使得 $\iint\cdots\int \alpha_j(x)\,dx = 1$, 且当 $j \to +\infty$ 时 α_j 的支集趋于原点从而 α_j 在 $(\mathscr{E}')$ 中趋于 δ, 则 $T_j * \check{\varphi} = (T * \check{\varphi}) * \alpha_j$ 弱收敛于 $T * \check{\varphi}$, 这

① DENY [1], p. 171. 但还需要用 Deny 告诉我的那个方法来完善其结论.

是因为由假设 $T*\check{\varphi}$ 可知 $T*\check{\varphi}$ 在任意紧集上为有界函数 (参见第 120 页). 由一个经典的 Banach - Steinhaus 定理[①], 我们因此可断言, 对任意 φ, $\mathscr{L}(\varphi)$ 作为 $\mathscr{L}_j(\varphi)$ 的弱极限 ($\mathscr{L}_j$ 连续), 它本身也为连续线性映射.

现证明, 对任意 $\varphi\in(\mathcal{C})$, $T*\check{\varphi}$ 不仅在任意紧集上有界而且连续. 当 $\varphi\in(\mathscr{D})$ 时亦如此; 但 $(\mathscr{D})$ 在拓扑空间 $(\mathcal{C})$ 中稠密 (第 1 章定理 1), 因此对任意的 $\varphi\in(\mathcal{C})$, $T*\check{\varphi}$ 在 L^{∞}_{H} 中为连续函数的强极限, 因此它自己本身也为一个连续函数.

若对任意的函数 $\varphi\in(\mathcal{C})$, 令

$$\mu(\varphi)=\mathrm{Tr.}\,(T*\check{\varphi})\,, \tag{6.7.1}$$

则我们在 $(\mathcal{C})$ 上定义了一个在每个 $(\mathcal{C}_K)$ 上均连续的线性型, 并且由 (6.4.8) 可知 μ 在任意 $\varphi\in(\mathscr{D})$ 处所取的值等于 $T(\varphi)$. 这就证明了 T 是一个测度.

评注与推论 1° 如果假设对任意的具有紧支集的函数 $\alpha\in L^p$ $(1\leqslant p<+\infty)$, 或者对任意 $\alpha\in(\mathscr{D}^m)$, $T*\alpha$ 均为局部有界函数, 则 T 是一个在任意紧集上为 $L^{p'}$ 类的函数 $\left[p'=\frac{p}{p-1}\right]$, 或者是一个阶不大于 m 的广义函数 [也即属于 $(\mathscr{D}'^m)$]. 它的证明与前面的一样, 也由 $L^{p'}$ 为 L^p 的对偶而 $(\mathscr{D}'^m)$ 为 $(\mathscr{D}^m)$ 对偶来导出.

2° 若对任意具有紧支集的 $\beta\in L^1$, 正则化 $T*\beta$ 为测度 [相应地, 在任意紧集上为 L^p 类函数 $(1<p\leqslant+\infty)$; 或者为 $(\mathscr{D}'^m)$ 中的广义函数], 则 T 具有同样的性质. 为此, 考虑 $(T*\beta)*\alpha$ [$\alpha\in(\mathcal{C})$; 或 $\alpha\in L^{p'}$ 有紧支集; 或 $\alpha\in(\mathscr{D}^m)$], 这是一个连续函数; 我们也记之为 $(T*\alpha)*\beta$, 则问题归结为应用两次前面的定理或附注 1°: $T*\alpha$ 在任意紧集上为 L^{∞} 类函数. 由此可得关于 T 的结论.

在三角级数理论中, 此类定理通常与“乘子”一道来研究:

“若那些乘子 λ_l 使得当 a_l 为一个连续函数的 Fourier 系数时 $\lambda_l a_l$ 也为某个连续函数的 Fourier 系数, 则 λ_l 为某个测度的 Fourier - Stieltjes 系数[②].”

这源于所考虑的乘子按理说不一定是“Fourier 系数”(通常这正是所要证明的). 它们实际上总是某个广义函数 T 的 Fourier 系数 (第 7 章第 1 节), 而接下来我们还需证明 T 是某类确定的测度或函数. 我们刚才已看到如何在卷积理论中做到这点; 而这些定理与三角级数没有任何关系.

3° 为使 T 在 $\mathbb{R}^n$ 的开集 Ω 上是一个测度, 只需对支集充分接近于原点的 $\alpha\in(\mathcal{C})$ 以及 Ω 中其闭包 $\overline{\omega}$ 为紧集的任意开集 ω, $T*\alpha$ 在 ω 上为连续函数.

为此设 $a\in\Omega$ 而 ω 为点 a 的一个小邻域. 取 $\varphi\in(\mathcal{C}_\omega)$, 并由下式定义 $T(\varphi)$:

$$T(\varphi)=\mathrm{Tr.}\left[(T*\check{\varphi}*\delta_{(a)})*\delta_{(-a)}\right]. \tag{6.7.2}$$

① Banach - Steinhaus [1].

② Zygmund [1], p. 101.

则 $\check{\varphi} * \delta_{(a)}$ 的支集接近原点; 而 $T * \check{\varphi} * \delta_{(a)}$ 是一个在点 a 的邻域内连续的函数, 故 $(T*\check{\varphi}*\delta_{(a)})*\delta_{(-a)}$ 在原点的邻域内连续; 取其迹, 并由此将 $T(\varphi)$ 定义成 $(\mathcal{C}_\omega)$ 上的连续线性型. 于是 T 在 Ω 每点的邻域内为测度, 进而在 Ω 上为测度. 在后面所有的定理中, 我们可以仅限于在开集 Ω 内讨论广义函数, 并同这里一样, 仅仅考虑支集与原点足够接近的 α, 并在 Ω 的任意一个相对紧的开子集上来研究 $T * \alpha$. 我们将会给出 $\Omega = \mathbb{R}^n$ 时定理的陈述.

4° 除了一维空间 $(n = 1)$ 的情形外, 使得对任意 $\alpha \in (\mathscr{D}^m)$, $T * \alpha$ 为 m 阶连续可微函数的广义函数 T 不一定是一个测度. 事实上, 上述性质等价于说 T 的所有阶不大于 m 的偏导数均属于 $(\mathscr{D}'^m)$; 参见第 138 页.

5° 对于测度的有界集或在 $(\mathcal{C}')$ 中弱收敛的测度列, 有与定理 20 类似的定理.

定理 21. *若存在某个适当的整数 $m \geqslant 0$ 使得对任意的 $\alpha \in (\mathscr{D}^m)$, 卷积 $T * \alpha$ 均为通常意义下的无穷可导函数, 则 T 本身也是通常意义下的无穷可导函数.*

为此, 只需选取充分大的 k 使得 $\gamma E \in (\mathscr{D}^m)$ 并对 T 应用公式 (6.6.22).

广义函数的有界集 立刻可知, 我们可以如下方式来刻画广义函数的有界集:

为使广义函数 T 所组成的集合 B' 在 $(\mathscr{D}')$ 中有界, 当且仅当对任意 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 在任意紧集上, 由正则化函数 $T * \alpha$ $(T \in B')$ 组成的集合 (在通常的意义下) 有界.

由正则化的连续性 (定理 12) 可得定理中的条件的必要性, 而条件的充分性则是因为对任意 α, 由 $T(\alpha) = \mathrm{Tr.}(T * \check{\alpha})$ $(T \in B')$ 组成的集合有界 (第 3 章定理 9).

可证明下面更为精细的定理. 在许多应用中 (第 7 章定理 25, 定理 6 和定理 9), 我们将如上面一样仅给出定理的初级形式, 但大家应该明白我们也可使之如下面的定理那样变得更加精细, 而证明的原理则是一样的.

定理 22. *1° 若 B' 为 $(\mathscr{D}')$ 中广义函数的有界集, 对 $\mathbb{R}^n$ 中任意相对紧开集 Ω, 均存在整数 $m \geqslant 0$ 使得对支集足够接近原点的任意 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 由所有 $T * \alpha$ $(T \in B')$ 构成的集合在 Ω 上为连续函数空间的有界子集.*

*2° 若对任意 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 由正则化 $T * \alpha$ $(T \in B')$ 所构成的集合在 $(\mathscr{D}')$ 中有界, 则 B' 在 $(\mathscr{D}')$ 中有界*①.

定理的第一部分可由第 3 章定理 22 立刻导出. 但我们则相反利用卷积的性质而不是 Hahn – Banach 定理来同时证明上面的定理以及第 3 章中的定理 21, 定理 22 与定理 26. 另外, 我们还得到了一个显式线性方法来在 Ω 上将 $T \in B'$ 表示成有界连续函数的导数.

---

① 可用 Fourier 变换来证明这些定理. 但我们更喜欢一个直接证明, 而卷积在 Fourier 变换没有意义的某些情形 (非交换群) 仍有意义.

显然, 我们只需证明由定理第二部分的假设可导出在 Ω 上能将 $T \in B'$ 表示成连续函数 f_p 的有限和

$$T = \sum_{|p| \leqslant m} D^p f_p,$$

并且对任意固定指标 p, 由所有 f_p $(T \in B')$ 组成的集合有界. (除了第 3 章定理 26 这个例外情形, 上述有限和均可通过积分简化成单个函数的导数).

我们的确可由此导出 B' 有界, 这是因为对任意 $\varphi \in (\mathscr{D}_\Omega)$,

$$T.\varphi = \sum_{|p| \leqslant m} (-1)^p f_p . D^p \varphi .$$

另外, 定理的第一部分也可由此立刻导出; 因为, 若针对 $\overline{\Omega}$ 的某一个相对紧邻域 U 而不是 Ω 应用这个同样的分解, 则借助 T 在 U 中的表达式 (定理 3) 可得到 $T * \alpha$ 在 Ω 中的表达式, 其中 α 的支集与原点充分接近. 由此可得

$$T * \alpha = \sum_{|p| \leqslant m} f_p * D^p \alpha .$$

假设对任意 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 由 $T * \alpha$ $(T \in B')$ 所构成的广义函数集有界. 设 ω 为包含原点的相对紧开集, 而 $\bar{\omega} = K$ 为它在 $\mathbb{R}^n$ 中的闭包. 对固定的 $\alpha \in (\mathscr{D}_K)$, 由定理 12 可知从 $(\mathscr{D}_K)$ 到 L^∞_Ω 的线性映射 $\beta \to (T * \alpha) * \beta$ $(T \in B')$ 为等度连续. 同样地, 对于固定 $\beta \in (\mathscr{D}_K)$, 从 $(\mathscr{D}_K)$ 到 L^∞_Ω 的线性映射 $\alpha \to (T * \beta) * \alpha$ $(T \in B')$ 为等度连续. 为此我们可借助 Baire 的一个定理[①]: 若从 $(\mathscr{D}_K) \times (\mathscr{D}_K)$ 到 L^∞_Ω [空间 $(\mathscr{D}_K)$ 与 L^∞_Ω 为完备度量空间] 的双线性映射 $(\alpha, \beta) \to T * \alpha * \beta$ $(T \in B')$, 当两变量 α, β 当中一个固定时关于另外一个等度连续, 那么这些双线性映射关于两变量 α, β 等度连续. 因此在 $(\mathscr{D}_K)$ 中存在 0 的某一个邻域 $V = V(m; \varepsilon; K)$ 使得对任意的 $\alpha, \beta \in V$ 以及对任意的 $T \in B'$, $T * \alpha * \beta$ 在 Ω 上为连续函数且被 1 界住. 在 $(\mathscr{D}_K)$ 上赋予由 $(\mathscr{D}^m_K)$ 所诱导的拓扑后, 上述映射为等度连续. 对任意的 $\alpha, \beta \in (\mathscr{D}_\omega)$, 可找到 $\alpha_j, \beta_j \in (\mathscr{D}_K)$ 在 $(\mathscr{D}^m_K)$ 中趋于 α 和 β (根据定理 11 后面的附注), 进而可知它们在 $(\mathscr{E}')$ 中趋于 α 和 β; 于是 $T * \alpha_j * \beta_j$ 在 Ω 上一致收敛于某一个连续函数, 而上述连续函数只能是它们在 $(\mathscr{D}')$ 中的极限 $T * \alpha * \beta$ (定理 5). 又 α_j 和 β_j 均属于 cV, 这里

$$c = \max_{|p| \leqslant m} \frac{1}{\varepsilon} \Big(|D^p \alpha|, \ |D^p \beta| \Big),$$

因此对任意的 $T \in B'$, 在 Ω 上, 成立

$$|T * \alpha * \beta| \leqslant c^2 .$$

① BOURBAKI [6], 第 18 分册第 3 章第 4 节第 5° 段命题 10, p. 43.

[因此通过延拓, 从 $(\mathscr{D}_{\omega}^{m}) \times (\mathscr{D}_{\omega}^{m})$ 到 L_{Ω}^{∞} 的双线性映射 $(\alpha,\beta) \to T*\alpha*\beta$ $(T \in B')$ 也为等度连续]. 利用公式 (6.6.23), 我们可以将 T 表示成某些双正则化 $T*\alpha*\beta$ 的导数的有限和, 而当 k 足够大使得 $\gamma E \in (\mathscr{D}_{\omega}^{m})$ 时, 上述双正则化 $T*\alpha*\beta$ 在 Ω 上为有界连续函数. 这就是所要证明的.

收敛的广义函数序列 我们可以下述方式来轻易地刻画收敛的广义函数序列:

为使广义函数列 T_j 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0, 当且仅当对任意 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 正则化 $T_j*\alpha$ 在任意紧集上趋于 0.

但我们可以证明一个更为精细, 也对具有有界或可数滤子基的收敛滤子成立的定理 (关于此问题, 参见定理 22 前面的评注).

定理 23. *1° 若广义函数列 T_j 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0, 则对于 $\mathbb{R}^n$ 中具有紧闭包 $\overline{\Omega}$ 的任意开子集 Ω, 均存在整数 $m \geqslant 0$ 使得对于支集充分接近于原点的任意 $\alpha \in (\mathscr{D}^m)$, 正则化 $T_j*\alpha$ 在 Ω 内为连续函数且一致收敛于 0.*

2° 若广义函数列 T_j 使得对任意的 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 正则化 $T_j*\alpha$ 均在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0, 则广义函数列 T_j 也在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0.

事实上, 由 2° 中的假设可导出, 对任意固定 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 正则化 $T_j*\alpha$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0, 因此在 $(\mathscr{D}')$ 中有界.

采用同样的记号, 由前面的定理可导出, 存在整数 $m \geqslant 0$ 使得从 $(\mathscr{D}_{\omega}^{m}) \times (\mathscr{D}_{\omega}^{m})$ 到 L_{Ω}^{∞} 的双线性映射列 $(\alpha,\beta) \to T_j*\alpha*\beta$ 为等度连续; 但当 $\alpha,\beta \in (\mathscr{D}_K)$ 时, 连续函数列 $T_j*\alpha*\beta$ 随着 $j \to \infty$ 而在 Ω 上一致趋于 0, 又 $(\mathscr{D}_K)$ 为 $(\mathscr{D}_{\omega}^{m})$ 中稠密子集, 故对于 $\alpha,\beta \in (\mathscr{D}_{\omega}^{m})$, 上述函数列也在 Ω 上一致收敛于 0.

因此只需在与前面定理一样的条件下, 对 T_j 应用公式 (6.6.23).

应用: 对定理 10 的改进 设 $\varphi \to \mathscr{L}(\varphi)$ 为从 $(\mathscr{D})$ 到 $(\mathscr{D}')$ 的连续线性映射且与求导运算交换. 利用与定理 10 一样的证明可知 $\mathscr{L}$ 与卷积交换, 从而若 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 则

$$\mathscr{L}(\alpha*\varphi) = \mathscr{L}(\alpha)*\varphi. \tag{6.7.3}$$

如果函数列 $\alpha_\nu \in (\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{E}')$ 中趋于 δ, 那么 $\alpha_\nu*\varphi$ 在 $(\mathscr{D})$ 中趋于 φ (定理 10), 故 $\mathscr{L}(\alpha_\nu*\varphi)$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 $\mathscr{L}(\varphi)$. 这就证明了对任意 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 正则化 $\mathscr{L}(\alpha_\nu*\varphi)$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中收敛, 于是广义函数列 $\mathscr{L}(\alpha_\nu)$ 本身也在 $(\mathscr{D}')$ 中收敛. 若 S 为其极限, 则

$$\mathscr{L}(\varphi) = S*\varphi, \quad S \in (\mathscr{D}'). \tag{6.7.4}$$

这就是所要证明的.

应用: 对解析函数的刻画 定理 24. 广义函数 T 为通常意义下的解析函数当且仅当对任意 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 正则化 $T * \alpha$ 为解析函数.

1° 必要性. 事实上, 若 T 是一个解析函数 $f(x)$, 则在任意的紧集 K 上, 我们有下面的上界估计:

$$|D^p f(x)| \leqslant p\,!\,[c(K)]^{|p|}\,, \tag{6.7.5}$$

其中 $c(K) > 0$ 为依赖紧集 K 的适当常数. 但在任意紧集 K 上, 函数 $f * \alpha$ 的值仅依赖 f 在另外一个紧集 K' 上的值, 从而

$$|D^p(f * \alpha)| = |(D^p f) * \alpha| \leqslant p\,!\,[c(K')]^{|p|} \iint \cdots \int |\alpha(x)|\, dx\,, \tag{6.7.6}$$

这就证明了 $f * \alpha$ 的解析性.

2° 充分性. 设 ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中原点的一个相对紧邻域, 令 $\bar{\omega} = K$, 而设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 的任意一个相对紧开集.

首先证明, 当 α 属于 $(\mathscr{D}_K)$ 的某个适当开子集时, 在 Ω 上, 解析函数 $T * \alpha$ 的收敛半径有下界. 对于固定的 p, 量

$$\max_{x \in \Omega} \sqrt[|p|]{\left| \frac{(D^p T) * \alpha(x)}{p\,!} \right|}$$

为 $\alpha \in (\mathscr{D}_K)$ 的连续函数. 由 $T * \alpha$ 的解析性, 当 p 变化时, 这些 α 的函数在任意固定点 α 处的值有界. 但 $(\mathscr{D}_K)$ 为 Baire 空间 (完备度量空间); 故根据 Baire 的一个经典定理①, 当 p 变化时, 上述这些 α 的函数在 $(\mathscr{D}_K)$ 的某个适当开集上的值构成一个有界集. 设 c 为其上确界. 对任意的 $\alpha \in (\mathscr{D}_K)$, 当 p 变化时, 广义函数 $\frac{D^p(T*\alpha)}{p\,!\,c^{|p|}}$ 在 Ω 上的限制构成一个连续函数的有界集. 根据定理 22, 当 m 充分大时, 上述结论对 $\alpha \in (\mathscr{D}_\omega^m)$ 也成立. 换句话说, 若 α 的支集充分接近原点且仅为 m 阶连续可微, 则 $T * \alpha$ 在 Ω 上也为解析函数. 因此如果 γE 为公式 (6.6.22) 中的拟基本解, 那么当 k 充分大时, 卷积 $(\gamma E) * T$ 为 Ω 上的解析函数; 对于 $\Delta^k[(\gamma E) * T]$ 也有同样的结论; 但由定理的假设知 $\zeta * T$ 为解析函数, 故 T 在 Ω 上为解析函数.

评注. 上述定理也可以表述成另外一种形式. 我们已经看到, 从 $\mathbb{R}^n$ 到 $(\mathscr{D}')$ 的映射 $h \to \tau_h T$ 总是无穷可微; 该映射解析当且仅当 T 为通常意义下的解析函数. 上述定理可立刻推广如下: 若 (Γ) 为 (拟解析函数论意义下的) 一类无穷可微函数且该函数类也可微 [即 (Γ) 中的任意函数的导数属于 (Γ)], 则 T 的任意正则化属于 (Γ) 当且仅当 T 为 (Γ) 中的无穷可导函数. 若函数类 (Γ) 不可微, 但 T 的任意正则化均属于 (Γ), 则 T 为无穷可导函数, 且在任意的相对紧开集上属于 (Γ) 的导函数集.

① 参见 BOURBAKI [2], 第 5 节第 4° 段定理 2, p. 111.

§8. 新的广义函数空间 $(\mathscr{D}'_{L^p})$

空间 $(\mathscr{D}_{L^p})$ 记 $(\mathscr{D}_{L^p})$[①]为所有导数属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ 的无穷可导函数的向量空间, 我们在 $(\mathscr{D}_{L^p})$ 上赋予如下拓扑: 称 $\varphi_j \in (\mathscr{D}_{L^p})$ 在 $(\mathscr{D}_{L^p})$ 中趋于 0, 若 φ_j 及其各阶导数均在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中趋于 0. 则 $(\mathscr{D}_{L^p})$ 是一个具有可数邻域基的局部凸完备拓扑向量空间.

我们也将 $(\mathscr{D}_{L_\infty})$ 记作 $(\mathscr{B})$ ("$\mathbb{R}^n$ 上的有界无穷可导函数" 空间), 而记 $(\dot{\mathscr{B}})$ 为由其本身及其各阶导数在无穷远处均趋于 0 的函数 φ 所组成的 $(\mathscr{B})$ 的闭子空间.

空间 $(\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{D}_{L^p})$ $(p < +\infty)$ 和 $(\dot{\mathscr{B}})$ 中稠密, 但不在 $(\mathscr{B})$ 中稠密.

根据定理 19 后面的评注, 若 $\varphi \in (\mathscr{D}_{L^p})$ $(p < +\infty)$, 则 φ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界, 因此也属于 L^q $(q \geqslant p)$ 且在无穷远处趋于 0; 它的各阶导数也有同样性质; 故当 $q \geqslant p$ 时, 均有 $(\mathscr{D}_{L^p}) \subset (\mathscr{D}_{L^q})$, 而当 $p < +\infty$ 时, 则有 $(\mathscr{D}_{L^p}) \subset (\dot{\mathscr{B}})$. 另外, 若 φ_j 在 $(\mathscr{D}_{L^p})$ 中趋于 0, 则它们也会在 $(\mathscr{D}_{L^q})$ $(q \geqslant p)$ 中趋于 0. 空间 $(\mathscr{D}_{L^p})$ 不是一个 Montel 空间: 由函数 $\varphi \in (\mathscr{D}_{L^p})$ 的所有平移 $\tau_h\varphi$ 组成的集合在 $(\mathscr{D}_{L^p})$ 中有界, 但不为相对紧集. 但我们可借助定理 25 来证明当 $1 < p < +\infty$ 时, 空间 $(\mathscr{D}_{L^p})$ 中的任意一个有界集为弱相对紧集, 从而根据 Mackey - Arens 定理[②] 可知 $(\mathscr{D}_{L^p})$ 依然还是一个自反空间. 但 $(\mathscr{D}_{L^1}), (\dot{\mathscr{B}}), (\mathscr{B})$ 不是自反空间.

广义函数空间 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 我们将记 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ $(1 < p \leqslant +\infty)$ 为 $(\mathscr{D}_{L^{p'}})$ $(p' = \frac{p}{p-1})$ 的对偶, 而记 $(\mathscr{D}'_{L^1})$ 为 $(\dot{\mathscr{B}})$ 的对偶; 这些空间均被赋予对偶空间的自然拓扑 (第 3 章第 3 节); 这是一些包含于 $(\mathscr{D}')$ 的广义函数空间, 因为 $(\mathscr{D}'_{L^{p'}})$ $(1 \leqslant p' < +\infty)$ 或 $(\dot{\mathscr{B}})$ 上的任意连续线性型在 $(\mathscr{D}) \subset (\mathscr{D}_{L^{p'}}) \subset (\dot{\mathscr{B}})$ 上有定义且连续, 而若该线性型在 $(\mathscr{D})$ 上与一个广义函数 $T \in (\mathscr{D}')$ 重合, 则它完全由 T 确定, 因为 $(\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{D}_{L^{p'}})$ 和 $(\dot{\mathscr{B}})$ 中稠密.

但 $(\mathscr{D})$ 不在 $(\mathscr{B})$ 中稠密, 因此后者的对偶不是一个广义函数空间.

我们也记 $(\mathscr{B}')$ 为 $(\mathscr{D}_{L^\infty})$ 的对偶, 并将 $(\mathscr{B}')$ 中广义函数 T 称作是一个在 $\mathbb{R}^n$ 上有界的广义函数; 若 $T_j \in (\mathscr{B}')$ 在 $(\mathscr{B}')$ 中趋于 0, 则我们称这些广义函数在 $\mathbb{R}^n$ 上一致趋于 0. 我们记 $(\dot{\mathscr{B}}')$ 为 $(\mathscr{B}')$ 中由具有紧支集的广义函数所组成的子空间 $(\mathscr{E}')$ 在 $(\mathscr{B}')$ 中的闭包, 并将 $(\dot{\mathscr{B}}')$ 中广义函数 T 称作是一个在无穷远处趋于 0 的广义函数. 由于 $(\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{E}')$ 中稠密, 显然它也在 $(\dot{\mathscr{B}}')$ 中稠密. 易见 $(\mathscr{D}_{L^p}) \subset L^p \subset (\mathscr{D}'_{L^p})$; 空间 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 中广义函数的各阶导数也属于 $(\mathscr{D}'_{L^p})$, 而求导则为其上的连续线性运算.

当 $1 < p < +\infty$ 时, 由自反性可知 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 的对偶为 $(\mathscr{D}_{L^{p'}})$. 我们将会在后面看到 $(\mathscr{D}'_{L^1})$ 的对偶为 $(\mathscr{B})$. 故 $(\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ 中稠密 (第 3 章定理 15).

---

① 空间 $(\mathscr{D}_{L^p})$ 和 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 与偏微分方程理论中常用的 Soboleff 空间 $\mathscr{H}^{s,p}$ 也即 $W^{s,p}$ 相关 (它们分别对应于 $s = +\infty$ 和 $s = -\infty$).

② 参见第 52 页的脚注 ②.

另外, 易见 $(\dot{\mathscr{B}}')$ 的对偶为 $(\mathscr{D}_{L^1})$. 空间 $(\mathscr{B}')$ 的对偶不是一个函数空间, 并且 $(\mathscr{D})$ 不在 $(\mathscr{B}')$ 中稠密, 但由定理 25 可证明 $(\mathscr{B})$ 在 $(\mathscr{B}')$ 中稠密. 空间 $(\mathscr{D}_{L^{p'}})$ 上的任意连续线性型当然更在 $(\mathscr{D}_{L^{q'}})$ $(q' \leqslant p')$ 上有定义且连续; 因此当 $q \geqslant p$ 时, 我们

$$(\mathscr{D}'_{L^p}) \subset (\mathscr{D}'_{L^q}) \subset (\mathscr{B}'),$$

并且 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 上的拓扑要比 $(\mathscr{D}'_{L^q})$ 上的拓扑更细. 当 $p < +\infty$ 时, 因 $(\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 中稠密, 故 $(\mathscr{D}'_{L^p}) \subset (\dot{\mathscr{B}}')$.

在第 3 章第 1 节, 第 2 节以及第 3 节中针对 $(\mathscr{D})$ 和 $(\mathscr{D}')$ 所证明的那些定理, 除定理 7, 定理 12 (Montel 空间) 与定理 13 (在有界集上强拓扑与弱拓扑相等) 外, 其它所有定理对 $(\mathscr{D}_{L^p})$ 和 $(\mathscr{D}'_{L^{p'}})$ $(1 < p < +\infty)$ 也成立. 除定理 7, 定理 12, 定理 13 以及定理 14 (自反性) 外, 上述定理也对 $(\mathscr{D}_{L^1})$ 和 $(\mathscr{B}')$, $(\mathscr{B})$ 和 $(\mathscr{D}'{}_{L^1})$ 成立.

对 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 中广义函数的刻画　定理 25. *1° 广义函数 T 属于 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 当且仅当它可被表示成 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中函数的导数的有限和.*

2° 广义函数 T 属于 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 当且仅当对任意 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 正则化 $T * \alpha$ 属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$.

我们可以将 2° 换成一个更为精细的定理 (参见定理 22 之前的内容). 特别地, 可知 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 中的任意广义函数在 $\mathbb{R}^n$ 上的阶有界.

为简化书写, 取 $1 < p \leqslant +\infty$. 至于 $p = 1$ 的情形, 则只需在细节上做些修改.

我们将分三部分来“循环”证明整个定理:

a) 若 T 为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中函数的导数的有限和, 则 $T \in (\mathscr{D}'_{L^p})$. 而这是显然的.

b) 若 $T \in (\mathscr{D}'_{L^p})$, 我们将证明对任意 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 均有 $T * \alpha \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

令 B 为由 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 的单位球中所有属于 $(\mathscr{D})$ 的函数 φ 组成的集合 $\left[p' = \frac{p}{p-1}\right]$; 则 B 在 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 的单位球中稠密. 考虑函数 $\check{\alpha} * \varphi$; 对于固定 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 当 φ 在 B 中变化时, 上述函数构成 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 的一个有界集, 从而使得

$$(T * \alpha).\, \varphi = T.\, (\check{\alpha} * \varphi) \tag{6.8.1}$$

也构成一个有界集; 这证明了 $T * \alpha$ 为带上了 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 的诱导拓扑的 $(\mathscr{D})$ 上的连续线性型, 于是 $T * \alpha \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 另外可知 $T * \alpha \in (\mathscr{D}_{L^p})$.

c) 若对任意 $\alpha \in (\mathscr{D})$ 均有 $T * \alpha \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 我们将证明 T 为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的函数的偏导数的有限和. 对任意固定 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 根据假设 $T * \alpha \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 可知

$$(T * \check{\varphi}).\, \check{\alpha} = (T * \alpha).\, \varphi \tag{6.8.2}$$

关于 $\varphi \in B$ 有界. 故这些广义函数 $T * \check{\varphi}$ 构成 $(\mathscr{D})$ 的一个有界集, 而根据定理 22, 对任意紧集 K, 存在整数 $m \geqslant 0$ 使得对任意固定 $\alpha \in (\mathscr{D}^m_K)$, 等式 (6.8.2) 左边的那些元素关于 $\varphi \in B$ 有界, 故右边那些元素也关于 $\varphi \in B$ 有界. 于是对任意 $\alpha \in (\mathscr{D}^m_K)$, 也有 $S = T * \alpha \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 故只需将公式 (6.6.22) 中函数 γE 取作 α 就可结束证明.

若想证明上述定理更为精细的版本 (参见定理 22), 则需要考虑量 $(T*\alpha*\beta).\varphi$, 其中 $\alpha,\beta\in(\mathscr{D})$, 以及公式 (6.6.23).

评注. 1° 利用与证明第 3 章定理 27 类似的方法, 也可直接证明定理的 1° 和 2°. 但此类方法会用到 Hahn - Banach 定理 (关于此问题, 见定理 22). 参见 (6.8.6).

2° 另外, 我们刚给出的那个证明使得我们可以将上述定理立刻推广到 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 中广义函数的有界集, 或在 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 趋于 0 的广义函数列或具有有界或可数滤子基的滤子 (定理 23 的方法), 而至少对于收敛的序列, 由 Hahn - Banach 定理还无法做到这点. 于是可知, 若序列 T_j 在 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 中趋于 0, 则 T_j 为连续函数 f_j 的给定指标的偏导数的有限和, 其中:

a) 在强收敛情形, 函数列 f_j 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中趋于 0;

b) 在弱收敛情形, 函数列 f_j 在任意紧集上一致趋于 0 且在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中构成一个有界集.

3° 鉴于公式 (6.6.22) 之后的论述, 我们总可假设出现在定理陈述中的 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中函数均为连续, 有界且当 $p<+\infty$ 或 $T\in(\dot{\mathscr{B}}')$ 时, 在无穷远处趋于 0.

空间 $(\mathscr{B})$ 和 $(\mathscr{D}'_{L^1})$ 之间的对偶 我们在 $(\mathscr{B})$ 上赋予最细的局部凸拓扑 $(\mathscr{B}_c)$ 使得该拓扑在 $(\mathscr{B})$ 的有界集上的诱导拓扑与由 $(\mathscr{E})$ 所诱导的拓扑一致. 则 $(\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{B}_c)$ 中稠密, 更不用说 $(\dot{\mathscr{B}})$ 亦如此. 由于 $T\in(\mathscr{D}'_{L^1})$ 可表示成可积函数的导数的有限和, 这表明 T 可被延拓成 $(\mathscr{B}_c)$ 上的连续线性型; 又 $(\dot{\mathscr{B}})$ 在 $(\mathscr{B}_c)$ 中稠密, 故该延拓唯一: 因此 $(\mathscr{B}_c)$ 的对偶为拓扑空间 $(\mathscr{D}'_{L^1})$. 特别地, 可计算 T 在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分

$$T(1)=\iint\cdots\int T.$$

空间 $(\mathscr{D}'_{L^1})$ 中的广义函数 T 可被称作在 $\mathbb{R}^n$ 上可积的广义函数. 但在 $(\mathscr{B}_c)$ 中, 任意的有界集为相对紧集 (Ascoli 定理); 因此根据 Mackey - Arens 定理 (参见第 3 章), 空间 $(\mathscr{B}_c)$ 半自反且 $(\mathscr{D}'_{L^1})$ 的对偶为 $(\mathscr{B})$; 但在 $(\mathscr{B})$ 上, 其自然对偶拓扑正是最初在第 144 页所定义的那个拓扑. 可以证明 $(\mathscr{B}_c)$ 上的拓扑就是在 $(\mathscr{D}'_{L^1})$ 的紧集上一致收敛的拓扑 (这就是字母 c 的由来). 我们也可在 $(\mathscr{B}')$ 上赋予一个类似的拓扑 $(\mathscr{B}'_c)$ 使得其对偶就是 $(\mathscr{D}_{L^1})$ ①.

空间 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 中的乘法与卷积 **定理 26.** 1° 若 $T\in(\mathscr{D}'_{L^p})$ 而 $\alpha\in(\mathscr{D}_{L^q})$, 则乘积 αT 属于 $(\mathscr{D}'_{L^r})$, 其中 $r\geqslant 1$, $\frac{1}{r}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, 并且在这些条件下, 双线性映射 $(\alpha,T)\to\alpha T$ 为从 $(\mathscr{D}'_{L^p})\times(\mathscr{D}_{L^q})$ 到 $(\mathscr{D}'_{L^r})$ 的亚连续映射.

2° 若 $S\in(\mathscr{D}'_{L^p})$ 且 $T\in(\mathscr{D}'_{L^q})$, 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\geqslant 0$, 则卷积 $S*T$ 有意义且 $S*T\in(\mathscr{D}'_{L^r})$, 这里 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$; 双线性映射 $(S,T)\to S*T$ 为从 $(\mathscr{D}'_{L^p})\times(\mathscr{D}'_{L^q})$ 到 $(\mathscr{D}'_{L^r})$ 的连续映射.

① 关于所有这些结论的更为详细的证明, 参见 SCHWARTZ [9], pp. 99-102.

1° (如同第 5 章定理 3), 我们可由定义

$$\alpha T.\varphi = T.(\alpha\varphi)$$

以及乘积 $\alpha\varphi$ 的已知性质立刻得到所要结论 1°, 其中 $\varphi \in L^{r'}$, $\alpha \in L^q$ 且 $r' = \frac{r}{r-1}$. 还需补充的是, 当 $p = q = r = +\infty$ 时, 若 α 或 T "在无穷远处趋于 0" [即 $\alpha \in (\dot{\mathscr{B}})$ 或 $T \in (\dot{\mathscr{B}})'$], 则 αT 亦如此.

2° 通过将 $T \in (\mathscr{D}'_{L^p})$ 分解成 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中函数的导数的有限和, 并应用在第 1 节第 1° 段中所指出的性质 [公式 (6.1.2)], 以及公式 (6.3.10) 就可得到所要的结论 2°. 当然, 还须证明所得到的卷积不依赖所选取的 S 和 T 的分解.

当 S, T, φ 具有紧支集时, 考虑下列表达式

$$(S * T).\varphi = S_\xi \otimes T_\eta.\varphi(\xi + \eta) \tag{6.8.3}$$

并由此来证明关于 $(\mathscr{D}'_{L^p})$, $(\mathscr{D}'_{L^q})$, $(\mathscr{D}_{L^{r'}})$ 的拓扑, 三变量线性型 $(S*T)*\varphi$ 为亚连续会更好. 随后的步骤类似于我们将在第 7 章定理 11 中详细给出的证明过程. 这使得我们一下子 (除非 $p = +\infty$ 或 $q = +\infty$) 就可通过延拓来针对 $S \in (\mathscr{D}'_{L^p})$, $T \in (\mathscr{D}'_{L^q})$ 定义卷积 $S * T \in (\mathscr{D}'_{L^{r'}})$, 并证明双线性型 $(S,T) \to S * T$ 的亚连续性. 同时可见, 若 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $S * T$ 为 $(\mathscr{E}')$ 中广义函数的极限, 因此除非 $p = +\infty$ 或 $q = +\infty$, 该卷积将在无穷远处趋于 0. 另外, 该延拓方法还表明, 对于给定的 S 和 T, 不管 p 和 q 可取多少个不同值, 所得到的卷积 $S*T$ 均一样; 因为若 S 属于多个空间 $(\mathscr{D}'_{L^p})$, 则具有紧支集的同一广义函数 $\alpha_j S$ $[\alpha_j \in (\mathscr{D})]$ 在所有这些空间 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 中均趋于 S.

我们自然也可以在 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 上研究"正则化" (定理 11):

若 $T \in (\mathscr{D}'_{L^p})$, $\alpha \in (\mathscr{D}_{L^q})$, 而 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geqslant 0$, 则 $\alpha * T$ 为 $(\mathscr{D}_{L^r})$ 中如下定义的函数

$$T * \alpha = T_t.\alpha(x - t), \tag{6.8.4}$$

其中 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, 并且从 $(\mathscr{D}'_{L^p}) \times (\mathscr{D}_{L^q})$ 到 $(\mathscr{D}_{L^r})$ 的双线性映射 $(T,\alpha) \to T * \alpha$ 为亚连续. 若 $\alpha \in (\mathscr{D}_{L^1})$ 在 $(\mathscr{D}'_{L^1})$ 中趋于 δ, 正则化 $T * \alpha \in (\mathscr{D}_{L^p})$ 在 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 中趋于 T.

例. 考虑公式 (2.3.20) 中的广义函数 L_l. 在原点之外, 它们是一些在无穷远处指数递降的函数, 故其卷积有意义, 且可证明我们有 (也见第 7 章第 8 节例 2):

$$L_p * L_q = L_{p+q}. \tag{6.8.5}$$

基于那个给出 L_{-2k} 的公式可知, 公式 (2.3.21) 和 (2.3.22) 为上式的特殊情形.

若 $\alpha \in (\mathscr{D}'_{L^p})$, 则由 $L_l \in (\mathscr{D}'_{L^1})$ 可知 $L_l * T$ 总存在且属于 $(\mathscr{D}'_{L^p})$; 若取 $l = 2k$, 其中 $k \geqslant 0$ 为整数, 可知对任意 $T \in (\mathscr{D}'_{L^p})$, 存在唯一一个广义函数 $S \in (\mathscr{D}'_{L^p})$ 使得

$$\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k S = T.$$

另外, 当 k 充分大时 L_{2k} 为 m 阶连续可微函数且其阶不大于 m 的导数为可积函数; 鉴于 T 可被分解成 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中函数的导数的有限和, 则当 k 充分大时 $S = L_{2k} * T$ 为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中函数, 故根据定理 25 后面的评注 3°, 我们可假设它为有界连续函数, 且当 $p < +\infty$ 时在无穷远处趋于 0, 也即 $T \in (\dot{\mathscr{B}}')$.

于是我们可通过下述非常简单的方法来得到 T 的分解:

$$(6.8.6) \qquad \begin{cases} S = L_{2k} * T\,,\ k\text{充分大},\ S \in L^p(\mathbb{R}^n)\,, \\ T = \left(1 - \dfrac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k S\,. \end{cases}$$

有界广义函数的另外一个定义. 推广 我们也可称广义函数 T 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界, 若由它的所有平移 $\tau_h T$ 组成的集合在 $(\mathscr{D}')$ 中有界 [若从 $\mathbb{R}^n$ 到 $(\mathscr{D}')$ 的连续映射 $h \to \tau_h T$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界]; 同样称 T 在无穷远处趋于 0, 若 $|h| \to +\infty$ 时 $\tau_h T$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中趋于 0. 在由所要这些在 $\mathbb{R}^n$ 上有界的广义函数组成的空间 $(\mathscr{B}')$ 上可赋予如下拓扑: 称 T_j 在 $(\mathscr{B}')$ 中趋于 0, 若 $\tau_h T_j$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中关于 $h \in \mathbb{R}^n$ 一致趋于 0.

这个新定义与上节中的定义完全相同. 因为这等价于说, 对任意的 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 所有 $\tau_h T.\check{\alpha}$ $(h \in \mathbb{R}^n)$ 构成一个有界集, 而这也就是说 $T * \alpha$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的有界函数 [定理 25.2°, $p = +\infty$].

对有界集和收敛的序列应用同样的定理表明, 当我们只考虑收敛的序列或有界滤子或具有可数基的滤子时, 在 $(\mathscr{B}')$ 所给的新拓扑与原来那个拓扑相等. 我们可以证明 (利用一个更为复杂的方法), 上述结论对任意收敛滤子也成立; 故上述拓扑的两个定义完全相同.

上述新定义有大量的推广; 它使得我们可以定义在无穷远处具有给定增长性的广义函数. 我们将在第 7 章第 4 节和第 5 节中应用该方法.

§9. 概周期广义函数

定义 我们将 Stepanoff 意义下的概周期函数的概念推广到广义函数 ①.

称函数 $\varphi \in (\mathscr{B})$ 在 $(\mathscr{B})$ 中概周期, 若它的所有平移 $\tau_h \varphi$ 在 $(\mathscr{B})$ 中构成了一个相对紧集. 这等价于说 φ 及其各阶导数为 (Bohr 意义下的) 通常概周期连续函数. 所有这些概周期函数 φ 构成 $(\mathscr{B})$ 的一个闭向量子空间 $(\mathscr{B}_{pp})$. 我们称广义函数 T 为概周期广义函数, 若 $T \in (\mathscr{B}')$ 且它的所有平移 $\tau_h \varphi$ 在 $(\mathscr{B}')$ 中构成一个相对紧集. 这等价于说映射 $h \to \tau_h T$ 是一个以 $h \in \mathbb{R}^n$ 为变量而取值 $(\mathscr{D}')$ 中的通常概周期连续函数. 由此立刻导出概周期广义函数的集合为 $(\mathscr{B}')$ 的一个闭向量子空间 $(\mathscr{B}'_{pp})$.

① 比如说, 参见 Besicovitch [1], p. 77.

运算与性质 1° 若 $\alpha \in (\mathscr{B}_{pp})$ 且 $T \in (\mathscr{B}'_{pp})$, 则 $\alpha T \in (\mathscr{B}'_{pp})$.

2° 若 $T \in (\mathscr{B}'_{pp})$ 且 $S \in (\mathscr{D}'_{L^1})$, 则 $S * T \in (\mathscr{B}'_{pp})$.

概周期广义函数的导数也为概周期.

这些都是显然的 (定理 25).

3° $a)$ 广义函数 T 为概周期当且仅当它为通常概周期连续函数的导数的有限和.

$b)$ 广义函数 T 为概周期当且仅当它的所有正则化 $T * \alpha$ $[\alpha \in (\mathscr{D})]$ 均为通常概周期连续函数.

事实上, 所有 $\tau_h T$ 在 $(\mathscr{B}')$ 中构成了一个有界集, 因此根据推广到广义函数的有界集的定理 25.2° (对于 $p = +\infty$) 可知, 由 $\tau_h T$ 所组成的集合在 $(\mathscr{B}')$ 中的相对紧性等价于由 $\tau_h(T * \alpha) = \tau_h T * \alpha$ 所组成的集合在 L^∞ 中的相对紧性, 这就证明了 $b)$. 由于 T 在 $(\mathscr{B}')$ 为其正则化 $T * \alpha$ 的极限, 因此 $(\mathscr{B}'_{pp})$ 为 $(\mathscr{B}_{pp})$ 在 $(\mathscr{B}')$ 中的闭包. 但我们也可 (利用定理 25 的精细版本) 断言, 若 $\alpha \in (\mathscr{D}^m)$ 而 m 充分大, 则 $T * \alpha$ 为通常概周期连续函数, 于是由 (6.6.22) 立刻可证 $a)$.

如同定理 22 和定理 25 一样, 我们也可给出上述定理的一个更为精细的版本, 并将之推广到概周期广义函数的有界集或收敛的概周期广义函数列.

正如我们曾经看到过的 [公式 (6.8.6)], 分解 T 的最佳方式为构造 $S = L_{2k} * T$, 而 S 在 k 充分大时是一个通常概周期连续函数, 并且

$$T = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k S.$$

均值与卷积 4° 大家知道, 对任意概周期连续函数 $f(x)$, 我们可与之对应一个复数即其均值 $\mathfrak{M}(f)$, 它是一个关于 L^∞ 中收敛性的连续线性型. 这也是一个关于 $(\mathscr{B}')$ 中收敛性的连续线性型. 因为若概周期连续函数 f_j 在 $(\mathscr{B}')$ 趋于 0, 则 $f_j * \alpha$ $[\alpha \in (\mathscr{D})]$ 在 $(\mathscr{B})$ 中趋于 0; 于是 $\mathfrak{M}(f_j * \alpha)$ 趋于 0; 但

$$\mathfrak{M}(f * \alpha) = \mathfrak{M}(f) \left(\iint \cdots \int \alpha(x)\, dx\right), \tag{6.9.1}$$

因此, 若选取

$$\iint \cdots \int \alpha(x)\, dx \neq 0,$$

则可知 $\mathfrak{M}(f_j)$ 也趋于 0.

于是对任意 $T \in (\mathscr{B}'_{pp})$, 我们可通过延拓来唯一定义 $\mathfrak{M}(T)$, 由此得到 $(\mathscr{B}'_{pp})$ 上的一个连续线性型. 若 $T \in (\mathscr{B}'_{pp})$ 而 $S \in (\mathscr{D}'_{L^1})$, 则通过取极限可得

$$\mathfrak{M}(S * T) = \mathfrak{M}(T) \left(\iint \cdots \int S\right). \tag{6.9.2}$$

5° 若 $T \in (\mathscr{B}'_{pp})$ 而 $\varphi \in (\mathscr{B}_{pp})$, 则令

$$T \odot \varphi = \mathfrak{M}(\varphi T)\,, \tag{6.9.3}$$

这就在 $(\mathscr{B}_{pp})$ 和 $(\mathscr{B}'_{pp})$ 之间定义了一个亚连续点积 (但这两个空间当中的任何一个都不是另外一个的对偶).

同样地, 若 $S, T \in (\mathscr{B}'_{pp})$ 且 $\varphi \in (\mathscr{B}_{pp})$, 则 $S_\xi \otimes T_\eta$ 与 $\varphi(\xi+\eta)$ 均为概周期, 且我们可以通过延拓来定义一个卷积:

$$\begin{cases} (S \circledast T) \odot \varphi = (S_\xi \otimes T_\eta) \odot \varphi(\xi+\eta)\,, \\ \mathfrak{M}(S \circledast T) = \mathfrak{M}(S)\mathfrak{M}(T)\,. \end{cases} \tag{6.9.4}$$

对于两个概周期连续函数 f 和 g, 上述卷积可以表示成

$$f \circledast g = \mathfrak{M}_t[f(x-t)g(t)]\,. \tag{6.9.5}$$

前面所定义的卷积是一个从 $(\mathscr{B}'_{pp}) \times (\mathscr{B}'_{pp})$ 到 $(\mathscr{B}'_{pp})$ 的亚连续双线性映射, 并且具有第 3 节和第 4 节中所证明的性质. 我们可以很容易地利用分解 3°. a) 来计算之. 而正则化则可由下式来定义:

$$\begin{cases} T \circledast \alpha = T_t \odot \alpha(x-t)\,, \quad T \in (\mathscr{B}'_{pp})\,,\ \alpha \in (\mathscr{B}_{pp})\,, \\ T \odot \varphi = \mathrm{Tr.}\,(T \circledast \circledast \check{\varphi})\,. \end{cases} \tag{6.9.6}$$

Fourier 展开　6° 若 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ 而 $\lambda.x = \lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n$ (λ_i 均为实数), 则 Fourier 系数 a_λ 由下式定义:

$$a_\lambda = a_\lambda(T) = \mathfrak{M}[\exp(-2i\pi\lambda.x)T] = T \odot \exp(-2i\pi\lambda.x)\,. \tag{6.9.7}$$

这是一个关于 $T \in (\mathscr{B}'_{pp})$ 的连续线性型. 又由于 $\exp(-2i\pi\lambda.x)$ 属于 $(\mathscr{B}_{pp})$, 于是由公式 (6.9.4) 可得

$$a_\lambda(S \circledast T) = a_\lambda(S)a_\lambda(T)\,, \quad S, T \in (\mathscr{B}'_{pp})\,, \tag{6.9.8}$$

$$a_\lambda(S \circledast T) = a_\lambda(T)\left(\iint \cdots \int \exp(-2i\pi\lambda.x)S\right)\,, \quad T \in (\mathscr{B}'_{pp}),\ S \in (\mathscr{D}'_{L^1})\,. \tag{6.9.9}$$

分解 3°. a) 表明仅有可数多个 a_λ 不为零. 与之相对应的 λ 构成了 T 的"谱". 那些不为零的 $a_\lambda \exp(-2i\pi\lambda.x)$ 是 $(\mathscr{B}')$ 中唯一能被表示成平移 $\tau_h T$ 的线性组合的极限的三角指数函数. 反过来 T 是仅由 $\exp(-2i\pi\lambda.x)$ 所组成的一列三角多项式在 $(\mathscr{B}')$ 中的极限, 其中 λ 跑遍 T 的谱, 这是因为以 T 为极限的正则化 $T*\alpha$ $[\alpha \in (\mathscr{D})]$ 就是如此; 于是若 T 的所有 Fourier 系数 $a_\lambda(T)$ 均为零, 则 T 等于零.

§10. 在偏微分方程与积分方程中的应用

卷积方程 我们将所有如下形式的方程称为卷积方程:

$$A * T = B\,, \tag{6.10.1}$$

其中 (系数) A 与 (常数项) B 为给定的广义函数而 T 为未知广义函数. 我们将假设 A 具有紧支集以便公式 (6.10.1) 的左边对任意 $T \in (\mathscr{D}')$ 均有意义 [我们也可处理别的情形; 若比如说 $A \in (\mathscr{D}'_{L^1})$, $B \in (\mathscr{B}')$, 则我们可在 $(\mathscr{B}')$ 中求解方程 (参见第 8 节); 若 A 和 B 的支集关于圆锥 Γ "左有界" (参见第 5 节), 则可寻求支集左有界的解]. 刚才所说的也可应用到 N 个未知广义函数的 N 个方程组; 为此只需像第 5 章第 6 节那样假设 $T = (T_1, T_2, \ldots, T_N)$ 和 $B = (B_1, B_2, \ldots, B_N)$ 为取值 $\mathbb{R}^N$ 中的广义函数, 而 $A = (A_{jk})$ 为 $N \times N$ 矩阵, 其中 $A_{jk} \in (\mathscr{E}')$. 则矩阵公式 (6.10.1) 等价于

$$\sum_{k=1}^{N} A_{jk} * T_k = B_j \quad (1 \leqslant j \leqslant N)\,. \tag{6.10.2}$$

为简化书写, 我们将总是假设 $N = 1$. 当 $B = 0$ 时, 称上述方程为齐次方程.

卷积方程包含大量重要的特殊情形:

1° 若 $A = D = \sum\limits_{|p| \leqslant m} a_p\, D^p \delta$ 为多项式求导算子 [公式 (6.3.33)], 则公式 (6.10.1) 变为最一般的常系数偏微分方程:

$$D * T = \sum_{|p| \leqslant m} a_p\, D^p T = B\,. \tag{6.10.3}$$

这些方程因此一方面作为变系数偏微分方程的特殊情形出现, 而另外一方面则作为卷积方程的特殊情形出现.

2° 若 $A = \sum\limits_{\nu} a_\nu \delta_{(h_\nu)}$ 为离散质点的有限线性组合, 则公式 (6.10.4) 为最一般的常系数有限差分方程:

$$A * T = \sum_{\nu} a_\nu \tau_{h_\nu} T = B\,. \tag{6.10.4}$$

3° 若 A 是一个函数 $K(x)$ [相应地, 为 δ 与函数 $K(x)$ 之和], 且 T 为函数 $f(x)$ 而 B 为函数 $g(x)$, 则公式 (6.10.1) 为第一类 (相应地, 第二类) 边界固定的积分方程:

$$\begin{cases} A = K(x)\,, \\ A * f = \displaystyle\iint \cdots \int K(x-t) f(t)\, dt = g(x)\,, \end{cases} \tag{6.10.5}$$

$$\begin{cases} A = \delta + K(x)\,, \\ A * f = f(x) + \displaystyle\iint \cdots \int K(x-t) f(t)\, dt = g(x)\,. \end{cases} \tag{6.10.6}$$

若在这些条件下 A 与 B 均关于圆锥 Γ 左有界, 且我们寻求支集同样左有界的解 $T=f$, 则我们将会得到 Volterra 积分方程.

将这些不同类型的方程组合起来, 我们可得到各种类型的积分 - 微分方程.

卷积方程解的一般性质 **定理 27.** 1° *任意卷积方程的解集为 $(\mathscr{D}')$ 的闭向量子空间.*

2° 齐次方程的任意解与一个具有紧支集的广义函数卷积还是齐次方程的解. 特别地, 齐次方程的任意解的各阶导数与正则化 (定理 11) 也是齐次方程的解: 齐次方程的任意解均为该方程的无穷可导函数解的极限.

基于卷积的连续性和结合律, 以及任意广义函数均为其正则化的极限这个事实, 该定理因此是显然的. 对一个方程组 (N 为任意), 该定理也成立.

我们由此可以重新得到, 一个常系数齐次常微分 ($n=1$) 方程组的解就是通常意义下的解 (第 5 章定理 9 的特殊情形). 因为根据前面定理, 齐次方程组的解空间为其通常意义下的解空间在 $(\mathscr{D}')^N$ 中的闭包; 但后者维数有限, 故等于其闭包.

定理 28. *在维数 $n=1$ 的情形, 一族齐次卷积方程的任意解均为该族方程的指数 - 多项式函数解的线性组合的极限.*

上述定理的证明有点困难; 我们将其证明发表在以前的一篇论文中[①]. 该定理对方程组也成立 (这里 N 为任意; 不过我们没有发表该结论的证明); 但我们不知道它是否对任意维数 n 也成立[②].

基本解 若广义函数 E 满足

$$A*E=\delta, \tag{6.10.7}$$

则称之为卷积方程的基本解 [参见第 5 章第 6 节公式 (5.6.24)].

对于一个方程组 ($N>1$), 这将是一个 $N\times N$ 的矩阵广义函数使得

$$\begin{cases} A*E=E*A=\delta I, \quad I\text{为单位矩阵. 也即} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} A_{jk}*E_{kl}=\sum_{k=1}^{N} E_{jk}*A_{kl}=\begin{cases} 0 & \text{若 } j\neq l, \\ \delta & \text{若 } j=l. \end{cases} \end{cases} \tag{6.10.8}$$

显然这里将基本解定义为除了在某些点处具有某种类型奇异点的通常意义下的解的任何企图, 都将会遭遇失败. 我们刚才所定义的是关于原点的基本解. 但对于应用来说这就足够了, 因为由平移 τ_a 就可给出关于点 a 的基本解.

我们将仅限于 $N=1$ 的情形.

① SCHWARTZ [4].

② 该定理对单个卷积方程的解依然成立. 参见 MALGRANGE [1], 定理 3, p. 310.

我们将基本解记作 $A^{*(-1)}$, 它是 A 关于卷积的一个逆元. 但须注意, 若存在一个基本解, 则就会存在无穷多个, 任意两个基本解之差为齐次方程的任意解. 如果存在基本解, 则称 A 可逆. 现在大家已经知道任意的多项式求导算子 $A = D$ 均可逆[①]. 显然存在不可逆的广义函数 A; 若 $A \in (\mathscr{D})$, 则对任意 $E \in (\mathscr{D}')$, 均有 $A * E \in (\mathscr{E})$, 故 $A * E$ 永远不会等于 δ. 可以证明当 $N = 1$ 时, 基本解绝不会有紧支集, 除非 A 是一个质点. 可通过各种不同的方法得到基本解[②] [偏微分方程或积分方程理论的方法; Fourier 变换或 Laplace 变换 (第 7 章第 10 节)]. 我们想要指出的最重要的一点是, 鉴于其确切的定义, 基本解因此属于代数计算或符号计算方法的范畴. 而这正是我们在第 5 节公式 (6.5.27)-(6.5.32) 中所见到的.

基本解的用途 1° 基本解可用来求解其常数项具有紧支集的非齐次方程; 事实上, 此时 $E * B$ 为 (6.10.1) 的解, 这是因为

$$A * (E * B) = (A * E) * B = \delta * B = B. \tag{6.10.9}$$

若该解具有紧支集 (一般不会有这种情形), 则它是具有该性质的唯一解; 因为若 T 的支集为紧集且满足 (6.10.1), 则

$$T = \delta * T = (E * A) * T = E * (A * T) = E * B. \tag{6.10.10}$$

但也存在支集非紧的别的解, 可通过给 T 添加齐次方程的任意一个解而得到.

2° 相反, 若 B 的支集非紧, 则上述方法不再有效, 因为当 E 和 B 的支集非紧时, 公式 (6.10.9) 左边的卷积没有意义. 但在某一些情形, 公式 (6.10.9) 依然会有意义. 例: a) 若 $E \in (\mathscr{D}'_{L^1})$ (第 8 节), 则上述公式对 $B \in (\mathscr{B}')$ 成立. 例如,

$$A = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k \delta, \quad E = L_{2k} \quad [\text{公式 } (2.3.22)].$$

b) 若 A, E, B 的支集均关于圆锥 Γ 左有界 (第 5 节), 则 E 为代数 $(\mathscr{D}'_{+\Gamma})$ 中唯一那个等于 A 的逆元 $A^{*(-1)}$ 的广义函数, 且下述两公式等价:

$$A * T = B, \quad T = A^{*(-1)} * B \quad [\text{参见公式}(6.5.24)]. \tag{6.10.11}$$

3° 若 A 可逆, 是否肯定能由此求解由 A 所定义的带任意常数项的非齐次程? 若的确如此, 则称 A 完全可逆[③]. 我们总可以将 B 表示成支集为紧集且彼此无限远离的广义函数之和:

$$B = \sum_\nu B_\nu.$$

① MALGRANGE [1], 定理 1, p. 288; EHRENPREIS [1]; HÖRMANDER [1].

② 利用基本解的这个定义, Garnir 先生针对各种不同类型的常系数偏微分方程计算了许多基本解. 参见 GARNIR [4].

③ Ehrenpreis 在 EHRENPREIS [3] 中指出, 任意可逆广义函数为完全可逆. 但其证明没有发表.

若令 $T_\nu = E * B_\nu$, 则级数 $\sum_\nu T_\nu$ 一般发散. 但这些 T_ν 会在 $\mathbb{R}^n$ 中越来越大的开集上成为齐次方程的解. 由此假设我们可在越来越大的开集上用 S_ν 来逼近 T_ν 使得级数

$$\sum_\nu (T_\nu - S_\nu)$$

在 $(\mathscr{D}')$ 中收敛, 其中 S_ν 在整个空间上为齐次方程的解.

我们将有

$$A * \sum_\nu (T_\nu - S_\nu) = \sum_\nu (A * T_\nu - A * S_\nu) = \sum_\nu B_\nu = B\,, \tag{6.10.12}$$

这就求解了非齐次方程.

当 A 为 Laplace 算子 $\Delta\delta$ 或迭代 Laplace 算子 $\Delta^k\delta$ 时, 上述方法很成功 (这是因为在一个球中, 任意的调和函数在该球的任意紧集上为调和多项式的一致极限, 而调和多项式为整个空间上的调和函数). 同样, 若在 $\mathbb{R}^n$ 中

$$A = \frac{1}{\pi}\frac{\partial\delta}{\partial\bar{z}} \quad \left[\text{公式 (2.3.23)}\right],$$

而 B 为彼此无限远离的质点之和:

$$B = \sum_\nu a_\nu \delta_{(h_\nu)}\,, \quad B_\nu = a_\nu \delta_{(h_\nu)}\,, \tag{6.10.13}$$

则由公式 (2.3.28) 可知

$$E * B_\nu = \frac{a_\nu}{z - (h_\nu)}\,.$$

上述方法就是经典的 Mittag－Leffler 方法, 它通过减去 z 的多项式来使得下列级数

$$\sum_\nu \left(\frac{a_\nu}{z - h_\nu} - P_\nu(z)\right) \tag{6.10.14}$$

收敛, 并因此得以构造一个具有给定极点的亚纯函数.

Ehrenpreis 先生证明了支集仅包含有限多个点的任意广义函数 (特别地, 任意的广义函数 $D\delta$, 其中 D 为常系数微分算子) 为完全可逆①.

4° 多个完全可逆的广义函数的卷积为完全可逆. 因为为求解 $A_1 * A_2 * T = B$, 我们首先求解 $A_1 * C = B$, 随后求解 $A_2 * T = C$.

同样地, 可逆广义函数 T_1 与完全可逆广义函数 A_2 的卷积为可逆. 相反, 我们无法初等地证明两个可逆广义函数的卷积为可逆. 借助前面所指出的 Ehrenpreis 的结论可得到此结论, 这是因为由 Ehrenpreis 的结论, 这两个广义函数均为完全可逆.

---

① Ehrenpreis [1] 与 [2].

Newton 势. Poisson 公式 考虑支集为紧集且具有连续质量密度 α 的广义函数. 其 Newton 势由下式定义:

$$U^{(\alpha)} = \begin{cases} \iint \cdots \int \dfrac{\alpha(t)\, dt}{N|x-t|^{n-2}}, & \text{若 } n \neq 2, \quad N = \dfrac{(n-2)2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \\ \iint \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{1}{|x-t|} \alpha(t)\, dt, & \text{若 } n = 2. \end{cases} \tag{6.10.15}$$

于是我们有

$$U^{(\alpha)} = E * \alpha, \tag{6.10.16}$$

其中 E 为与 $A = -\Delta\delta$ 相对应的基本解 [公式 (2.3.10)]. 我们因此通过延拓而将下列广义函数称为广义函数 T 的 Newton 势:

$$U^{(T)} = E * T. \tag{6.10.17}$$

若 T 的支集为紧集, 则该势有定义. 我们可在更一般的情形定义之, 例如, 若

$$\frac{T}{(1+r^2)^{\frac{n-2}{2}}} \in (\mathscr{D}'_{L^1}) \ (n \neq 2) \quad \text{或} \quad T \log(1+r^2) \in (\mathscr{D}'_{L^1}) \ (n = 2).$$

公式 (6.10.9) 和 (6.10.10) 就是关于势的经典 Poisson 公式: 若 T 满足前面条件, 则

$$\begin{cases} \Delta U^{(T)} = \Delta * (E * T) = (\Delta * E) * T = -\delta * T = -T, \\ U^{(\Delta T)} = E * (\Delta * T) = (E * \Delta) * T = -\delta * T = -T. \end{cases} \tag{6.10.18}$$

可见, 这个通常仅对足够正则的函数势来证明的公式在最为一般的情形也成立.

所有我们刚才对 Laplace 算子 Δ 所说的对求导 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 也成立 (第 2 章第 3 节例 3). 因此当 $T/\sqrt{1+r^2} \in (\mathscr{D}'_{L^1})$ 时, Poisson 公式可以表示成 [参见 (2.3.28)],

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{\pi z} * T \right) = \frac{1}{\pi z} * \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = T. \tag{6.10.19}$$

可注意到, 若 T 是一个测度 μ, 则 "势" $\frac{1}{\pi z} * T$ 正好就是 Cauchy 积分:

$$\frac{1}{\pi z} * \mu = \iint \frac{d\mu(\zeta)}{\pi(z-\zeta)}, \quad \text{故} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iint \frac{d\mu(\zeta)}{\pi(z-\zeta)} = \mu. \tag{6.10.20}$$

齐次椭圆方程组解的解析性

定理 29. 若一个齐次卷积方程组 ($B = 0$) 使得其任意解在某个相对紧开集 ω 上为无穷可导函数 (相应地, 解析函数), 只要它在一个足够大的相对紧开集 $\Omega \supset \omega$ 上为 l 阶连续可微函数 (相应地, 无穷可导函数), 则该方程组的任意广义函数解在 ω 上为无穷可导函数 (相应地, 解析函数).

为此, 假设 T 为方程组的解. 那么 T 在 $\overline{\Omega}$ 的邻域上的阶有限, 设之不大于 m. 若 $\alpha \in (\mathscr{D}^{m+l})$ 的支集足够小, 则 $T*\alpha$ 在 Ω 内为 l 阶连续可微函数 (定理 11); 它是方程组的一个解 (定理 27); 故在第一个假设条件下, 它在 ω 内为无穷可导函数. 于是由定理 21 可知 T 本身在 ω 内为无穷可导函数. 这就是所要证明的.

在第二个假设条件下, 取 $l=m=+\infty$; 由定理 24 可得 T 在 ω 内为解析函数. 此时我们可取 $\omega=\Omega=\mathbb{R}^n$.

该定理与第 5 章定理 12 具有不同的应用范围.

首先可知上述定理可应用于偏微分方程以外的别的方程, 比如说, 积分方程. 在偏微分方程中, 它仅能应用于常系数偏微分方程. 但在此框架下, 它并不需要用到基本解的存在性, 因此可能会包含更一般的情形.

特别地, 任意的常系数齐次椭圆偏微分方程组 [在 Petrowsky 所定义的"椭圆"这个词的一般意义下 ①] 仅有解析函数作为其解. 由 Petrowsky 所给出的无穷可导函数解的解析性的证明, 不依赖基本解的存在性.

上述定理可推广到常数项为无穷可导函数或解析函数的情形.

若现在齐次方程 (6.10.1) 至少具有一个解 T 不是无穷可导函数, 由于 T 的所有导数均为方程的解 (定理 27); 故在它们当中存在阶为任意高的广义函数 (定理 19). 例如, 任意齐次双曲偏微分方程具有阶为任意高的广义函数解.

特殊情形: 调和函数与全纯函数

1° Laplace 方程 $\Delta T=0$ 的解为通常的调和函数; 而 Cauchy 方程

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}+i\frac{\partial T}{\partial y}\right)=0$$

的解 (在 $\mathbb{R}^2$ 上) 为通常的全纯函数 (第 5 章定理 29 与定理 12).

对这些方程, 我们可以给出一个特别简单的新证明. 为此, 设 $\alpha \in (\mathscr{D})$ 是一个关于原点旋转不变的函数且使得

$$\iint\cdots\int \alpha(x)\,dx=+1\,.$$

根据熟知的调和函数或全纯函数球面均值性质可知, 若 T 为这两个方程当中一个的通常意义下的解, 则有

$$T*\alpha=T\,. \tag{6.10.21}$$

① PETROWSKY [1]. 最近的工作 MALGRANGE [1], NIRENBERG [10] 极大地降低了这个评注的价值.

若 T 为广义函数解, 则显然有同样的关系式; 因为对任意 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 卷积 $T * \check{\varphi}$ 为通常意义下的解 (定理 27), 于是

$$(T * \check{\varphi}) * \alpha = T * \check{\varphi}\,, \tag{6.10.22}$$

但对这两个函数取迹可得:

$$(T * \alpha).\,\varphi = T.\,\varphi\,, \tag{6.10.23}$$

这就证明了 (6.10.21). 但 (6.10.21) 的左边为无穷可导函数 (定理 11), 故 T 亦如此.

2° 我们刚才所用的球面均值性质如下: 若 $\mu_{(R)}$ 为支撑在半径为 R 的球面上、总质量为 $+1$ 的均匀测度, 则当 f 为调和函数时 $\mu_{(R)} * f$ 等于 f 即 $\delta * f$. 问题: 都有哪些支集为紧集的广义函数具有与 $\delta - \mu_{(R)}$ 一样的性质, 即 f 为调和函数时, 成立

$$H * f = 0\,? \tag{6.10.24}$$

若 f 为调和函数, 则 $\check{f}$ 为调和函数, 将 f 换成 $\check{f}$ 并令 $x = 0$, 则由 (6.10.24) 得

$$H.\,f = 0\,. \tag{6.10.25}$$

反过来, 由于调和函数的任意平移为调和函数, 则由 (6.10.25) 可导出 (6.10.24).

为使 H 拥有上述性质当且仅当 $H = \Delta T$, 其中 T 为具有紧支集的广义函数[①].

a) 条件充分, 这是因为若 f 为调和函数且若假设 $H = -\Delta L$, 则

$$H * f = (-\Delta * L) * f = -L * (\Delta * f) = 0\,. \tag{6.10.26}$$

b) 条件必要. 为此, 令

$$L = E * H\,, \tag{6.10.27}$$

其中 E 为与 $A = -\Delta\delta$ 对应的基本解 [公式 (6.10.15) 与 (6.10.16)]. 设 B_0 为包含 H 的支集的一个闭球. 若 $x \notin B_0$, 则 L 为由下式定义的函数 $L(x)$ (定理 11):

$$L(x) = H_t.\,E(x-t)\,. \tag{6.10.28}$$

但对于固定的 x, 将 $E(x-t)$ 看作 t 的函数, 则它在 B_0 的邻域上为调和函数; 而 B_0 的邻域上的任意调和函数在 B_0 的邻域上为调和多项式 f_j (为整个空间上的调和函数) 在 $(\mathscr{E})_t$ 中极限; 由假设 $H.\,f_j$ 为零, 则公式 (6.10.28) 的右边为零. 于是 L 在 B_0 之外为零, 故其支集为紧集, 而根据 Poisson 公式 (6.10.18) 可知 $H = -\Delta * L$. 这就是所要证明的.

---

① 参见 Choquet - Deny [1], p. 10.

例如, 我们可取 $H=\Delta\delta$ (则 $L=-\delta$); 或者 $H=\delta-\mu_{(R)}$, 那么

$$(6.10.29)\quad \begin{cases} L(x)=(\delta-\mu_{(R)})*E(x)\,, \\ L(x)=\begin{cases}\frac{1}{N}\left(\frac{1}{r^{n-2}}-\frac{1}{R^{n-2}}\right), & \text{若 } r\leqslant R, \\ 0, & \text{若 } r\geqslant R,\end{cases} & \text{若 } n\neq 2, \\ L(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\log\frac{R}{r}, & \text{若 } r\leqslant R, \\ 0, & \text{若 } r\geqslant R,\end{cases} & \text{若 } n=2. \end{cases}$$

我们可推广此问题并寻求广义函数 $H\in(\mathscr{E}')$ 使得对齐次方程 $A*T=0$ 的任意广义函数解 T $[A\in(\mathscr{E}')]$, 均有 $H*T=0$.

条件 $H=A*L$ $[L\in(\mathscr{E}')]$ 充分, 但似乎仅当 A 满足一些可导出我们在第 154 页所见的完全可逆性的特殊性质时, 该条件才会必要 (例如 $A=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$, $A=\Delta^k$, 等等) ①.

3° 如果 α 是一个具有第 1° 条中所指出的性质的函数, 那么 $\delta-\alpha$ 等于 $\Delta\varpi$, 其中 $\varpi=E*(\alpha-\delta)$ 是一个具有紧支集的函数且在 $\mathbb{R}^n$ 中原点的余集上无穷可导. 则 $\varpi(x-\xi)$ 为 Laplace 方程在第 5 章第 6 节公式 (5.6.35) 所指意义下的"拟基本解". 在第 1° 条中给出的证明因此恰好就是第 5 章中利用拟基本解给出的那个证明.

卷积不等方程. F. Riesz 分解公式 齐次卷积不等方程就是如下形式的不等方程:

$$(6.10.30)\quad A*T\geqslant 0,$$

其中 $A\in(\mathscr{E}')$ 为给定广义函数, 而 $T\in(\mathscr{D}')$ 为未知广义函数.

根据第 1 章定理 5, 该不等方程等价于卷积方程

$$(6.10.31)\quad A*T=\mu,$$

其中右边是一个任意的非负测度 μ. 于是若 A 完全可逆 (见第 153 页), 则我们可以彻底求解不等方程. 假设 A 仅为可逆而 E 为基本解. 此时我们有如下定理;

定理 30. 广义函数 T 为不等方程 (6.10.30) 的解当且仅当对于 $\mathbb{R}^n$ 的任意相对紧开集 Ω, 均有 Riesz 分解公式 ②:

$$(6.10.32)\quad \begin{cases} T=E*\nu+S\,, \\ \nu\geqslant 0 \text{ 为 } \mathbb{R}^n \text{ 上的测度, 其支集包含在开集 } \Omega \text{ 中}, \\ \text{在 } \Omega \text{ 上 } A*S=0\,. \end{cases}$$

此时对于任意给定的 Ω, 测度 ν 和广义函数 S 可被唯一确定.

① Malgrange 在 MALGRANGE [1] 中证明了我们可取 A 为任意常系数微分算子; 而这是其第 92 页命题 2 的推论的结论.

② F. Riesz 仅对上调和函数证明了此公式, 其中 $A=-\Delta\delta$. 他本人的证明以及之后的证明均没有这里的证明来得直观. 另外, 这里的证明也具有非常高的普适性. 参见 F. RIESZ [2].

1° 若 Riesz 分解存在, 则对于给定的 Ω, 上述 ν 和 S 的唯一性是显然的. 因为若将 A 与 (6.10.32) 中第一式两边复合 (其中 ν 有紧支集), 则根据第三式, 我们有:

$$A * T = A * E * \nu + A * S = \begin{cases} \nu + A * S \text{ 在 } \mathbb{R}^n \text{ 中}, \\ \nu \text{ 在 } \Omega \text{ 中}, \end{cases} \tag{6.10.33}$$

这就在 Ω 上进而在 $\mathbb{R}^n$ 上确定了 ν, 因为它支撑在 Ω 上. 随后 S 由 $T - E * \nu$ 确定.

2° 若假设 T 满足 (6.10.30), 则它满足 (6.10.31); 设 ν 为测度 μ 支撑在 Ω 上的部分 (ν 为 μ 与开集 Ω 的示性函数的乘积在 $\mathbb{R}^n$ 上定义的测度). 则 ν 为支撑在 Ω 上的非负测度. 若令 S 为差 $T - E * \nu$, 则有

$$A * S = A * T - A * E * \nu = \begin{cases} \mu - \nu & \text{在 } \mathbb{R}^n \text{中}, \\ 0 & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \end{cases} \tag{6.10.34}$$

这就证明了 ν 和 S 满足 (6.10.32); 故 T 具有 Riesz 分解.

3° 若广义函数 T 在任意相对紧开集上 Ω 具有 Riesz 分解, 则根据 (6.10.33) 可知 $A * T$ 在 Ω 上非负, 于是 $A * T$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上非负, 且 T 满足 (6.10.30).

在上调和函数上的应用 我们将下述不等方程的任意解称为上调和广义函数:

$$-\Delta * T \geqslant 0. \tag{6.10.35}$$

这里涉及形如 (6.10.30) 的卷积不等方程, 其中 $A = -\Delta\delta$. Riesz 分解将 T 表示成支撑在 Ω 上的非负测度 ν 的 Newton 势 $U^{(\nu)}$ [公式 (6.10.17)] 与在 Ω 上为通常调和函数的广义函数 S 之和 (定理 29).

另外可知我们通常所称的概上调和函数为 (几乎处处有定义的) 局部可积函数且使得对任意 $R > 0$, 我们几乎处处有

$$f \geqslant \mu_{(R)} * f, \quad \text{也即 } (\delta - \mu_{(R)}) * f \geqslant 0, \tag{6.10.36}$$

(如前面一样, 这里 $\mu_{(R)}$ 为球面 $|x| = R$ 上总质量为 $+1$ 的均匀测度). 而 $\mu_{(R)} * f$ 为在每点 x 处等于 f 在以 x 为中心以 R 为半径的球面上的均值的函数.

我们将证明上调和广义函数与通常的概上调和函数相等.

1° 设 f 为通常的概上调和函数. 对任意 $R > 0$, 它作为广义函数满足

$$\frac{\delta - \mu_{(R)}}{R^2} * f \geqslant 0. \tag{6.10.37}$$

让 R 趋于 0, 则测度 $\frac{\delta - \mu_{(R)}}{R^2}$ 在 $(\mathscr{E}')$ 中趋于 $-\frac{1}{2n}\Delta\delta$.

事实上, 若 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 则利用直到二阶的 Taylor 展式可以证明:

$$\lim_{R \to 0} \frac{\delta - \mu_{(R)}}{R^2} . \varphi = \lim_{R \to 0} \frac{\varphi(0) - \dfrac{1}{S_n(R)} \displaystyle\int \cdots \int_{|x|=R} \varphi \, dS}{R^2} = -\frac{1}{2n} \Delta\varphi(0), \tag{6.10.38}$$

其中 dS 为面积元, 而 $S_n(R)$ 为半径为 R 的球面面积.

于是由 (6.10.37) 和卷积连续性 (定理 5) 可导出 f 满足 (6.10.35), 其中 Δ 为广义函数意义下的 Laplace 算子. 因此任意的通常概上调和函数为上调和广义函数.

可见, 之所以用人为的方法 (6.10.37) 来定义通常的概上调和函数, 是因为我们无法使用这里根本就不存在的通常 Laplace 导数 $[\Delta f]$ [①].

2° 任意的上调和广义函数 T 具有 Riesz 分解; 但这里 $E(x) * \nu$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上函数, 因为 $E(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的函数. 而 S 在 Ω 上是一个函数; 因此 T 在 Ω 上是一个函数. 由于 Ω 是任意的, 则 T 为 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 f (从而 S 也是如此).

若 $L(x)$ 为 (6.10.29) 中函数, 则 $\delta - \mu_{(R)} = -\Delta * L$; 由 (6.10.35) 和 $L \geqslant 0$ 可得

$$[\delta - \mu_{(R)}] * T = -\Delta * L * T = L * (-\Delta * T) \geqslant 0\,. \tag{6.10.39}$$

评注与推广

a) 通常的上调和函数是一个处处有定义的函数, 处处满足 (6.10.36), 而且还为下半连续; 我们没有考虑这点, 这是因为对我们来说一个函数仅几乎处处有定义. 对于给定的概上调和函数, 存在唯一一个上调和函数与之几乎处处相等.

立刻可知, 若将势看作处处有定义, 则公式 (6.10.32) 的右边为下半连续函数; 若 f 为通常的上调和函数, 则它处处等于公式 (6.10.32) 的右边.

b) 都有哪些广义函数 H 与 $-\Delta\delta$ 或 $\delta - \mu_{(R)}$ 一样具有紧支集且使得对任意的概上调和函数 f, 均有

$$H * f \geqslant 0\,? \tag{6.10.40}$$

若 f 为调和函数, 则应有 $H * f = 0$ (这是因为 f 和 $-f$ 均为上调和函数), 于是根据第 157 页中所见可知 $H = -\Delta * L$, 这里 L 是一个具有紧支集的广义函数. 如同在公式 (6.10.26) 中那样, 当 $-\Delta * f \geqslant 0$ 时, 我们应有

$$H * f = L * (-\Delta * f) \geqslant 0\,. \tag{6.10.41}$$

当 $L \geqslant 0$ 时, 这总可以实现; 反过来, 仅当 $L \geqslant 0$ 时才会对 $f = E$ (或 $-\Delta * f = \delta$) 成立. 因此当且仅当 $H = -\Delta L$, 其中 L 为具有紧支集的非负测度.

c) 利用广义 Volterra 卷积, 我们也可以得到偏微分不等方程 $DT \geqslant 0$ 的解的 Riesz 分解, 这里 D 是一个具有基本解的变系数微分算子; 比如说, 对于无穷可微 Riemann 空间上的上调和函数.

---

① 由 Zaremba 或 Brelot 的广义 Laplace 算子可给出一个直接的定义 (Brelot [1], 第 1 章第 1 节). 但这个直接定义比用广义函数的那个更为复杂和微妙. 更一般地, 凡与通常的上调和函数及通常的概上调和函数有关的, 大家可查阅此书以及该作者的其它著作: Brelot [2], [3]. 也见 Rado [1].

第七章 Fourier 变换

内容提要 正是在 Fourier 级数、尤其是 Fourier 积分的研究领域, 人们迫切感到有必要走出函数的框架.

第 1 节讨论 Fourier 级数. 任意周期广义函数有一个收敛到该广义函数的 Fourier 级数; 系数缓增的任意三角级数收敛于一个周期广义函数, 该周期广义函数的 Fourier 级数等于该三角级数 (定理 1, p. 163). 对大多数技术性应用来说, 该定理就足够了. 第 2 节回顾了通常的 Fourier 积分的经典性质. 而大家仅需知道互反公式 (7.2.3) 与 Parseval 公式 (7.2.4) 就可理解后面的内容.

我们仅可对 $(\mathscr{D}')$ 的缓增广义函数子空间 $(\mathscr{S}')$ 中的广义函数定义 Fourier 变换, 但不可能对所有的广义函数来定义 Fourier 变换. 缓增广义函数空间 $(\mathscr{S}')$ 是一个比第 1 章中的空间 $(\mathscr{D})$ 更大的无穷可导函数的空间 $(\mathscr{S})$ 的对偶.

第 3 节定义这个速降无穷可导函数的空间 $(\mathscr{S})$, 并给出一些基本性质.

第 4 节定义缓增广义函数空间 $(\mathscr{S}')$. 定理 6 (p. 173) 与定理 7 (p. 175) 使我们可将缓增广义函数刻画成在无穷远处缓慢增长的广义函数. 这个刻画在实际应用中非常有用, 另外大家也可跳过它的那个有些棘手的证明.

第 5 节研究 $(\mathscr{S}')$ 中的乘积与卷积. 我们可将任意缓增广义函数乘以缓增无穷可导函数 [乘子空间 $(\mathscr{O}_M)$], 并与任意速降广义函数 [卷积算子空间 $(\mathscr{O}'_C)$] 作卷积. 这些运算均连续, 且满足结合律和交换律 [定理 10 (p. 178) 与定理 11 (p. 180)]. 为了能更快地进入 Fourier 变换的学习, 大家可在此之前先阅读第 6 节和第 7 节, 这两节的价值主要是理论上的.

第 6 节利用公式 $\mathscr{F}U.v = U.\mathscr{F}v$ (7.6.7) 来定义缓增广义函数的 Fourier 变换. 这个从 $(\mathscr{S}')$ 到 $(\mathscr{S}')$ 的变换为双射且双边连续 (定理 13, p. 183).

第 7 节给出了一些例子. 建议将其中几个作为练习来讨论, 但大家也可仅限于在需要时来查阅该节. 我们不能奢望在一节中给出所有在实际应用中有用的例子.

第 8 节给出了 Fourier 变换的一些理论上的性质. 最主要的性质是在函数情形广为人知的乘积与卷积之间的互换性 (定理 15, p. 196), 以及广义 Paley – Wiener 定理 (定理 16, p. 199), 后者是在说支集为紧集的任意广义函数的 Fourier 变换均为指数型解析函数, 而反之亦然.

第 9 节研究非负型广义函数, 推广了通常的非负型函数. 这样的一个广义函数可由对任意 $\varphi \in (\mathscr{D}')$ 均有 $T(\varphi * \check{\varphi}) \geqslant 0$ (7.9.7) 这个事实来刻画. 最基本的性质为广义 Bochner 定理 (定理 18, p. 202): 任意的非负型广义函数是一个非负缓增测度的 Fourier 变换, 而反之亦然.

第 10 节包含 Fourier 变换在卷积方程中的一些实际应用 (第 6 章第 10 节): 齐次方程, 基本解, 常数项任意的非齐次方程. 我们并没有寻求给出更多的例子, 只想以此表明所出现的范例种类很多.

LAVOINE [1] 给了一些广义函数的 Fourier 变换表. 另外, Fourier 变换在物理中的应用也在 ARSAC [1], WIGHTMAN [1], SCHWARTZ [18] 中得到系统地阐述.

广义函数的 Fourier 变换可在任意的局部紧 Abel 群上来研究[①]. 我们将仅限于环面 $\mathbb{T}^n$ (涉及 Fourier 级数), 以及数值空间 $\mathbb{R}^n$ (涉及 Fourier 积分).

§1. Fourier 级数

环面上的广义函数 我们将环面 $\mathbb{T}^n$ 表示成 $\mathbb{R}^n$ 关于子群 $\mathbb{Z}^n$ 的商群, 其中 $\mathbb{Z}^n$ 为整数群 $\mathbb{Z}$ 的 n 次幂. 环面 $\mathbb{T}^n$ 的任意点 $\dot{x}$ 可由它的 n 个坐标 $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n$ 来表示, 后者均为模 1 的实数. 环面 $\mathbb{T}^n$ 为无穷可微紧流形, 在它上面存在一个特殊的 Haar 测度 $d\dot{x} = d\dot{x}_1\, d\dot{x}_2 \cdots d\dot{x}_n$ 以及求偏导算子 $\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}, \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \dot{x}_n}$ [第 1 章第 5 节第 3° 段]. 在前几章中针对 $\mathbb{R}^n$ 所证明的性质对 $\mathbb{T}^n$ 也成立, 只要它们仅涉及局部性. 对所有的积分问题 (第 2 章), 整体性研究则相反激发一些代数拓扑问题 (例如, 当 $n = 1$ 时, 广义函数 T 仅当它的积分为零时才会有原函数). 第 3 章中的定理 21, 定理 22 以及定理 23 在足够小的开集上成立, 而将单个导数换成一些导数的有限和后, 这些结论在 $\mathbb{T}^n$ 上也成立 (第 6 章定理 22 和定理 23). 环面 $\mathbb{T}^n$ 上的卷积具有与 $\mathbb{R}^n$ 上的卷积同样的性质, 且由 $\mathbb{T}^n$ 的紧性而得到了简化.

为了能清楚区别环面 $\mathbb{T}^n$ 与空间 $\mathbb{R}^n$, 我们将环面的上函数或广义函数记作 $\dot{f}(\dot{x})$ 或 $\dot{T}$, 将点积记作 $\dot{T} \odot \dot{\varphi}$, 而将卷积记作 $\dot{S} \circledast \dot{T}$.

① RISS [1], BRUHAT [1]. 另外, 我们也可以研究有限维向量空间上的缓增流的 Fourier 变换: 参见 SCARFIELLO [1] 以及本书的第 9 章第 6 节.

Fourier 级数 **定理 1.** 1° 环面上的任意广义函数 $\dot{T}$ 可被赋予如下 Fourier 系数:

$$(7.1.1)\quad \begin{cases} a_l(\dot{T}) = \dot{T} \odot \exp(-2i\pi l.\dot{x}), \\ l.\dot{x} = l_1\dot{x}_1 + l_2\dot{x}_2 + \cdots + l_n\dot{x}_n, \quad \text{其中 } l = (l_1, l_2, \ldots, l_n), \text{ 而 } l_\nu \text{ 均为整数.} \end{cases}$$

这些系数 a_l 在 $|l| \to +\infty$ 时缓增:

$$(7.1.2)\quad \begin{cases} \lim\limits_{|l|\to+\infty} \dfrac{|a_l|}{(1+|l|^2)^k} = 0, \quad \text{其中 } k \text{ 充分大}, \\ |l| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2}. \end{cases}$$

由这些系数构成的 Fourier 级数在 $(\mathscr{D}')_{\mathbb{T}^n}$ 中收敛于 $\dot{T}$:

$$(7.1.3)\quad \sum_l a_l(\dot{T}) \dot{\exp}(2i\pi l.\dot{x}) = \dot{T}.$$

2° 反过来, 若 b_l 为任意一列在 $|l| \to +\infty$ 时缓增的复数序列, 则三角级数

$$\sum_l b_l \dot{\exp}(2i\pi l.\dot{x})$$

在 $(\mathscr{D}')_{\mathbb{T}^n}$ 中收敛于一个以这些 b_l 作为其 Fourier 系数的广义函数 $\dot{T}$.

一个三角级数收敛当且仅当仅当其系数序列缓增.

该定理消除了 Fourier 级数与不是 Fourier 级数的三角级数之间那个惯有的、令人难以忍受的区别. 另外, 它使得那些让 Fourier 级数收敛的“求和法”变得无用.

1° 首先注意到由公式 (7.1.1) 可直接给出

$$(7.1.4)\quad a_l(\dot{S} \circledast \dot{T}) = (\dot{S}_\xi \otimes \dot{T}_\eta).\dot{\exp}\big[-2i\pi l.(\dot{\xi} + \dot{\eta})\big] = a_l(\dot{S}) a_l(\dot{T}).$$

另外, 我们也有

$$(7.1.5)\quad a_l(\dot{\delta}) = 1, \quad a_l\left(\frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{x}_k}\right) = 2i\pi l_k,$$

由此可得

$$(7.1.6)\quad a_l\left(\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{x}_k}\right) = a_l\left(\frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{x}_k}\right) a_l(\dot{T}) = 2i\pi l_k a_l(\dot{T}).$$

由于广义函数 $\dot{T}$ 为连续函数导数的有限和, 而连续函数的 Fourier 系数有界, 于是对任意的广义函数 $\dot{T}$, 系数 $a_l(\dot{T})$ 在 $|l| \to +\infty$ 时缓增.

Dirac 测度 $\dot{\delta}$ 的 Fourier 级数在 $(\mathscr{D}')_{\mathbb{T}^n}$ 中趋于 $\dot{\delta}$; 事实上

$$\sum_l \dot{\exp}(2i\pi l.\dot{x}) \odot \dot{\varphi} = \sum_l a_{-l}(\dot{\varphi}) = \dot{\varphi}(\dot{0}) = \dot{\delta} \odot \dot{\varphi}, \tag{7.1.7}$$

(由于 $\dot{\varphi}$ 为无穷可导, 故其 Fourier 级数收敛, 特别地, 该级数在点 $\dot{x} = \dot{0}$ 处收敛). 于是由卷积的连续性可知任意广义函数 $\dot{T}$ 的 Fourier 级数趋于 $\dot{T}$, 也即

$$\begin{aligned}\sum_l a_l(\dot{T})\dot{\exp}(2i\pi l.\dot{x}) &= \sum_l \dot{T}_\xi \odot \dot{\exp}\left[2i\pi l.(\dot{x}-\dot{\xi})\right] \\ &= \sum_l \dot{T} \circledast \dot{\exp}(2i\pi l.\dot{x}) = \dot{T} \circledast \dot{\delta} = \dot{T}.\end{aligned} \tag{7.1.8}$$

2° 若现在 b_l 为缓增复值序列, 则对于充分大的整数 k, 数值序列

$$\sum_l \frac{|b_l|}{(1+|l|^2)^k}$$

收敛, 故级数

$$\sum_l \frac{|b_l|}{(1+|l|^2)^k} \dot{\exp}(2i\pi l.\dot{x})$$

一致收敛于某个连续函数 $\dot{f}(\dot{x})$; 对之应用求导算子 $\left(1-\frac{\dot{\Delta}}{4\pi^2}\right)^k$ 后所得到的导级数

$$\sum_l b_l \dot{\exp}(2i\pi l.\dot{x})$$

因此也收敛于一个广义函数 $\dot{T} = \left(1-\frac{\dot{\Delta}}{4\pi^2}\right)^k \dot{f}$. 最后那个广义函数 $\dot{T}$ 恰好以 b_l 作为其 Fourier 系数; 更一般地, 若级数

$$\sum_l b_l \dot{\exp}(2i\pi l.\dot{x})$$

趋于广义函数 $\dot{T}$, 则 $\dot{T}$ 以 b_l 作为其 Fourier 系数 (这就迫使 b_l 在 $|l| \to +\infty$ 时缓增), 这是因为我们在依据经典的方法计算 $a_l(\dot{T})$ 时逐项进行, 从而由指数函数的正交性可将 $a_l(\dot{T})$ 化简成 b_l.

评注. 1° 与此同时, 上述证明表明环面上的广义函数 $\dot{T}$ 等于

$$\left(1-\frac{\dot{\Delta}}{4\pi^2}\right)^k \dot{f},$$

其中 $\dot{f}$ 为连续函数, 而 k 是一个充分大的整数.

2° 若级数 $\sum_l b_l \dot{\exp}(2i\pi l.\dot{x})$ 在 $\mathbb{T}^n$ 的开子集 Ω 上收敛, 将第 6 章定理 13 和公式 (6.6.22) 在 Ω 上应用于在 $(\mathscr{D}')_\Omega$ 内趋于 0 的函数列 $b_l \dot{\exp}(2i\pi l.\dot{x})$, 则可知 b_l 在 $|l| \to +\infty$ 时缓增; 该级数不仅在 Ω 上且在 $\mathbb{T}^n$ 上也收敛, 因此是 Fourier 级数.

3° 可见, 若 $c(l)$ 为缓增序列 (比如说, 关于 l 的多项式), 则当 $|l| \to +\infty$ 时函数列 $c(l)\dot{\exp}(2i\pi l.\dot{x})$ 在 $(\mathscr{D}')_{\mathbb{T}^n}$ 中趋于 0. 我们也可以将之说成"当 $|l| \to +\infty$ 时函数列 $\dot{\exp}(2i\pi l.\dot{x})$ 在 $(\mathscr{D}')_{\mathbb{T}^n}$ 中比 $\frac{1}{|l|}$ 的任何幂都更快地趋于 0". 但这个说法可能会将人引向歧途. 事实上, 对于在 $|l| \to +\infty$ 时比 $|l|$ 的任何幂都要增长得更快的任意序列 $c(l)$, 函数列 $c(l)\dot{\exp}(2i\pi l.\dot{x})$ 在 $(\mathscr{D}')_{\mathbb{T}^n}$ 中无界. 函数族 $c(h)\exp(2i\pi h.x)$ $(h \in \mathbb{R}^n)$ 在 $(\mathscr{D}')_{\mathbb{R}^n}$ 中甚至是在 $(\mathscr{B}')_{\mathbb{R}^n}$ 中, 也有同样的性质.

4° 若 $\varphi \in (\mathscr{D})_{\mathbb{T}^n}$, 则序列 $a_l(\dot{\varphi})$ 在 $|l| \to +\infty$ 时速降, 也即对任意整数 k,

$$\lim_{|l| \to +\infty} |l|^k |a_l(\dot{\varphi})| = 0 .$$

于是借助 Fourier 级数, 我们可将 $(\mathscr{D})_{\mathbb{T}^n}$ 和 $(\mathscr{D}')_{\mathbb{T}^n}$ 分别与速降数值序列空间和缓增数值序列空间对应起来 (拓扑向量空间之间的同构). 而 $(\mathscr{D})_{\mathbb{T}^n}$ 和 $(\mathscr{D}')_{\mathbb{T}^n}$ 之间的对偶则通过下面的 Parseval 公式对应于上述那两个序列空间之间的对偶:

$$\dot{T} \odot \dot{\varphi} = \sum_l a_l(\dot{T}) a_{-l}(\dot{\varphi}) . \tag{7.1.9}$$

例子与应用

1° **椭圆函数的 Fourier 级数** 设 $\mathfrak{p}(x)$ 为对应于周期 1 和 i 的通常椭圆函数. 我们可以将之看成是二维环面上的亚纯函数. 由于 $\mathfrak{p}(x)$ 在原点的邻域内不可积, 故它不能定义一个广义函数, 但由我们在第 2 章第 3 节例 3 中所见可知 vp. $\dot{\mathfrak{p}}(\dot{z})$ 是一个广义函数, 而我们将寻求其 Fourier 展开. 根据公式 (2.3.27), 我们有

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Big[\mathrm{vp.}\, \dot{\mathfrak{p}}(\dot{z}) \Big] = -\pi \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{z}} . \tag{7.1.10}$$

依 $\dot{\exp}\big[2i\pi(p\dot{x} + q\dot{y})\big]$ (p, q 为整数) 进行 Fourier 展开可知, 若不计加法常数, 则上述偏微分方程仅有一个解, 这是因为我们有

$$\frac{1}{2} 2i\pi(p + iq) a_{p,q} \Big[\mathrm{vp.}\, \dot{\mathfrak{p}}(\dot{z}) \Big] = -\pi \frac{1}{2} 2i\pi(p - iq) ,$$

由此可得

$$\mathrm{vp.}\, \dot{\mathfrak{p}}(\dot{z}) = a_{0,0} - \pi \sum_{(p,q) \neq (0,0)} \frac{p - iq}{p + iq} \dot{\exp}\Big[2i\pi(p\dot{x} + q\dot{y}) \Big] . \tag{7.1.11}$$

这些系数的模均为 1, 故有界, 因此系数序列为缓增序列, 于是上述级数收敛. 由同样的方法可以证明, 只要能以 $p + iq$ 为分母做除法, 则存在一个周期为 1 和 i、具有给定极点且在每个极点的邻域内具有给定极展开的椭圆函数, 若不计加法常数, 该椭圆函数还唯一; 这仅仅要求与 (7.1.11) 类似的那个方程的右边的系数 $a_{0,0}$ 为零, 即所有留数之和为零. 该椭圆函数由与之相伴的 vp. 赝函数的 Fourier 级数确定.

2° **有限差分方程** 我们打算确定在 $p^2+q^2\to+\infty$ 时缓增且满足下述有限差分方程的双整数指标序列 $a_{p,q}$:

$$a_{p+1,q}+a_{p-1,q}+a_{p,q+1}+a_{p,q-1}-4\lambda a_{p,q}=b_{p,q}\,, \tag{7.1.12}$$

其中 $b_{p,q}$ 为给定序列且被假设在 $p^2+q^2\to+\infty$ 时缓增. 若将 $a_{p,q}$ 和 $b_{p,q}$ 看成是环面上的广义函数 $\dot{A}$ 和 $\dot{B}$ 的 Fourier 级数, 则应有

$$2(\cos 2\pi\dot{x}+\cos 2\pi\dot{y}-2\lambda)\dot{A}=\dot{B}\,. \tag{7.1.13}$$

a) 若 λ 不为实数或为实数但 $|\lambda|>1$, 则我们立刻可做除法, 而唯一可能在 $p^2+q^2\to+\infty$ 时缓增的序列 $a_{p,q}$ 为下列广义函数的 Fourier 系数:

$$\dot{A}=\frac{\dot{B}}{2(\cos 2\pi\dot{x}+\cos 2\pi\dot{y}-2\lambda)}\,.$$

b) 若 λ 为实数且 $0<|\lambda|<1$, 则由 $\cos 2\pi\dot{x}+\cos 2\pi\dot{y}-2\lambda=0$ 所定义的流形 V 没有重点, 于是由第 5 章定理 8 可知能以 $\cos 2\pi\dot{x}+\cos 2\pi\dot{y}-2\lambda$ 为分母做除法; 但对于 $\dot{A}$ 却存在无穷多个解; 它们当中之差为支撑在 V 上的任意单层.

c) 若 $\lambda=0$, 则流形 V 具有一些有不同切向量的二重点, 此时我们也知道如何求解除法问题. 若 $\lambda=\pm1$, 则 V 退缩成 $(\dot{0},\dot{0})$, 或 $(\dot{\frac{1}{2}},\dot{\frac{1}{2}})$, 或孤立二重点, 此时的除法不属于第 5 章已讨论过的问题, 但依然可以很容易处理.

环面上的广义函数与 $\mathbb{R}^n$ 上的周期广义函数 立刻可见, 通过在每点邻域内定义广义函数并借助"分片粘贴"(第 1 章定理 4), 我们可以在环面上的广义函数 $\dot{T}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 上关于每个坐标以 1 为周期, 也即对任意 $l=(l_1,l_2,\ldots,l_n)$ (其中 l_ν 均为整数) 满足

$$\tau_l T=T \tag{7.1.14}$$

的周期广义函数 T 之间建立一一对应关系.

出于简短, 我们将这样一个广义函数 T 简称为"周期"广义函数; 并将环面上与 T 相伴的广义函数记作 $\dot{T}$, 有时也记作 T°.

这两个广义函数在局部上相等, 因此有同样局部正则性 (可微性, 阶, 等等...). 故任意周期广义函数为 $(1-\frac{\dot{\Delta}}{4\pi^2})^k f$, 其中 f 为周期连续函数而 k 为充分大整数.

周期广义函数为概周期 (第 6 章第 9 节).

立刻可知, 在这些条件下, 积 $\dot{S}\circledast\dot{T}$ 和 $\dot{T}\odot\dot{\varphi}$ 就是 $\mathbb{R}^n$ 上针对概周期广义函数所定义的积 $S\circledast T$ 和 $T\odot\varphi$ [公式 (6.9.3) 和 (6.9.4)]. 同样地, Fourier 系数 $a_l(\dot{T})$ 就是概周期广义函数 T 的 Fourier 系数 [公式 (6.9.7)], 而与非整数坐标 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ 相对应的系数 a_λ 则等于零.

现在设 T 为 $\mathbb{R}^n$ 上可积广义函数 $[T \in (\mathscr{D}'_{L^1})]$. 我们可在环面上定义 T 在从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{T}^n$ 的自然映射 $x \to \dot{x}$ 下的直接像 (该自然映射在无穷远处不正则, 故需关于 T 的可积性的限制条件). 这个直接像可与 $\mathbb{R}^n$ 上的一个周期广义函数视为等同, 我们将之记作 ϖT, 称为 T 的周期变换.

设 $\varphi \in (\mathscr{D}_{L^1})_{\mathbb{R}^n}$, $\dot{\psi} \in (\mathscr{D})_{\mathbb{T}^n}$, 而 $S, S_1, S_2 \in (\mathscr{D}'_{L^1})_{\mathbb{R}^n}$, $T \in (\mathscr{D}')_{\mathbb{T}^n}$, 则我们有:

$$(7.1.15)\qquad \begin{cases} \varpi\varphi = \sum\limits_l \varphi(x-l), \quad \varpi S = \sum\limits_l \tau_l S, \\ (\varpi S)^\circ \odot \dot{\psi} = S.\psi, \quad \dot{T} \odot (\varpi\varphi)^\circ = T.\varphi, \\ (\varpi S)^\circ \odot (\varpi\varphi)^\circ = S.\varpi\varphi = \varpi S.\varphi, \end{cases}$$

$$(7.1.16)\qquad \begin{cases} (\varpi S_1)^\circ \circledast (\varpi S_2)^\circ = (S_1 * \varpi S_2)^\circ = (\varpi S_1 * S_2)^\circ = [\varpi(S_1 * S_2)]^\circ, \\ (\varpi S)^\circ \circledast \dot{T} = (S * T)^\circ. \end{cases}$$

这些公式使得我们可以直接计算 $\mathbb{R}^n$ 上周期广义函数 T 的 Fourier 系数, 而无需过渡到环面上的点积:

$$(7.1.17)\qquad a_l(T) = T.e_l,$$

其中 e_l 为 $(\mathscr{D})$ [或 $(\mathscr{D}_{L^1})$] 中其周期变换 ϖe_l 等于 $\exp(-2i\pi l.x)$ 的任意函数. 当 T 是一个函数 f 时, 通常选取 e_l 在某个单位立方体上等于 $\exp(-2i\pi l.x)$ 而在其它地方等于 0, 这就将 $a_l(f)$ 表示成一个单位立方体上的积分; 由于所取的函数 e_l 不连续, 故当 T 为广义函数时, 该方法不可用.

但我们也有

$$(7.1.18)\qquad a_l(T)\exp(2i\pi l.x) = \dot{T} \circledast \exp(2i\pi l.x) = (T * E_l)^\circ,$$

其中 E_l 为 $(\mathscr{D}'_{L^1})$ 中其周期变换 ϖE_l 等于 $\exp(2i\pi l.x)$ 的任意广义函数. 我们因此可取 E_l 来替代支撑在 $\mathbb{R}^n$ 的某个单位立方体上的那个常用的间断函数.

§2. n 维空间上通常的 Fourier 变换①

通常的 Fourier 变换 设 X^n 和 Y^n 为两个同构于 $\mathbb{R}^n$ 的向量空间; 空间 X^n 中点 x 的坐标为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 而 Y^n 中点 y 的坐标为 $y_1, y_2, \ldots, y_n$. 我们将继续采用前面几章在一维时所用记号; 另外, 我们还假设 X^n 和 Y^n 借助下述点积构成对偶:

$$(7.2.1)\qquad x.y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

① 关于通常的 Fourier 积分的经典性质, 可参阅: BOCHNER [1], TITCHMARSH [1], CARLEMAN [1], A. WEIL [1], WIENER [1].

空间 X^n 上函数 $f(x)$ 通常的 Fourier 变换是由下述公式定义的 Y^n 上函数 $g(y)$:

$$(7.2.2)\qquad \begin{cases} g = \mathscr{F} f\,, \\ g(y) = \displaystyle\iint\cdots\int f(x)\exp(-2i\pi x.\,y)\,dx\,, \end{cases}$$

且有 Fourier 逆变换公式:

$$(7.2.3)\qquad \begin{cases} f = \overline{\mathscr{F}} g\,, \\ f(x) = \displaystyle\iint\cdots\int g(y)\exp(+2i\pi x.\,y)\,dy\,. \end{cases}$$

另外, 我们还有 Parseval 公式, 该公式在后面的研究中起着非常重要的作用: 若 $g_1 = \mathscr{F} f_1$, $g_2 = \mathscr{F} f_2$, 则 Parseval 公式可以写成:

$$(7.2.4)\qquad \begin{cases} \displaystyle\iint\cdots\int f_1(x)\bar{f}_2(x)\,dx = \iint\cdots\int g_1(y)\bar{g}_2(y)\,dy\,, \quad \text{也即} \\ \displaystyle\iint\cdots\int f_1(x)f_2(x)\,dx = \iint\cdots\int g_1(y)g_2(-y)\,dy\,. \end{cases}$$

上述公式仅在一些非常强的限制条件下才有意义. 例如, 在定义 Fourier 变换的公式 (7.2.2) 中需要假设 $f(x)$ 在 X^n 上可积. 此时 $g(y)$ 连续且由一个经典的 Lebesgue 定理可知它在 $|y| \to +\infty$ 时趋于 0. 但借助各种方法, 我们依然可以在更为一般的情形给公式 (7.2.2) 赋予一个意义:

a) 当 $f(x)$ 在 $|x| \to +\infty$ 时缓增, 我们可利用在一维 $(n = 1)$ 的情形已系统化的 Bochner 先生或 Carleman 先生的方法来定义 g ①; 这些可被纳入我们后面的公式中.

b) 另外, 若 $f(x) \in L^p$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, 虽然当 $p \neq 1$ 时定义 g 的那个积分并不对每个 y 的值收敛, 但我们可以借助一个经典的泛函方法 (Plancherel – Riesz 理论) 来在整体上定义 $g(y)$. 此时 $g(y) \in L^{p'}$ $[p' = \frac{p}{p-1}]$, 且有上界估计

$$(7.2.5)\qquad \|\mathscr{F} f\|_{p'} \leqslant \|f\|_p\,,$$

当 $p = 2$ 时, 上述不等式变为 (Parseval) 等式.

相反, 仅在某些限制性条件下逆变公式 (7.2.3) 才有意义; 例如, 若 $f(x)$ 可积, 则 $g(y)$ 连续但一般绝不可积; 若函数 $g(y)$ 满足条件 *a*) 或 *b*) 使得我们可对之应用变换 $\overline{\mathscr{F}}$, 则可知 $\overline{\mathscr{F}} g$ 等于 f.

同样地, Parseval 公式也需要一些特殊的条件; 该公式两边均有意义并不足以保证它们相等. 但无论如何, 当 $f(x) \in L^2$ 时, 我们可由 $g(y) \in L^2$ 这个事实来断言逆变公式 (7.2.3) 成立且 f 和 g 起同等作用, 而 $\mathscr{F}$ 和 $\overline{\mathscr{F}}$ 为 $(L^2)_x$ 和 $(L^2)_y$ 之间的互逆同构; 若 f_1, f_2, g_1, g_2 属于 L^2, 则 Parseval 公式成立, 该公式两边为可积函数的积分. 若将 X^n 和 Y^n 与同一个空间 $\mathbb{R}^n$ 视为同一, 则 $\mathscr{F}$ 和 $\overline{\mathscr{F}}$ 为 L^2 上的酉算子.

我们也可定义可积测度 μ $[\iint |d\mu| < +\infty]$ 的 Fourier (或 Fourier – Stieltjes) 变换. 为此, 只需在 (7.2.2) 中将 $f(x)\,dx$ 换成 $d\mu$; 所得到的是一个有界连续函数 $g(y)$.

① Bochner [1], p. 110 – 144; Carleman [1], p. 6 – 52.

广义函数的情形 我们将对广义函数定义 Fourier 变换并赋予两个逆变公式同等的价值. 然而, 对任意广义函数 $T \in (\mathscr{D}')_x$, 不可能将其 Fourier 变换定义成一个新的广义函数. 事实上, 可知 $\mathscr{F}T$ 的任何一个可接受的定义都会给该元素赋予一些与广义函数的性质不相容的性质. 现在让我们来讲得更为明确一些. Fourier 变换的一个可接受的定义应该, 一方面使得 $\mathscr{F}$ 为连续线性变换, 而另外一方面则能推广通常的 Fourier 变换的下述经典性质:

(7.2.6) $$\mathscr{F}(xT) = -\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dy}(\mathscr{F}T) \quad (\text{单变量的情形},\ n=1),$$

特别地, 由于 $\mathscr{F}(1) = \delta$ Dirac 测度, 因此应有:

$$\mathscr{F}x) = \left(-\frac{1}{2i\pi}\right)\delta', \quad \mathscr{F}(x^m) = \left(-\frac{1}{2i\pi}\right)^m \delta^{(m)}.$$

由于级数 $\sum_m \frac{x^m}{m!}$ 在任意紧集上一致收敛于 e^x, 故在 $(\mathscr{D})$ 中亦如此, 于是级数

$$\sum_m \left(-\frac{1}{2i\pi}\right)^m \frac{\delta^{(m)}}{m!}$$

应在 $(\mathscr{D})_y$ 中收敛于 $\mathscr{F}(e^x)$. 但该级数在 $(\mathscr{D})_y$ 中不收敛, 这是因为它的通项不是连续函数的固定阶的导数 (第 3 章定理 22). 由此我们可以断言:

1° Fourier 变换仅对属于 $(\mathscr{D}')_x$ 的子空间 $(\mathscr{S}')_x$ 中的广义函数有定义; 函数 e^x 没有 Fourier 变换.

2° 为使 $\mathscr{F}$ 为连续线性变换, 须在 $(\mathscr{S}')_x$ 上赋予一个比 $(\mathscr{D}')_x$ 的拓扑更为精细的拓扑. 在这个新的拓扑下, 诸如 $\sum_m \frac{x^m}{m!}$ 这样的级数不能收敛.

Gelf'and – Shilov [1] 在他们所提出的“广义函数”的框架下研究了非缓增的广义函数的 Fourier 变换.

§3. 空间 $\mathbb{R}^n$ 上的速降无穷可导函数的空间 $(\mathscr{S})$

空间 $(\mathscr{S})$ 设 $(\mathscr{S})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上通常意义下的无穷可导数值函数 $\varphi(x)$ 的空间, 其中 $\varphi(x)$ 本身及其各阶导数在 $|x| \to +\infty$ 时比 $\frac{1}{|x|}$ 的任意幂都要递降得更快: 也就是说, 对任意 $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ 以及任意整数 $k \geqslant 0$, 均有

(7.3.1) $$\lim_{|x|\to+\infty} |x^k D^p \varphi(x)| = 0.$$

也可以说: 若 $\varphi \in (\mathscr{S})$, 则任意多项式 $P(x)$ 与 $Q * \varphi$ 的乘积为 $\mathbb{R}^n$ 上有界连续函数且反之亦然, 其中 Q 为“多项式求导算子” [见公式 (6.3.33)]; 也即, 若 $\varphi \in (\mathscr{S})$, 则 φ 与任意多项式 $P(x)$ 的乘积的导数 $Q * (P\varphi)$ 为有界连续函数且反之亦然. 出于简短, 函数 φ 将被称为“速降无穷可导”函数. 而 $(\mathscr{D})$ 显然是 $(\mathscr{S})$ 的子空间.

我们将在 $(\mathscr{S})$ 上引入一个拓扑: 称 $\varphi_j \in (\mathscr{S})$ 在 $(\mathscr{S})$ 中趋于 0, 如果对任意的多项式 $P(x)$ 以及任意的多项式求导算子 Q, 函数族 $P(Q * \varphi_j)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致趋于 0; 等价地, 若对任意 P 和 Q, 函数族 $Q * (P\varphi_j)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致趋于 0 (如同往常一样, 并不要求关于所有多项式 P 和 Q 的一致收敛性). 如下定义的 $V(m;k;\varepsilon)$ ($m, k \geqslant 0$ 为整数, 而 $\varepsilon > 0$) 构成了 $(\mathscr{S})$ 中原点 0 的一个基本邻域系:

$$V(m;k;\varepsilon) := \left\{\varphi \in (\mathscr{S}) \ : \ |(1+r^2)^k D^p \varphi(x)| \leqslant \varepsilon, \ |p| \leqslant m\right\}. \tag{7.3.2}$$

但易知, 当 m 和 N 充分大而 η 足够小时, 由在 $\mathbb{R}^n$ 上成立的单个不等式

$$\left|\frac{\partial^{mn}\varphi}{\partial x_1^m \partial x_2^m \cdots \partial x_n^m}\right| \leqslant \frac{\eta}{(1+x_1^2)^N(1+x_2^2)^N \cdots (1+x_n^2)^N} \text{ 或 } \leqslant \frac{\eta}{(1+r^2)^N} \tag{7.3.3}$$

就可导出定义基本邻域系所要求的不等式 [参见 (7.3.2)].

事实上, 对任意的函数 $\psi \in (\mathscr{S})$, 由函数的导数的上界估计可给出函数本身的一个上界估计, 而这是由于 ψ 可以写成:

$$\begin{cases} \psi(x_1, x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial t_1}(t_1, x_1, \ldots, x_n)\, dt_1\,, & \text{若 } x_1 \leqslant 0\,, \\ \psi(x_1, x_1, \ldots, x_n) = -\displaystyle\int_{x_1}^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial t_1}(t_1, x_1, \ldots, x_n)\, dt_1\,, & \text{若 } x_1 \geqslant 0\,. \end{cases} \tag{7.3.4}$$

称 $B \subset (\mathscr{S})$ 为有界集, 如果对任意的多项式 $P(x)$ 和多项式求导算子 Q, 由所有 $P(Q * \varphi)$ [或 $Q * (P\varphi)$] ($\varphi \in B$) 构成的集合为 $\mathbb{R}^n$ 上连续函数的有界集; 而反之亦然.

空间 $(\mathscr{S})$ 为局部凸, 完备且具有可数邻域基. 在第 3 章第 2 节中针对空间 $(\mathscr{D})$ 证明的所有定理对空间 $(\mathscr{S})$ 亦成立; 特别地, 空间 $(\mathscr{S})$ 为 Montel 空间, 在该空间中有界集与相对紧集相等. 事实上, 若 B 为 $(\mathscr{S})$ 中有界集, 则对任意多项式 $P(x)$ 和多项式求导算子 Q, 所有 $P(Q * \varphi)$ ($\varphi \in B$) 可被同一个在无穷远处趋于 0 的函数界住, 于是为证明在 $\mathbb{R}^n$ 上的一致收敛性, 只需证明在任意紧集上有一致收敛性; 随后, 如同在证明第 3 章定理 7 时那样, 应用 Ascoli 定理.

我们不加证明地承认下述性质:

为使 $(\mathscr{S})$ 中集合 B 有界, 当且仅当存在一个在 $|x| \to +\infty$ 时比 $\frac{1}{|x|}$ 的任意幂都要递降得更快的非负连续函数 $k(x)$ 以及一列常数 $k_p \geqslant 0$ 使得对任意 $\varphi \in B$,

$$|D^p \varphi(x)| \leqslant k_p k(x)\,. \tag{7.3.5}$$

几何解释 给出空间 $(\mathscr{S})$ 的另外一个解释会让人感兴趣. 考虑 n 维球面 $\mathbb{S}^n$ 以及它作为 $n+1$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的球面所具有的微分结构. 可知我们可将 $\mathbb{S}^n$ 表示成添加了一个无穷远点 ω 的 $\mathbb{R}^n$, 在有限点处的微分结构就是 $\mathbb{R}^n$ 的微分结构, 在点 ω 的邻域内的微分结构则是由 $\mathbb{R}^n$ 中原点邻域通过以原点为中心的反演而得到. 由于 $\mathbb{S}^n$ 为紧集, 则 $(\mathscr{D})_{\mathbb{S}^n}$ 就是 $\mathbb{S}^n$ 上所有无穷可微函数的空间, 它具有可数邻域基 (第 1 章第 5 节第 3° 段).

由于 $\mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{S}^n$ 的开子集, 则 $\mathbb{S}^n$ 上任意函数 $\bar{\varphi}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的限制是一个函数 φ.

定理 2. *空间 $\mathbb{R}^n$ 上的拓扑空间 $(\mathscr{S})$ 借 φ 与 $\bar{\varphi}$ 之间的对应同构于空间 $(\mathscr{D})_{\mathbb{S}^n}$ 的闭子向量空间 $(\dot{\mathscr{D}})_{\mathbb{S}^n}$, 后者由其本身及其各阶导数在点 ω 处为零的函数 $\bar{\varphi}$ 构成.*

当然, 在 $\mathbb{S}^n$ 上, 我们不能谈论一个函数在一点处的导数而不固定是关于哪一个局部坐标系; 但我们可以说一个函数的各阶导数在一点出为零, 因为该性质不依赖所选取的局部坐标系.

对于函数 $\varphi \in (\mathscr{S})$, 我们将它在 $\mathbb{S}^n$ 上的延拓 $\bar{\varphi}$ 定义为 $\bar{\varphi}(\omega) = 0$. 除了在点 ω 处可能会有例外, 该函数 $\bar{\varphi}$ 显然在 $\mathbb{S}^n$ 上无穷可导; 我们现在证明当 $x \to \omega$ 时, 它的各阶导数趋于 0. 以原点 0 为中心的反演将点 x 变成 x', 而函数 φ 变成 φ'; 我们有

$$x_i = \frac{x'_i}{r'^2}, \quad x'_i = \frac{x_i}{r^2}, \quad \varphi'(x') = \varphi(x) . \tag{7.3.6}$$

逐阶求导可得上界估计

$$|D^p_{x'}\varphi'(x')| \leqslant K_m \sup_{|q|\leqslant m} |D^q_x\varphi(x)|(1+r^2)^m , \quad \text{其中 } |p| \leqslant m . \tag{7.3.7}$$

但既然当 $|x| \to +\infty$ 时, 函数 φ 的各阶导数比 $\frac{1}{r}$ 的任意幂都要更快地趋于 0, 因此 $\varphi'(x')$ 的各阶导数在原点处趋于 0. 于是 $\bar{\varphi}'(x')$ 也为无穷可导且其各阶导数在原点处为零, 从而 $\bar{\varphi}$ 属于 $(\mathscr{D})_{\mathbb{S}^n}$ 且其各阶导数在点 ω 处为零; 故 $\bar{\varphi} \in (\dot{\mathscr{D}})_{\mathbb{S}^n}$.

反过来, 若 $\bar{\varphi}$ 属于 $(\dot{\mathscr{D}})_{\mathbb{S}^n}$, 则它在 $\mathbb{R}^n$ 上的限制 φ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的无穷可导函数. 由于 $\bar{\varphi}$ 的各阶导数在点 ω 处为零, 也就是说对任意的 p, 当 x' 趋于 0 时 $D^p\varphi'(x')$ 要比 r' 的任意幂都要更快地趋于 0. 在同一个上界估计式 (7.3.7) 中, 将 x 和 x', r 和 r', 以及 φ 和 φ' 互换, 由此可证, 当 $|x| \to +\infty$ 时 $D^p\varphi(x)$ 要比 $\frac{1}{r}$ 的任意幂都要更快地趋于 0, 因此 $\varphi \in (\mathscr{S})$.

最后, 空间 $(\mathscr{S})$ 与 $(\mathscr{D})_{\mathbb{S}^n}$ 之间的同构为拓扑同构. 由 (7.3.7) 可知 φ 在 $(\mathscr{S})$ 中的收敛性与 $\bar{\varphi}$ 在 $(\mathscr{D})_{\mathbb{S}^n}$ 中的收敛性等价.

该定理使得可由 $(\mathscr{D})_{\mathbb{S}^n}$ 的性质重新得到 $(\mathscr{S})$ 的所有性质. 球面 $\mathbb{S}^n$ 在这里不起任何特殊作用, 空间 $\mathbb{R}^n$ 的任何一个足够正则的"紧化"将会起到同样的作用. 一个重要的情形为实射影空间 $\mathbb{P}^n$, 它是 $\mathbb{R}^n$ 与"无穷远超平面" ω 的并.

若 $\varphi_j \in (\mathscr{D})$ 在拓扑空间 $(\mathscr{D})$ 中趋于 0, 则它们更在 $(\mathscr{S})$ 中趋于 0. 但反过来是错的; 空间 $(\mathscr{D})$ 的拓扑要比由 $(\mathscr{S})$ 所诱导的拓扑严格地细.

定理 3. 空间 $(\mathscr{D})$ 在空间 $(\mathscr{S})$ 中稠密.

为此, 考虑具有紧支集的函数列 α_j $(j \geqslant 1)$ 使得当 $j \to +\infty$ 时, 函数列 $\alpha_j - 1$ 及其各阶导数在在任意的紧集上一致趋于 0, 且这些函数本身及其各阶导数在 $\mathbb{R}^n$ 上一致有界. 于是, 对任意 $\varphi \in (\mathscr{S})$, 当 $j \to +\infty$ 时 $\alpha_j\varphi \in (\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{S})$ 的拓扑下趋于 φ. 这就是所要证明的.

该定理在球面 $\mathbb{S}^n$ 上显然也成立: 这等价于说, 由 $(\mathscr{D})_{\mathbb{S}^n}$ 中所有在点 ω 的邻域内为零的函数组成的子空间在 $(\dot{\mathscr{D}})_{\mathbb{S}^n}$ 内稠密.

§4. 缓增广义函数的空间 $(\mathscr{S}')$

空间 $(\mathscr{S})$ 的对偶 $(\mathscr{S}')$ 我们将 $(\mathscr{S})$ 的拓扑对偶记作 $(\mathscr{S}')$, 也即由对任意 $\varphi \in (\mathscr{S})$ 有定义的连续线性型 $T(\varphi)$ 所构成的空间: 若 φ_j 在 $(\mathscr{S})$ 中趋于 0 且 $T \in (\mathscr{S}')$, 则复数 $T(\varphi_j)$ 应趋于 0.

若 $T \in (\mathscr{S}')$, 则 $T(\varphi)$ 更加会对 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 有定义; 另外, 若 $\varphi_j \in (\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{D})$ 中趋于 0, 则它们在 $(\mathscr{S})$ 中也趋于 0; 因此 $T(\varphi_j)$ 应趋于 0. 这就证明了由 T 可定义一个属于 $(\mathscr{D}')$ 的寻常广义函数 T_1. 该广义函数 T_1 完全确定 T, 因为对任意 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 我们已知 $T(\varphi)$ 的值, 又 $(\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{S})$ 中稠密 (定理 3), 从而对任意 $\varphi \in (\mathscr{S})$, 我们也可知道 $T(\varphi)$ 的值. 故我们此时可将 T 和 T_1 完全等同, 进而可将 $(\mathscr{S}')$ 中任意元素看成是一个广义函数, 而将空间 $(\mathscr{S}')$ 看成是 $(\mathscr{D}')$ 的向量子空间.

任意的广义函数 $T \in (\mathscr{D}')$ 不一定属于 $(\mathscr{S}')$; 正如我们将在后面看到的, 比如说函数 e^x 不属于 $(\mathscr{S}')$. 当然 $(\mathscr{E}') \subset (\mathscr{S}')$.

空间 $(\mathscr{S}')$ 中的广义函数被称为缓增广义函数. 我们将在后面看到为什么会这样称呼这些广义函数 (定理 6 和定理 7).

定理 4. 为使广义函数 $T \in (\mathscr{D}')$ 属于 $(\mathscr{S}')$, 当且仅当它是 $(\mathscr{D})$ 上的线性型且关于 $(\mathscr{S})$ 在 $(\mathscr{D})$ 所诱导的拓扑连续.

条件显然是必要的. 它也是充分的, 这是因为 $T(\varphi)$ 为 $(\mathscr{S})$ 的子空间 $(\mathscr{D})$ 上的连续线性型, 因此可被唯一延拓成 $(\mathscr{S})$ 上的连续线性型.

我们在 $(\mathscr{S}')$ 上引入 $(\mathscr{S})$ 的对偶拓扑 (第 3 章第 3 节). 则 $(\mathscr{S}')$ 为完备, 局部凸, 但没有可数邻域基. 它具有在第 3 章第 3 节中针对 $(\mathscr{D}')$ 所证的所有性质 (但显然要排除收敛判别准则, 定理 16). 特别地, 空间 $(\mathscr{S}')$ 为 Montel 空间, 它的有界集为相对紧集; 空间 $(\mathscr{S})$ 与 $(\mathscr{S}')$ 为自反空间, 每个均为另外一个的对偶.

我们可以给予 $(\mathscr{S}')$ 另外一个解释.

空间 $(\mathscr{S}')$ 的几何解释 **定理 5.** 为使广义函数 $T \in (\mathscr{D}')$ 属于 $(\mathscr{S}')$, 当且仅当它是球面 $\mathbb{S}^n$ 上的某个广义函数 $\overline{T}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的限制, 其中 $\mathbb{R}^n$ 被视作球面 $\mathbb{S}^n$ 的开子集.

1° 条件充分. 若 $\overline{T}$ 为 $\mathbb{S}^n$ 上的广义函数, 则 $\overline{T}(\bar{\varphi})$ 为 $(\mathscr{D})_{\mathbb{S}^n}$ 的上连续线性型; 因此更是由其本身及其各阶导数在点 ω 处为零的函数所组成的子空间 $(\dot{\mathscr{D}})_{\mathbb{S}^n}$ 上的连续线性型; 由 $T(\varphi) = \overline{T}(\bar{\varphi})$ $[\varphi \in (\mathscr{D})_{\mathbb{R}^n}]$ 所定义的 $\overline{T}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的限制 T, 不仅在 $(\mathscr{D})$ 上, 而且在 $(\mathscr{S})$ 上也有定义且连续, 故 T 属于 $(\mathscr{S}')$.

2° 条件必要. 若广义函数 $T \in (\mathscr{S}')$, 则它为 $(\mathscr{S})$ 上的连续线性型, 因此也是子空间 $(\dot{\mathscr{D}})_{\mathbb{S}^n}$ 上的连续线性型. 故据 Hahn – Banach 定理, 它可被延拓成 $(\mathscr{D})_{\mathbb{S}^n}$ 上的连续线性型, 也即 $\mathbb{S}^n$ 上的一个广义函数 $\overline{T}$. 该广义函数 $\overline{T}$ 显然不唯一; 我们可以给之添加任何一个在 $(\dot{\mathscr{D}})_{\mathbb{S}^n}$ 上为零也即具有点态支集 ω 的广义函数. 另外, 定理 2 仅仅表明 $(\mathscr{S})$ 同构于 $(\mathscr{D})_{\mathbb{S}^n}$ 的闭子空间 $(\dot{\mathscr{D}})_{\mathbb{S}^n}$, 因此其对偶 $(\mathscr{S}')$ 同构于 $(\mathscr{D}')_{\mathbb{S}^n}$ 关于 $(\dot{\mathscr{D}})_{\mathbb{S}^n}$ 的正交子空间的商空间. 可知这里所涉及的都是拓扑空间之间的同构.

正如我们在第 171 页所作的评注, 球面 $\mathbb{S}^n$ 在这里不起任何特殊作用. 比如说, 我们可以将之换成射影空间 $\mathbb{P}^n$.

利用增长性对缓增广义函数的刻画 我们现在来研究 $(\mathscr{S}')$ 中广义函数的具体结构. 下述定理可推广到 $(\mathscr{S}')$ 中有界集或趋于 0 的序列 (或具有有界或可数基的滤子).

定理 6. 1° 广义函数 $T \in (\mathscr{D}')$ 为缓增广义函数当且仅当它是一个通常意义下的缓增连续函数的导数, 也就是说该连续函数为 $P(x) = (1+r^2)^{\frac{k}{2}}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 上某个有界连续函数的乘积:

$$T = D^p\left[P(x)f(x)\right] = D^p\left((1+r^2)^{\frac{k}{2}} f(x)\right). \tag{7.4.1}$$

2° 广义函数 T 属于 $(\mathscr{S}')$ 当且仅当它的所有正则化 $T * \alpha$ $[\alpha \in (\mathscr{D})]$ 均为缓增连续函数; 此时存在实数 k 使得 $(T*\alpha)/(1+r^2)^{\frac{k}{2}}$ 均为 $\mathbb{R}^n$ 上的有界连续函数.

3° 为使广义函数 T 属于 $(\mathscr{S}')$, 须存在实数 k 使得广义函数 $T/(1+r^2)^{\frac{k}{2}}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界 [也即属于 $(\mathscr{B}')$, 见第 6 章第 8 节], 而只须对任意 $\varphi \in (\mathscr{S})$, φT 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界.

4° 为使广义函数 T 属于 $(\mathscr{S}')$, 须存在实数 k 使得所有广义函数 $\tau_h T/(1+|h|^2)^{\frac{k}{2}}$ 构成 $(\mathscr{D}')$ 的一个有界集, 而只须对任意在 $|h| \to +\infty$ 时速降的数值连续函数 $c(h)$, 所有 $c(h)\tau_h T$ 构成 $(\mathscr{D}')$ 的一个有界集.

正是这个定理解释说明了缓增广义函数这个名称的合理性. 正如我们在第 2 节所说, 该定理尤其表明:

$a)$ 由于 e^x 的原函数均不为缓增函数 (单变量情形, $n=1$), 故 $e^x \notin (\mathscr{S}')$;

$b)$ 级数 $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!}$ (同一情形, $n=1$) 在 $(\mathscr{S}')$ 中不收敛, 这是因为即使是在任意多次积分后, 该级数的部分和序列仍然不会被一个多项式界住.

另外, 任意缓增广义函数在 $\mathbb{R}^n$ 上的阶有限. 提醒一下, 我们可将第 2° 条换成一个更为精细的定理 (参见第 6 章定理 22).

我们将按下列次序来证明该定理:

$a)$ 若 $T \in (\mathscr{S}')$, 则存在实数 k 使得 $T/(1+r^2)^{\frac{k}{2}}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上有界广义函数. 事实上, 当 φ 属于 $(\mathscr{S})$ 的原点 0 的某个邻域时 $T(\varphi)$ 保持有界; 故存在整数 m 以及实数 k 使得当 $(1+r^2)^{\frac{k}{2}}\varphi_j$ 在 $(\mathscr{D}_{L^1})$ 中趋于 0 时 $T(\varphi_j)$ 趋于 0 (第 6 章第 8 节). 但

$$T(\varphi) = \left[\frac{T}{(1+r^2)^{\frac{k}{2}}}\right] . (1+r^2)^{\frac{k}{2}}\varphi, \tag{7.4.2}$$

这就证明了 $T/(1+r^2)^{\frac{k}{2}}$ 为 $(\mathscr{D}_{L^1})$ 上的连续线性型, 因此属于 $(\mathscr{B}')$. 于是由 $\mathbb{R}^n$ 上有界广义函数的结构 (第 6 章定理 25, $p=+\infty$) 可知 T 为缓增连续函数的导数之和; 通过积分, 我们可将这个和式转换成单个求导 (但 k 的值会变得更大). 而逆命题是显然的, 这就证明了 1°.

评注. 如果不是一个而是有一列广义函数 T_j 在 $(\mathscr{S}')$ 中趋于 0, 这时我们仅能证明 $T_j/(1+r^2)^{\frac{k}{2}}$ 在 $(\mathscr{B}')$ 中弱收敛于 0 (参见第 146 页, 评注 2°); 但由此我们可以导出 $T_j/(1+r^2)^{\frac{k+1}{2}}$ 在 $(\mathscr{B}')$ 中强收敛于 0.

$b)$ 若对于任意 $\varphi \in (\mathscr{S})$, 均有 φT 属于 $(\mathscr{B}')$, 则我们也有

$$\varphi T = \left(\frac{1}{1+r^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left[\left((1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}\varphi\right)T\right] \in (\mathscr{D}'_{L^1}) \quad (\text{第 6 章定理 16.1°}). \tag{7.4.3}$$

我们因此可以对任意 $\varphi \in (\mathscr{S})$, 令

$$T.\varphi = \varphi T(1) = \iint\cdots\int \varphi T. \tag{7.4.4}$$

则 $T.\varphi$ 为 $(\mathscr{S})$ 上线性型. 由于它是连续线性型 $\alpha_\nu T.\varphi\ [\alpha_\nu \in (\mathscr{D})]$ 的极限, 因此它也连续 (Banach – Steinhaus 定理; 见第 6 章定理 20). 故 $T \in (\mathscr{S}')$. 由 $a)$ 和 $b)$ 可得 3°.

$c)$ 若 $T \in (\mathscr{S}')$, 由 (7.4.1) 给出的 T 的表达式表明所有广义函数 $\tau_h T/(1+|h|^2)^{\frac{k}{2}}$ 构成 $(\mathscr{D}')$ 中的一个有界集. 反过来, 若后者成立, 则 (由第 6 章定理 22 可知) 存在整数 $m \geqslant 0$ 使得对任意 $\alpha \in (\mathscr{D}_K^m)$, 所有 $\tau_h(T*\alpha)/(1+|h|^2)^{\frac{k}{2}}$ 在某个相对紧开集 Ω 上构成一个连续函数的有界集; 这等价于说 $(T*\alpha)/(1+|h|^2)^{\frac{k}{2}}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上有界连续函数, 也就是说 $T*\alpha$ 缓增; 于是由公式 (6.6.22) 可知表明我们有 (7.4.1), 故 $T \in (\mathscr{S}')$.

$d)$ 若对任意在 $|h| \to +\infty$ 时速降的数值连续函数 $c(h)$, 所有 $c(h)\tau_h T$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中构成一个有界集, 则对任意固定 $\varphi \in (\mathscr{D}_K)$, 数 $c(h)\tau_h T.\varphi$ 关于 $h \in \mathbb{R}^n$ 有界; 也即, 对于任意固定 $\varphi \in (\mathscr{D}_K)$, 量 $\tau_h T.\varphi$ 为 h 的缓增函数. 现证明该缓增性关于 $\varphi \in (\mathscr{D}_K)$ 一致成立. 对于固定 h, 量

$$\frac{\log^+ |\tau_h T.\varphi|}{\log\sqrt{1+|h|^2}} \tag{7.4.5}$$

为 $\varphi \in (\mathscr{D}_K)$ 的连续函数. 根据假设, 对任意固定 φ, 这些 φ 的连续函数关于 $h \in \mathbb{R}^n$ 一致有界. 于是由一个经典的 Baire 定理①可知, 这些 φ 的函数在 $(\mathscr{D}_K)$ 的某个适当开子集上一致有界. 设 k 为其上确界. 则 $\tau_h T/(1+|h|^2)^{\frac{k}{2}}$ 在任意 $\varphi \in (\mathscr{D}_K)$ 处有界, 故在任意 $\varphi \in (\mathscr{D})$ 处也有界, 从而构成 $(\mathscr{D}')$ 的一个有界集, 由 $c)$ 可得 $T \in (\mathscr{S}')$.

于是由 $c)$ 和 $d)$ 可证明 4°.

$e)$ 假设对任意 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 每个 $T * \alpha$ 均为缓增函数 (其增长性理论上会依赖 α). 则对任意速降函数 $c(h)$ 以及任意固定 α, 所有函数 $c(h)\tau_h(T*\alpha)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的任意紧集上一致有界. 这就证明了 (第 6 章定理 22) 所有广义函数 $c(h)\tau_h T$ 构成 $(\mathscr{D}')$ 的一个有界集; 从而由 $d)$ 可证明 $T \in (\mathscr{S}')$. 进而由 1° 和 $e)$ 可证明 2°.

评注. 使得该定理成立的所有可能的 k 的下确界称为 T 在无穷远处的增长阶. 若将第 1° 条改成导数的有限和, 则由上述定理的四部分分别定义的增长阶均相等.

缓增非负测度 称 $\mathbb{R}^n$ 上测度 μ 在测度空间 $(\mathcal{C}')$ 中缓增, 若存在整数 l 使得积分

$$\iint \cdots \int \frac{|d\mu|}{(1+r^2)^l} \tag{7.4.6}$$

收敛. 这等价于说存在整数 l' 使得积分

$$\iint \cdots \int_{r \leqslant A} |d\mu| \tag{7.4.7}$$

在 $A \to +\infty$ 时为 $O(A^{l'})$; 或者说 μ 为一个多项式与 $\mathbb{R}^n$ 上的一个可积测度之积.

定理 7. 若 μ 为 $\mathbb{R}^n$ 上测度, 则当它在 $(\mathcal{C}')$ 中缓增时, 它属于 $(\mathscr{S}')$. 当 μ 非负时, 上述条件亦必要.

条件显然充分. 现证明其必要性. 利用与证明前面定理一样的方法, 首先可知, 在 $(\mathscr{S})$ 中存在由下述不等式定义的原点 0 的邻域:

$$|D^p\varphi(x)|(1+r^2)^l \leqslant \eta, \quad \text{其中 } |p| \leqslant m, \tag{7.4.8}$$

使得 μ 在该邻域上可被 1 界住. 然而若我们考虑在定理 3 中所使用的函数 $\alpha_j \geqslant 0$, 则对于充分小的 $\varepsilon > 0$, 函数 $\varepsilon\alpha_j/(1+r^2)^l \in (\mathscr{D})$ 满足 (7.4.8). 因此对任意 j, 我们有

$$\mu.\left[\frac{\varepsilon\alpha_j}{(1+r^2)^l}\right] = \varepsilon \iint \cdots \int \frac{\alpha_j\, d\mu}{(1+r^2)^l} \leqslant 1 . \tag{7.4.9}$$

对 $j \to +\infty$ 取极限, 由于 $\mu \geqslant 0$, 则由上述不等式可导出

$$\iint \cdots \int \frac{d\mu}{(1+r^2)^l} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} . \tag{7.4.10}$$

① 参见 Bourbaki [2], 第 5 节第 4° 段定理 2, p. 111.

对于 $(\mathscr{S}')$ 中非负测度的有界集，我们可以选取固定的 l 和 ε 使得上述不等式对该有界集中的所有非负测度 μ 成立. 对于收敛序列没有任何类似结论. 另外, 关于不是非负的测度, 不存在任何上述类型的必要条件. 例如, 当级数 $\sum_l |a_l|\varepsilon_l$ 收敛时, 直线 $(n=1)$ 上如下定义的测度

$$\mu = \sum_l a_l\big(\delta_{(l+\varepsilon_l)} - \delta_{(l)}\big) \tag{7.4.11}$$

在 $(\mathscr{D}')$ 中缓增, 也就是说属于 $(\mathscr{S}')$. 这是因为对任意 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 当其导数在 $\mathbb{R}^n$ 上有界时, 我们可用 $\sum_l |a_l|\varepsilon_l \max|\varphi'|$ 来界住 $|\mu(\varphi)|$; 只要序列 ε_l 趋于 0 足够快, 我们就可以让序列 a_l 递增地尽可能得快. 另外, 如果级数 $\sum_l |b_l|$ 收敛, 则诸如 $\sum_l b_l\delta'_{(l)}$ 这样的偶极子之和为上述情形的极端情形.

延拓定理　定理 7 是另外一个更为一般的广义函数延拓定理的特殊情形. 我们这里只满足于叙述该定理而不证明之:

定理 8. *设 V^n 为赋予了 Riemann 度量的无穷可微流形, Ω 为 V^n 的开子集, 而 μ 为定义在 Ω 上的测度. 若对于 V^n 的任意紧子集 K, 积分*

$$\iint\cdots\int_{K\cap\Omega} [d(x)]^l\,|d\mu| \tag{7.4.12}$$

在 l 充分大时收敛 [这里 $d(x)$ 为 x 到 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的距离], 则 μ 可被延拓成 V^n 上的广义函数 T. 当 $\mu \geqslant 0$ 时, 上述条件亦必要.

显然仅当 $l=0$ 时 μ 可被延拓成 V^n 上的测度.

在球面 $\mathbb{S}^n$ 的情形, 可选取 Riemann 度量使得点 $x \in \mathbb{R}^n$ 到 ω 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$; 当 $V^n = \mathbb{S}^n$ 而 $\Omega = \mathbb{R}^n$ 时, 我们可由此重新得到定理 7.

§5. 缓增广义函数空间 $(\mathscr{S}')$ 中的代数运算

我们可以毫无困难地定义两个缓增广义函数的张量积; 所得到的是一个新的缓增广义函数, 而在第 4 章中所证明的那些定理依然成立. 为了能在 $(\mathscr{S}')$ 中定义乘积和卷积, 我们需引入新的向量空间 $(\mathscr{O}_M)$ 和 $(\mathscr{O}'_C)$.

缓增无穷可导函数空间 $(\mathscr{O}_M)$　记 $(\mathscr{O}_M)$ 为“无穷可导缓增”函数空间. 则 $\alpha \in (\mathscr{O}_M)$ 当且仅当 $\alpha \in (\mathscr{E})$ 且任意导数 $D^p\alpha$ 可被某个多项式 (其次数可能会依赖 p) 界住; 这等价于说任意导数 $D^p\alpha$ 与任意函数 $f \in (\mathscr{S})$ 之积 $fD^p\alpha$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界. 我们在 $(\mathscr{O}_M)$ 上定义如下拓扑: 称 $\alpha_j \in (\mathscr{O}_M)$ 趋于 0, 若对任意 p 以及任意函数 $f \in (\mathscr{S})$, 乘积 $f(x)D^p\alpha_j(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致趋于 0 [若 f 属于 $(\mathscr{S})$ 中某个有界集, 该收敛自然关于 f 一致]. 向量空间 $(\mathscr{O}_M)$ 为局部凸且完备, 但没有可数邻域基. 集合 $B \subset (\mathscr{O}_M)$

有界当且仅当对任意 p, 所有 $D^p\alpha$ $(\alpha \in B)$ 可被同一个可能依赖 p 的多项式界住. 序列 (或具有界或可数基的滤子) α_j 在 $(\mathscr{O}_M)$ 中趋于 0 当且仅当对任意 p, 所有 $D^p\alpha_j$ 均是某个多项式 P_p (依赖 p 但不依赖 j) 与在 $\mathbb{R}^n$ 上一致趋于 0 的函数之积.

速降广义函数空间 $(\mathscr{O}'_C)$　称 $(\mathscr{O}'_C)$ 为"速降广义函数"空间. 广义函数 T 属于 $(\mathscr{O}'_C)$ 当且仅当对任意的 k, 所有 $(1+r^2)^{\frac{k}{2}}T$ 均在 $\mathbb{R}^n$ 有界 [也即属于 $(\mathscr{B}')$; 见第 6 章第 8 节]. 我们将在 $(\mathscr{O}'_C)$ 上赋予如下拓扑: 称 $T_j \in (\mathscr{O}'_C)$ 在 $(\mathscr{O}'_C)$ 中趋于 0, 若对任意的 k, 所有 $(1+r^2)^{\frac{k}{2}}T_j$ 均在 $(\mathscr{B}')$ 趋于 0.

定理 9. *为使广义函数 T 属于 $(\mathscr{O}'_C)$:*

1° 当且仅当对任意 $k \geqslant 0$, 广义函数 T 为连续函数的导数的有限和, 其中涉及的连续函数与 $(1+r^2)^{\frac{k}{2}}$ 的乘积在通常的意义下在 $\mathbb{R}^n$ 上有界;

2° 当且仅当对任意 $k \geqslant 0$, 所有 $(1+|h|^2)^{\frac{k}{2}}\tau_h T$ 组成的集合在 $(\mathscr{D}')$ 中有界;

3° 当且仅当对任意 $\alpha \in (\mathscr{D})$, 卷积 $T * \alpha$ 是一个在无穷远处速降的函数.

利用第 6 章第 7 节和第 8 节中的方法或证明第 7 章定理 6 的方法, 可立刻得到上述定理的证明. 我们也能以惯用方式将之推广到 $(\mathscr{O}'_C)$ 中的有界集以及在 $(\mathscr{O}'_C)$ 中趋于 0 的序列 (或具有有界或可数基的滤子).

重要的评注　设 $T \in (\mathscr{O}'_C)$. 对任意的 k, 均存在整数 m 使得对任意的 $\alpha \in (\mathscr{D}^m)$, 卷积 $T * \alpha$ 为连续函数且它与 $(1+r^2)^{\frac{k}{2}}$ 的乘积在 $\mathbb{R}^n$ 上有界; 但 m 随着 k 而增大, 且当 m 为有限时, 卷积 $T * \alpha$ 可能不是一个速降函数, 而当 $m = +\infty$ 且 $\alpha \in (\mathscr{D})$ 时, 该卷积则总是一个速降函数.

最后还要补充空间 $(\mathscr{S})$, $(\mathscr{S}')$, $(\mathscr{O}_M)$ 以及 $(\mathscr{O}'_C)$ 之间的如下关系:

广义函数 T 属于 $(\mathscr{S}')$ 当且仅当它的所有正则化 $T * \alpha$ $[\alpha \in (\mathscr{D})]$ 属于 $(\mathscr{O}_M)$; 一个广义函数属于 $(\mathscr{O}'_C)$ 当且仅当它的所有正则化属于 $(\mathscr{S})$.

我们将考虑 $(\mathscr{O}_M)$ 的对偶 $(\mathscr{O}'_M)$ 以及以 $(\mathscr{O}'_C)$ 为其对偶的一个无穷可导函数的空间 $(\mathscr{O}_C)$. 这些空间似乎起不了重要作用. 另外, 还不能肯定 $(\mathscr{O}_M)$ 和 $(\mathscr{O}'_C)$ 是否拥有我们曾在第 3 章见到过的、由 $(\mathscr{D})$ 和 $(\mathscr{D}')$ 所具备的向量空间的一般性质.

例. 考虑 $(n=1)$ 函数

$$f(x) = \exp(i\pi x^2)\,. \tag{7.5.1}$$

则 $f \in (\mathscr{E})$; 该函数在 $\mathbb{R}^n$ 上有界, 但其各阶导数却并非如此, 因而有 $f \notin (\mathscr{B})$. 立刻可知 $f \in (\mathscr{O}_M)$, 而它的 m 阶导数则为 $\exp(i\pi x^2)$ 与某一个次数为 m 的多项式 $H_m(x)$ 之积.

另外 $f \in (\mathscr{O}'_C)$, 这是因为对任意的 $m \geqslant 0$, 它与 $(1+x^2)^m$ 的乘积是一个有界广义函数. 为此, 设 $(1+x^2)^m$ 依多项式 $H_\nu(x)$ 展开的的展式为:

$$\sum_{\nu \leqslant 2m} \lambda_\nu H_\nu(x)\,.$$

则我们将有:

$$(1+x^2)^m \exp(i\pi x^2) = \sum_{\nu \leqslant 2m} \lambda_\nu \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left[\exp(i\pi x^2)\right] \in (\mathscr{B}')\,. \tag{7.5.2}$$

将之除以 $(1+x^2)^m$, 则利用分部积分, 我们可由此导出 $\exp(i\pi x^2)$ 为某些连续函数的阶不大于 $2m$ 的导数的有限和, 并且这些连续函数可被 $C/(1+x^2)^m$ 界住; 但它不是速降连续函数的导数的有限和. 其正则化 $T * \alpha$ $[\alpha \in (\mathscr{D})]$ 为速降函数, 但当 $\alpha \in (\mathscr{D}^m)$ 时, 正则化 $T * \alpha$ 不为速降函数, 后者在 $|x| \to +\infty$ 时仅如 $1/|x|$ 的幂那样递降且 m 越大其幂次越高 (至少像 $1/|x|^m$ 那样).

该例子清楚说明了为何 $(\mathscr{O}_M)$ 与 $(\mathscr{O}'_C)$ 不为对偶. 因为 f 与 $\bar{f}(x) = \exp(-i\pi x^2)$ 均属于这两个空间 $(\mathscr{O}_M)$ 与 $(\mathscr{O}'_C)$, 但

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{f}(x)\,dx = +\infty\,.$$

空间 $(\mathscr{S}')$ 中的乘法 空间 $(\mathscr{O}_M)$ 与 $(\mathscr{O}'_C)$ 均为 $(\mathscr{S}')$ 上的算子空间; 空间 $(\mathscr{O}_M)$ 为乘积算子空间, 而 $(\mathscr{O}'_C)$ 为卷积算子空间.

可如同在第 5 章中那样定义乘积 αT. 但我们不能再取任意的 $\alpha \in (\mathscr{E})$, 否则 αT 不再属于 $(\mathscr{E}')$. 立刻可知, 若 $T \in (\mathscr{S}')$ 且 $\alpha \in (\mathscr{O}_M)$, 则 αT 属于 $(\mathscr{S}')$, 这是因为对任意的 $\varphi \in (\mathscr{S})$, 也有 $\alpha\varphi \in (\mathscr{S})$, 故下述公式总有意义:

$$\alpha T.\varphi = T.(\alpha\varphi)\,, \quad \varphi \in (\mathscr{S})\,. \tag{7.5.3}$$

上述乘积具有在第 5 章中所叙述的那些性质; 特别地, 我们显然有:

定理 10. 从 $(\mathscr{O}_M) \times (\mathscr{S}')$ 到 $(\mathscr{S}')$ 的双线性映射 $(\alpha, T) \to \alpha T$ 为亚连续. 对于 $(\mathscr{S}')$ 中任意有限多个广义函数, 当至多除了一个以外其余均属于 $(\mathscr{O}_M)$ 时, 它们的乘积满足结合律和交换律.

设 $\alpha \in (\mathscr{E})$. 可以证明, 若对任意的 $T \in (\mathscr{S}')$, 均有 $\alpha T \in (\mathscr{S}')$, 则 $\alpha \in (\mathscr{O}_M)$. 也即空间 $(\mathscr{O}_M)$ 为 $(\mathscr{S}')$ 上所有乘子的空间. 另外, 若 $\alpha_j \in (\mathscr{O}_M)$ 使得 $\alpha_j T$ 在 $(\mathscr{S}')$ 中收敛于 0, 且当 T 在 $(\mathscr{S}')$ 中保持有界时为一致收敛, 则 α_j 在 $(\mathscr{O}_M)$ 中趋于 0.

因此 $(\mathscr{O}_M)$ 上的拓扑就是由空间 $\mathscr{L}(\mathscr{S}', \mathscr{S}')$ 所诱导的拓扑, 后者由所有从 $(\mathscr{S}')$ 到 $(\mathscr{S}')$ 的连续算子组成的空间, 且被赋予了在有界集上一致收敛的自然拓扑.

空间 $(\mathscr{S}')$ 中的卷积 卷积的定义有些棘手. 我们总可以考虑 $S*T$, 其中 $S\in(\mathscr{E}')$ 而 $T\in(\mathscr{S}')$, 此时可以毫无困难地看到 $S*T\in(\mathscr{S}')$. 但基于 T 在无穷远处增长性方面的限制, 因此不再需要 S 具有紧支集; 我们将会看到可以取 $S\in(\mathscr{O}'_C)$. 为此, 考虑肯定对 $S\in(\mathscr{E}')$, $T\in(\mathscr{S}')$ 和 $\varphi\in(\mathscr{D})$ 有定义的点积

$$(S_\xi\otimes T_\eta).\,\varphi(\xi+\eta)\,. \tag{7.5.4}$$

我们将证明, 若在 $(\mathscr{E}')$ 赋予由 $(\mathscr{O}'_C)$ 诱导的拓扑, 在 $(\mathscr{S}')$ 赋予它本来的拓扑, 而在 $(\mathscr{D})$ 上赋予由 $(\mathscr{S})$ 诱导的拓扑, 则上述点积为亚连续: 也即, 若让 S,T,φ 当中两个保持有界而让第三个趋于 0, 则这个三变量线性积趋于 0.

现证明, 比如说当 φ 在 $(\mathscr{S})$ 中保持有界, T 在 $(\mathscr{S}')$ 中保持有界, 而 S 在 $(\mathscr{O}'_C)$ 中趋于 0 时, 该积趋于 0. 由于 T 在 $(\mathscr{S}')$ 中保持有界, 则它可以写成

$$T_\eta=D^p\Big[(1+|\eta|^2)^{\frac{k}{2}}f(\eta)\Big]\,, \tag{7.5.5}$$

其中 p,k 固定, 而 $f(\eta)$ 为连续函数且在 $\mathbb{R}^n$ 被某个固定常数界住. 于是

$$D^q_\xi[T_\eta.\,\varphi(\xi+\eta)]=(-1)^{|p|}\iint\cdots\int(1+|\eta|^2)^{\frac{k}{2}}f(\eta)D^{p+q}\varphi(\xi+\eta)\,d\eta\,. \tag{7.5.6}$$

但对任意的 ξ 和 η, 我们有上界估计

$$1+|\eta|^2\leqslant C(1+|\xi|^2)(1+|\xi+\eta|^2)\,, \tag{7.5.7}$$

由此可得

$$|D^q_\xi[T_\eta.\,\varphi(\xi+\eta)]|\leqslant C_1(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}\iint\cdots\int|D^{p+q}\varphi(\xi+\eta)|(1+|\xi+\eta|^2)^{\frac{k}{2}}\,d\eta\,. \tag{7.5.8}$$

右式中的那个积分不依赖 ξ 且等于

$$\iint\cdots\int|D^{p+q}\varphi(t)|(1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\,dt\,.$$

对于给定的 p,q,k, 当 φ 在 $(\mathscr{S})$ 中保持有界时, 上述积分有界 (参见第 3 节).

于是无穷可导函数 $I(\xi)=T_\eta.\,\varphi(\xi+\eta)$ 满足一列不等式

$$|D^qI(\xi)|\leqslant A_q(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}\,. \tag{7.5.9}$$

对任意的 l, 我们有

$$S_\xi\,.I(\xi)=\Big[(1+|\xi|^2)^{\frac{l}{2}}S_\xi\Big]\cdot\frac{I(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{l}{2}}}\,. \tag{7.5.10}$$

当 $l > k+n$ 时, 由 (7.5.7) 知函数 $I(\xi)/(1+|\xi|^2)^{\frac{l}{2}}$ 本身及其各阶导数在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中有界; 故该函数在 $(\mathscr{D}_{L^1})$ 中有界. 另外, 由于 S 在 $(\mathscr{O}'_C)$ 中趋于 0, 因此对任意的 l, 均有 $(1+|\xi|^2)^{\frac{l}{2}} S_\xi$ 在 $(\mathscr{B}')$ 中趋于 0; 又根据 $(\mathscr{D}_{L^1})$ 与 $(\mathscr{B}')$ 之间的对偶性可知, 上述右式中的点积一致趋于 0. 这就是所要证明的.

对另外两种情形可以类似地证明.

由此可见, 我们可通过延拓对任意 $S \in (\mathscr{O}'_C)$, $T \in (\mathscr{S}')$ 和 $\varphi \in (\mathscr{S})$ 唯一地定义

$$(S_\xi \otimes T_\eta).\varphi(\xi+\eta) = (S*T).\varphi,$$

由于 $S*T$ 为 $(\mathscr{S})$ 上的连续线性型, 因此属于 $(\mathscr{S}')$. 最终我们可以断言:

定理 11. *对于 $S \in (\mathscr{O}'_C)$ 和 $T \in (\mathscr{S}')$, 我们可以唯一地定义卷积 $S*T$, 它为 $(\mathscr{S}')$ 中的广义函数. 从 $(\mathscr{O}'_C) \times (\mathscr{S}')$ 到 $(\mathscr{S}')$ 的双线性映射 $(S,T) \to S*T$ 为亚连续. 对于 $(\mathscr{S}')$ 中任意有限多个广义函数, 若至多除了一个以外其余均属于 $(\mathscr{O}'_C)$, 则它们的卷积满足结合律和交换律.*

正如大家可以很容易地看到, 在上述定理的叙述中, 我们可以将 $(\mathscr{S}')$ 换成空间 $(\mathscr{S})$, $(\mathscr{D}_{L^p})$, $(\mathscr{D}'_{L^p})$, 尤其 $(\mathscr{B}')$ 当中的任意一个. 同样可知, 正则化 $(T,\alpha) \to T*\alpha$ 为从 $(\mathscr{S}') \times (\mathscr{S})$ 到 $(\mathscr{O}_M)$ 以及从 $(\mathscr{O}'_C) \times (\mathscr{S})$ 到 $(\mathscr{S})$ 的亚连续双线性映射.

最后可注意到, 被看成是从 $(\mathscr{O}_M) \times (\mathscr{O}_M)$ 到 $(\mathscr{O}_M)$ 的双线性映射的乘积, 以及被看成是从 $(\mathscr{O}'_C) \times (\mathscr{O}'_C)$ 到 $(\mathscr{O}'_C)$ 的双线性映射的卷积, 不仅仅为亚连续, 而且还为连续 (对于乘积, 这是显然的; 对于卷积, 这不太容易, 但利用定理 15 可将这些性质当中的一个过渡到另外一个).

例. 公式 (2.3.20) 当中的广义函数 L_l 属于 $(\mathscr{O}'_C)$, 因为它在无穷远处指数递降. 它因此可与 $(\mathscr{S}')$ 中任意广义函数作卷积. 取 $l = 2k$, 由此可导出, 对任意 $T \in (\mathscr{S}')$, 存在唯一一个广义函数 $S \in (\mathscr{S}')$ 使得

$$\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k S = T.$$

当 k 充分大时 L_{2k} 为 m 阶可微且其阶不大于 m 的导数在无穷远处指数递降, 从而 S 为缓增连续函数, 这就由定理 6.1° 以特别简单的方式给出了 T 的分解:

$$\begin{cases} L_{2k} * T = S, \\ T = \left(1 - \dfrac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k S. \end{cases} \tag{7.5.11}$$

若现在 $T \in (\mathscr{O}'_C)$, 则当 k 充分大时 S 是一个函数且当 k 越大时它在无穷远处递降地越快 (但对任意的 k, 它一般不是一个速降函数).

§6. 缓增广义函数的 Fourier 变换

我们将借助在一些初等情形下已知的 Fourier 变换的结论 (第 2 节).

缓增广义函数空间 $(\mathscr{S}')$ 尤其是调和分析的领域. 我们将会明确地区分两个变量 x 和 y 的作用, 但尽管如此, 在有需要的时候还是可以将它们视为相同: 我们将用 $(\mathscr{S})_x, (\mathscr{S})_y, (\mathscr{S}')_x, (\mathscr{S}')_y$ 分别表示在 n 维空间 X^n, Y^n 上构造的 $(\mathscr{S}), (\mathscr{S}')$.

设 $u(x) \in (\mathscr{S})_x$: 该函数可积, 因此具有如下定义的通常的 Fourier 变换:

$$v(y) = \iint \cdots \int u(x) \exp(-2i\pi x.\, y)\, dx\,. \tag{7.6.1}$$

易见 $v(y) \in (\mathscr{S})_y$. 事实上:

a) 公式 (7.6.1) 当中的函数可被无穷求导. 例如

$$\frac{\partial v(y)}{\partial y_1} = \iint \cdots \int u(x)(-2i\pi x_1) \exp(-2i\pi x.\, y)\, dx\,. \tag{7.6.2}$$

由于 $x_1 u(x)$ 可积, 故上述右式中的积分有意义. 正是 u 在无穷远处"速降"这个事实导致 v 为无穷可导.

b) 反过来, 由分部积分可得

$$2i\pi y_1 v(y) = \iint \cdots \int \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \exp(-2i\pi x.\, y)\, dx\,, \tag{7.6.3}$$

右式中的被积函数可积, 故 $y_1 v(y)$ 有界; 如此继续下去可知由 u 的各阶导数可积这个事实可导出 v"在无穷远处速降". 因此上述这两个性质可互换. 若 $u \in (\mathscr{S})_x$, 则其本身及其各阶导数速降, 从而 v 本身及其各阶导数速降: $v \in (\mathscr{S})_y$.

当然, 这里的逆变公式为

$$u(x) = \iint \cdots \int v(y) \exp(+2i\pi x.\, y)\, dy\,, \tag{7.6.4}$$

并且 Parseval 公式对 $(\mathscr{S})_x$ 和 $(\mathscr{S})_y$ 中的函数成立. 补充一点, 利用刚才使我们得以证明由 $u \in (\mathscr{S})_x$ 可导出 $v \in (\mathscr{S})_y$ 的同样推理也可证明, 若 u_j 在 $(\mathscr{S})_x$ 中趋于 0, 则其 Fourier 变换 v_j 在 $(\mathscr{S})_y$ 中趋于 0:

定理 12. *通常的 Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 与其共轭 $\overline{\mathscr{F}}$ 在拓扑向量空间 $(\mathscr{S})_x$ 和 $(\mathscr{S})_y$ 之间建立了两个互为逆映射的同构 [并且若将变量 x 和 y 视为相同, 则它们在 $(\mathscr{S})$ 上建立了两个互为逆映射的自同构].*

现在很容易定义任意一个缓增广义函数 U 的 Fourier 变换. 若 U 是一个函数且有通常的 Fourier 变换 V (比如说 U 为平方可积), 则对任意 $v \in (\mathscr{S})_y$, 设其 Fourier 变换为 $u \in (\mathscr{S})_x$, 即 $u = \mathscr{F}v$, 也即

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} v(y) \exp(-2i\pi x. y)\, dy\,,$$

那么我们有公式

$$\begin{aligned} V_y. v(y) &= \int v(y)\, dy \int U(x) \exp(-2i\pi x. y)\, dx \\ &= \int U(x)\, dx \int v(y) \exp(-2i\pi x. y)\, dy = U_x. u(x)\,. \end{aligned} \tag{7.6.5}$$

也就是说

$$\mathscr{F}U. v = U. \mathscr{F}v\,. \tag{7.6.6}$$

但若 U 为 $(\mathscr{S}')_x$ 中任意一个缓增广义函数, 则上述公式在 $(\mathscr{S})_y$ 上唯一确定一个线性型 $V = \mathscr{F}U$.

上述线性型的确定义了 $(\mathscr{S}')_x$ 中的一个缓增广义函数; 这是因为若 v 在 $(\mathscr{S})_y$ 中趋于 0, 则 u 在 $(\mathscr{S})_x$ 中趋于 0, 故 (7.6.6) 的右边趋于 0, 而 U 为缓增广义函数, 因此左边也趋于 0: V 为 $(\mathscr{S})_y$ 上的连续线性型. 这就是所要证明的.

上述这个 Fourier 变换绝对一般的定义在经典的情形, 重新给出了经典的 Fourier 变换, 这是因为它满足 (7.6.6), 而后者唯一确定 V. 当然仅当 U 为零时 V 才为零; 因为若 $V = 0$, 则对任意 $v \in (\mathscr{S})_y$, 公式 (7.6.6) 的左边为零, 从而对任意 $u \in (\mathscr{S})_x$, 公式 (7.6.6) 的右边也为零, 故 U 为零. 另外, 若将 $\mathscr{F}$ 换成它的共轭 $\overline{\mathscr{F}}$, 公式 (7.6.6) 也成立; 在这两种情形, 我们分别有

$$\begin{cases} \mathscr{F}U. v = U. \mathscr{F}v = U_x \otimes v_y. \exp(-2i\pi x. y)\,, \\ \overline{\mathscr{F}}U. v = U. \overline{\mathscr{F}}v = U_x \otimes v_y. \exp(+2i\pi x. y)^{①}\,, \end{cases} \tag{7.6.7}$$

这表明从 $(\mathscr{S}')_x$ 到 $(\mathscr{S}')_y$ 的变换 $\mathscr{F}$ 为从 $(\mathscr{S})_y$ 到 $(\mathscr{S})_x$ 的变换 $\mathscr{F}$ 的转置. 于是

$$\begin{cases} \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}U. v = \mathscr{F}U. \overline{\mathscr{F}}v = U. \mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}v = U. v\,, \quad \text{也即} \\ \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}U = U \text{ 且 } \mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}V = V\,. \end{cases} \tag{7.6.8}$$

则 $\mathscr{F}$ 与 $\overline{\mathscr{F}}$ 互逆; 若 $V = \mathscr{F}U$, 则 $U = \overline{\mathscr{F}}V$ 且反之亦然. 更有甚者, 若 $U_j \in (\mathscr{S}')_x$ 在 $(\mathscr{S}')_x$ 中趋于 0, 其 Fourier 变换 V_j 在 $(\mathscr{S}')_y$ 中趋于 0. 事实上, 若 v 属于 $(\mathscr{S}')_x$ 中某个有界集, 则由定理 12 可知 $u = \mathscr{F}v$ 属于 $(\mathscr{S}')_y$ 中某个有界集, 故 $U_j. u$ 一致趋于 0, 从而 $V_j. v$ 亦如此. 我们因此可以断言:

① 正是前面的理论给后面这个纯形式上的表达式赋予了意义.

定理 13. Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 及其共轭 $\overline{\mathscr{F}}$ 在两个拓扑向量空间 $(\mathscr{S}')_x$ 和 $(\mathscr{S}')_y$ 之间建立了两个互为逆映射的同构; 若将变量 x 和 y 视为等同, 则 $\mathscr{F}$ 和 $\overline{\mathscr{F}}$ 在 $(\mathscr{S}')$ 上建立了两个互为逆映射的自同构).

由此尤其可推出我们可对收敛级数逐项施行 Fourier 变换, 而这通常是不行的.

我们在 $(\mathscr{S}')$ 上所定义的 Fourier 变换还可表述如下.

在 $(\mathscr{S})$ 上定义的 Fourier 变换是经典的: $\mathscr{F}$ 是一个从 $(\mathscr{S})_x$ 到 $(\mathscr{S})_y$ 的连续线性变换; 但当我们在 $(\mathscr{S})_x$ 和 $(\mathscr{S})_y$ 上分别赋予由 $(\mathscr{S}')_x$ 和 $(\mathscr{S}')_y$ 所诱导的拓扑时, 上述映射依然连续. 正是公式 (7.6.6) 表明此结论成立 [若假设 u, v, U_j, V_j 属于 $(\mathscr{S})$ 且 U_j 在 $(\mathscr{S}')_x$ 中趋于 0, 那么 V_j 在 $(\mathscr{S}')_y$ 中趋于 0]. 于是 $\mathscr{F}$ 可被唯一延拓成一个从 $(\mathscr{S}')_x$ 到 $(\mathscr{S}')_y$ 的连续线性映射; 而正是由上述同一个公式给出这个延拓, 此时 $u, v \in (\mathscr{S})$ 和 $U, V \in (\mathscr{S}')$.

通常使用变换 $\check{}$ (对称: 参见第 6 章, p. 121), $\bar{}$ (复共轭) 与 $\tilde{}$ ($\check{}$ 与 $\bar{}$ 依任意次序的复合) 会更方便. 我们因此有下列公式:

$$
(7.6.9) \qquad \begin{cases} (\mathscr{F}U)\check{} = U.\,\mathscr{F}\check{U} = \overline{\mathscr{F}}U\,, \\ (\mathscr{F}U)\bar{} = \mathscr{F}\widetilde{U} = \overline{\mathscr{F}U}\,, \\ (\mathscr{F}U)\tilde{} = \mathscr{F}\overline{U} = \overline{\mathscr{F}}\widetilde{U}\,. \end{cases}
$$

这些公式在 $(\mathscr{S})$ 中是经典的, 因此在 $(\mathscr{S}')$ 中亦成立.

称 $(\mathscr{S}')_x$ 中广义函数的 Fourier 变换的支集为该广义函数的谱; 则它是 Y^n 中的一个任意的闭集. 不为零的广义函数的谱非空.

Fourier 变换以及 X^n 和 Y^n 的自同构 我们将以一个可能会有大量推广的公式来结束本节①.

设 $x \to H(x)$ 是一个从 X^n 到它本身的同构, 而 $y \to {}^tH(y)$ 为其转置, 后者因此是一个从 Y^n 到它本身的同构. 设 $U \in (\mathscr{S}')_x$ 为广义函数使得它的 Fourier 变换是一个函数 $V(y) = \mathscr{F}U_x$. 则 U 具有在 H 下的直接像 HU, 其定义如下:

$$HU.\,u(x) = U.\,u\big(H(x)\big)$$

[由于 H 为同构, 故这里 $u\big(H(x)\big) \in (\mathscr{S})_x$]. 其 Fourier 变换是一个函数且满足公式:

$$
(7.6.10) \qquad \mathscr{F}(HU) = V\big({}^tH(y)\big)\,.
$$

① 参见 Scarfiello [1] 以及本书第 9 章第 6 节公式 (9.6.12).

事实上, 根据定义

(7.6.11)
$$\begin{cases} \mathscr{F}(HU).\,v = HU.\,\mathscr{F}v = HU_x.\,\displaystyle\iint\cdots\int \exp(-2i\pi x.\,y)v(y)\,dy \\ \qquad = U_x.\,\displaystyle\iint\cdots\int \exp[-2i\pi H(x).\,y]v(y)\,dy \\ \qquad = U_x.\,\displaystyle\iint\cdots\int \exp[-2i\pi x.\,{}^tH(y)]v(y)\,dy \\ \qquad = U_x.\,\displaystyle\iint\cdots\int \exp[-2i\pi x.\,z]v\left({}^tH^{-1}(z)\right)|\det {}^tH^{-1}|\,dz\,. \end{cases}$$

上述多重积分是一个 Fourier 变换, 而 V_y 是一个函数 $V(y)$, 于是根据 Parseval 等式可知该表达式等于

(7.6.12)
$$\iint\cdots\int V(y)v\left({}^tH^{-1}(y)\right)|\det {}^tH^{-1}|\,dy = \iint\cdots\int V\left({}^tH(t)\right)v(t)\,dt\,,$$

这就证明了 (7.6.10).

评注 若 H 退化, 由于 H 不在"无穷远处正则", 则 HU 一般没有意义. 若 V 不是一个函数, 则 (7.6.10) 毫无意义. 若 U 是一个函数 $U(x)$, 则可注意到我们立刻有

(7.6.13)
$$HU(x) = U\left(H^{-1}(x)\right)|\det H^{-1}|\,.$$

特别地, 若 H 为相似比等于 λ 的相似变换, 则我们有

(7.6.14)
$$\mathscr{F}(HU) = V(\lambda y)\,,$$

且若 U 还是一个函数 $U(x)$, 则有熟知的公式:

(7.6.15)
$$\frac{1}{|\lambda|^n}\mathscr{F}\left[U\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right] = V(\lambda y)\,.$$

§7. 例子[①]

例 1. 我们有下列公式:

(7.7.1)
$$\begin{cases} \mathscr{F}\delta = 1\,, & \mathscr{F}1 = \delta\,, \\ \mathscr{F}\delta_{(h)} = \exp(-2i\pi h.\,y)\,, & \mathscr{F}\left[\exp(2i\pi h.\,x)\right] = \delta_{(h)}\,, \\ \mathscr{F}\left(\dfrac{\partial\delta}{\partial x_k}\right) = 2i\pi y_k\,, & \mathscr{F}(2i\pi x_k) = -\dfrac{\partial\delta}{\partial y_k}\,. \end{cases}$$

① LAVOINE [1] 包含 73 页关于广义函数的 Fourier 变换的例子; 这些例子显示了该书对应用数学工作者和工程师们来说可能会有的用途.

这些公式垂手可得. 现在来验证, 比如说第 3 个公式.

$$\begin{aligned}(7.7.2)\qquad \mathscr{F}\left(\frac{\partial \delta}{\partial x_k}\right).v(y) &= \frac{\partial \delta}{\partial x_k}.\iint\cdots\int \exp(-2i\pi x.y)v(y)\,dy \\ &= \iint\cdots\int (2i\pi y_k)v(y)\,dy = (2i\pi y_k).v(y)\,.\end{aligned}$$

在下节中将证明的乘积与卷积的互换性表明, 若 $U \in (\mathscr{S}')_x$ 且 $V = \mathscr{F}U$, 则

$$(7.7.3)\qquad \begin{cases} \mathscr{F}(\tau_h U) = \mathscr{F}(\delta_{(h)} * U) = \exp(-2i\pi h.y)V \\ \mathscr{F}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x_k}\right) = \mathscr{F}\left(\dfrac{\partial \delta}{\partial x_k} * U\right) = 2i\pi y_k V\,. \end{cases}$$

但无论如何, 这些公式可直接证明. 另外, 当 $U \in (\mathscr{S})_x$ 时, 这些公式是经典的, 通过取极限可知它们对 $U \in (\mathscr{S}')_x$ 也成立. 正如我们曾在 $(\mathscr{S})$ 中函数身上看到的, 这些公式表明 Fourier 变换交换可微性的局部性与无穷远处的递降性.

例 2. Fourier 级数与 Fourier 积分 设 $\dot{T}$ 为与 $\mathbb{R}^n$ 上的周期广义函数 T 相对应的环面 $\mathbb{T}^n$ 上的广义函数 (第 1 节). 故它具有由公式 (7.1.1) 给出的 Fourier 系数 $a_l(\dot{T})$. 于是 T 可由级数 $\sum_l a_l \exp(2i\pi l.x)$ 来表示, 后者在 $(\mathscr{B}')_x$ 中收敛, 故也在 $(\mathscr{S}')_x$ 中收敛. 鉴于 (7.7.1) 中的第二个公式, 逐项进行 Fourier 变换可知 T 在 $\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 变换 $\mathscr{F}T$ 为 $\sum_l a_l \delta_{(l)}$; 故 $\mathscr{F}T$ 由离散质点组成, 在点 $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ 处的质量为 a_l. 该性质可推广到其 Fourier 级数在 $(\mathscr{S}')_x$ 中收敛的概周期函数. 反过来, 若 $\mathbb{R}^n$ 上广义函数 T 的 Fourier 变换 $\mathscr{F}T$ 由放在具有整点坐标的点 l 处的质量 b_l 组成, 则它为周期广义函数, 这是因为

$$\mathscr{F}(\tau_l T - T) = \big[\exp(-2i\pi l.x) - 1\big]\mathscr{F}T = 0\,,$$

于是 T 以 b_l 作为其 Fourier 系数.

特别地, 设 $\dot{\delta}$ 为环面上的 Dirac 测度, 可将它与 $\mathbb{R}^n$ 上周期广义函数 $\sum_l \delta_{(l)}$ 视为等同; 在环面上计算得知其 Fourier 系数均等于 1 [参见 (7.1.5)], 从而

$$(7.7.4)\qquad \mathscr{F}\left(\sum_l \delta_{(l)}\right) = \sum_l \delta_{(l)}\,.$$

将 Parseval 公式应用到 (7.7.4) 所得到的就是经典 Poisson 求和公式: 若 $u(x)$ 和 $v(y)$ 属于 $(\mathscr{S})$ 且 $v = \mathscr{F}u$, 则

$$(7.7.5)\qquad \sum_l u(l) = \sum_l v(l)\,.$$

我们自然可将该公式推广到一些更为一般的情形 ①; 将之解释成 Parseval 公式会很有趣. 可知在 $n = 1$ 时, 对 $u(x) = \exp(-\pi t x^2)$ 和 $v(y) = \frac{1}{\sqrt{t}}\exp(-\pi y^2/t)$ 应用

① 参见, 比如说 Bochner [1], p. 33 – 38. 我们还不知道让 Poisson 公式成立的一般充分必要条件. 参见 Boas [1] 以及 Borgen [1].

上述公式可给出 Theta 函数的变换公式:

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi l^2 t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\pi l^2}{t}\right). \tag{7.7.6}$$

例 3. 测度的 Fourier 变换[①] 设 $U = \mu$ 为缓增测度 [公式 (7.4.7)]. 若 A 为 $\mathbb{R}^n$ 的有界可测子集, 则测度 μ 支撑在 A 上的部分 μ_A 可积且其 Fourier 变换 $\mathscr{F}\mu_A$ 是一个可被表示成通常的 Fourier 积分的有界连续函数 $\mathscr{G}_A(y)$. 但若让 A 沿任意方向延伸到无穷远处使得它最终可以包含任意的有界集, 则由缓增假设可知 μ_A 在 $(\mathscr{S}')_x$ 中趋于 μ ("依 $\mathbb{R}^n$ 上有界可测集全体所构成的有向偏序集"收敛). 故 $\mathscr{F}\mu_A$ 在 $(\mathscr{S}')_y$ 中趋于 $\mathscr{F}\mu$, 从而我们有

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(\mu_x) &= \iint\cdots\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2i\pi x.\, y)\, d\mu(x) \\ &= \lim_{A\to\mathbb{R}^n} \iint\cdots\int_A \exp(-2i\pi x.\, y)\, d\mu(x)\,. \end{aligned} \tag{7.7.7}$$

仅当绝对收敛时, 多重积分的收敛才会不依赖积分区域 A 趋于无穷的方式不同于这个经典观点, 尽管

$$\iint\cdots\int_{\mathbb{R}^n} |d\mu(x)| = +\infty\,,$$

但上述积分依然收敛. 不过对于不同的 y, 该积分在数值上并不收敛, 它只作为 y 的缓增广义函数在 $(\mathscr{S}')_y$ 中收敛. 注意到 μ 等于 $1+r^2$ 的幂与某一个可积测度 ν 的乘积 $(1+r^2)^k\nu$, 故 $\mathscr{F}\mu = (1-\frac{\Delta}{4\pi^2})^k\mathscr{F}\nu$, 从而出现在 (7.7.7) 中的那个积分可表示成将求导算子 $(1-\frac{\Delta}{4\pi^2})^k$ 作用在某个绝对收敛的积分上, 而后者给出了 $\mathscr{F}\nu$; 由于 $\mathscr{F}\nu$ 为有界函数, 因此 $\mathscr{F}\mu$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的有界测度 $[\mathscr{F}\mu \in (\mathscr{B}')_y]$, 且当 μ 是一个函数 f 时, 由在第 2 节中回顾的 Lebesgue 定理可知 $\mathscr{F}\mu$ 在无穷远处趋于 0 $[\mathscr{F}\mu \in (\dot{\mathscr{B}}')_y$, 参见第 6 章第 8 节]. 若 μ 是一个多项式与一个 L^p 类函数的乘积 $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, 则 $\mathscr{F}\mu$ 为 $L^{p'}$ 类函数的导数之和 $[p' = p/(p-1)]$, 从而 $\mathscr{F}\mu \in (\mathscr{D}'_{L^{p'}})_y$. 我们由此可知由 U 的局部正则性 $(U = \mu, U = f)$ 可导出 V 在无穷远处的递降性 $[V \in (\mathscr{B}'),\ V \in (\dot{\mathscr{B}}')]$. 公式 (7.7.7) 传统上应用于电学, 符号计算, 波动力学, 等等; 它现在得到彻底证明. 例如, 当 $n =$ 时,

$$\begin{aligned} \delta_y &= \mathscr{F}[(1)_x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi xy)\, dx = 2\int_0^{+\infty} \cos(2\pi xy)\, dx\,, \\ \frac{\partial\delta}{\partial y} &= \mathscr{F}(-2i\pi x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi x)\exp(-2i\pi xy)\, dx \\ &= -2\int_0^{+\infty} 2\pi x \sin(2\pi xy)\, dx\,. \end{aligned} \tag{7.7.8}$$

① 当 $n = 1$ 时, 正是在此情形应用 Bochner 和 Carleman 的方法 (第 168 页的脚注 ①).

这些积分为有限区间上的积分 [在 $(\mathscr{S}')_y$ 中] 的极限, 而第二个公式可由第一个公式通过在积分号对 y 求导而直接得到.

例 4. 空间 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 上的 Fourier 变换 (第 6 章第 8 节) 这次是由 $U \in (\mathscr{D}'_{L^p})$ 在无穷远处的递降性来导出 V 的局部正则性.

若 $U \in (\mathscr{D}'_{L^1})$, 则 $V = \mathscr{F}U$ 连续且与任意一个多项式的乘积均有界: 它因此是一个速降连续函数. 若 $U \in (\mathscr{D}'_{L^p})$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, 则 V 本身及其与任意一个多项式的乘积均为 $L^{p'}$ 类 $[p' = p/(p-1)]$.

若 $U \in (\mathscr{D}'_{L^1})$, 则它为可积函数的导数的有限和 (第 6 章定理 15), 从而 V 为一个多项式与一个有界连续函数之积: 它因此是一个缓增连续函数. 该结论可立刻推广到 $(\mathscr{D}'_{L^1})$ 中的有界集或收敛序列. 若 $U \in (\mathscr{D}'_{L^p})$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, 则 V 为一个多项式与一个 $L^{p'}$ 类函数之积. 仅当 $p = 2$ 时上述性质才能给出如下刻画: "$U \in (\mathscr{D}'_{L^2})$" 等价于说"$V$ 为一个多项式与一个 L^2 类函数之积". 若 $U \in (\mathscr{D}'_{L^1})$, 则我们有下述公式 [参见第 6 章第 8 节, 空间 $(\mathscr{B})$ 与 $(\mathscr{D}'_{L^1})$ 之间的对偶关系]:

$$V(y) = U_x.\ \exp(-2i\pi x.\, y)\,. \tag{7.7.9}$$

上述右式对 y 的每一个值均有意义.

当 $U \in (\mathscr{S})_x$ 时, 上述公式的确成立; 根据前面针对 $(\mathscr{D}'_{L^1})$ 中收敛序列所说, 通过取极限可知它对 $U \in (\mathscr{D}'_{L^1})$ 也成立.

特别地, 当 $y = 0$ 时, 该式给出

$$\mathrm{Tr}.\, V = \iint \cdots \int U\,, \quad U \in (\mathscr{D}'_{L^1})\,, \tag{7.7.10}$$

上述公式将积分与迹联系在一起. 当 U 为 $\mathbb{R}^n$ 上可积测度时, 这是一个经典结论. 可注意到, 若 $u \in (\mathscr{S})$, $U \in (\mathscr{S}')$ 而 $v = \mathscr{F}u$, $V = \mathscr{F}U$, 则 Parseval 公式可写为

$$\iint \cdots \int U\bar{u} = \mathrm{Tr}.\,(V * \bar{v})\,,$$

而这是 (7.7.10), (7.6.10), 以及将在后面证明的 (7.8.4) 的推论.

可形式推广公式 (7.7.7) 和 (7.7.9). 对任意 $U, V \in (\mathscr{S}')$ 且 $V = \mathscr{F}U$, 总可以记

$$V_y = U_x.\ \exp(-2i\pi x.\, y)\,. \tag{7.7.11}$$

其中右式中的点积对 y 的不同值没有数值上的意义, 而应理解成关于 y 的广义函数. 若用具有紧支集或属于 $(\mathscr{D}'_{L^1})$ 的乘积 αU 来逼近 U, 则可将上述公式归结为 (7.7.9); 若用正则化 $U * \beta \in (\mathscr{O}_M)$ 来逼近 U, 则该公式可归结为 (7.7.7). 由此得到 Fourier 积分各种不同的"求和法". 例如, 可取

$$\alpha = \exp(-\varepsilon\pi r^2)\,, \quad \beta = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^n \exp\left(-\frac{\pi r^2}{\varepsilon}\right)\,.$$

例 5. 距离的函数 设 $U = 1/r^k$ $(0 < k < n)$. 当 $k > \frac{n}{2}$ 时 U 属于 $(\mathscr{D}'_{L^2})$, 故 $\mathscr{F}U = V$ 是一个函数. 该函数显然仅依赖于距离 r. 另外, 由于 $1/r^k$ 为齐次的且其次数为 $-k$, 则 V 是一个次数为 $k-n$ 的齐次函数 [根据 (7.6.15)], 也就是说形如 C_{-k}/r^{n-k}. 我们可对 $u = v = \exp(-\pi r^2)$ 应用 Parseval 公式来计算常数 C_{-k} ①:

$$\iint\cdots\int \exp(-\pi r^2) r^{-k}\, dx = C_{-k} \iint\cdots\int \exp(-\pi r^2) r^{k-n}\, dy\,, \tag{7.7.12}$$

当 m 为实数且 $-\frac{n}{2} > m > -n$ 时, 由此可得

$$\mathscr{F} r^m = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}+m}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{m}{2}\right)} r^{-(m+n)}\,. \tag{7.7.13}$$

当 $m = -\frac{n}{2}$ 时, 通过取极限可知上述公式显然成立, 而当 $0 > m > -\frac{m}{n}$ 时, 则可通过互换 m 和 $-(m+n)$ 而得到. 若当 $\Re m > 0$ 或 $\Re m < -n$ 时在 r 的幂之前添加符号 Pf (有限部分), 则上式两边为复变量 m 的亚纯函数; 公式 (7.7.13) 因此对所有不是上述亚纯函数的奇异点的复数值 m 都成立; 对于那些例外值 [对于左式, 例外值为 $m = -n-2h$ ($h \geqslant 0$ 为整数); 而对于右式则为 $m = 2h$], 上述公式应作如下修正 [该计算可从 m 的非奇异值出发取极限得到; 见公式 (2.3.5) 和 (2.3.9)]

$$\begin{cases} \mathscr{F}(r^{2h}) = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k \delta\,, \\ \mathscr{F}\left(\mathrm{Pf.}\, \frac{1}{r^{n+2h}}\right) = \frac{2(-1)^h \pi^{\frac{n}{2}+2h} r^{2h}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+h\right) h!} \left[\log \frac{1}{\pi r} + \frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{h} \frac{1}{l} - \gamma\right) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{n}{2}+h\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+h\right)}\right], \end{cases} \tag{7.7.14}$$

其中 γ 为 Euler 常数; 当 $h = 0$ 时, 和式 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{h}$ 应被换成 0.

特别地, 当 $m = -n$ 时, 可得

$$\mathscr{F}\left(\mathrm{Pf.}\, \frac{1}{r^n}\right) = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[\log \frac{1}{\pi r} - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right]. \tag{7.7.15}$$

$$\mathscr{F}\left(\log \frac{1}{r}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2(\sqrt{\pi})^n} \left(\mathrm{Pf.}\, \frac{1}{r^n}\right) + \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + \log \pi\right) \delta\,. \tag{7.7.16}$$

当 $n \neq 2$ 时, 这些公式立刻给出

$$\mathscr{F}\left[\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\right] = -4\pi^2 r^2 \mathscr{F}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = -(n-2) \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,, \tag{7.7.17}$$

这就重新给出了公式 (2.3.10). 当 $n = 2$ 时, 我们将有

$$\mathscr{F}\left[\Delta\left(\log \frac{1}{r}\right)\right] = -4\pi^2 r^2 \mathscr{F}\left(\log \frac{1}{r}\right) = -2\pi\,.$$

① Deny 先生向我建议了这个很简单的计算 C_{-k} 的方法. 它曾用于其博士论文 DENY [1], p. 151.

当 $n=1$ 时, 公式 (7.7.16) 变为

$$\mathscr{F}(\log|x|) = -\frac{1}{2}\mathrm{Pf.}\left(\frac{1}{|y|}\right) - \left[\gamma + \log(2\pi)\right]\delta\,, \tag{7.7.18}$$

对 x 求导后可得

$$\mathscr{F}\left(\mathrm{vp.}\,\frac{1}{x}\right)(y) = \begin{cases} +i\pi & 若\ y<0\,, \\ -i\pi & 若\ y>0\,. \end{cases} \tag{7.7.19}$$

这其实可直接得到. 为此可注意到 $\mathrm{vp.}\,\frac{1}{x}$ 为唯一奇广义函数 ($\check{U}=-U$) 使得它与 x 的乘积为常数 1 (参见第 5 章定理 7), 故其 Fourier 变换为唯一奇广义函数 V 满足

$$-\frac{1}{2i\pi}\frac{dV}{dy} = \delta\,.$$

由更高阶的求导可给出 [公式 (2.2.28)]:

$$\mathscr{F}\left[(-1)^l l!\,\mathrm{Pf.}\,\frac{1}{x^{l+1}}\right](y) = \begin{cases} +i\pi(2i\pi y)^l & 若\ y<0\,, \\ -i\pi(2i\pi y)^l\pi & 若\ y>0\,. \end{cases} \tag{7.7.20}$$

公式 (7.7.19) 间接地广为人知. 设 $V=\mathscr{F}U$, 由乘积与卷积的互换性可给出

$$\mathscr{F}\left[\left(\mathrm{vp.}\,\frac{1}{x}\right)*U\right](y) = \begin{cases} +V & 若\ y<0\,, \\ -V & 若\ y>0\,. \end{cases} \tag{7.7.21}$$

该公式对 $U\in(\mathscr{S})$ 有意义, 由此通过取极限可知它在更为一般的情形下也有意义: 比如说, 对于 $U\in(\mathscr{D}'_{L^2})$, 此时 V 是一个 (在任意的紧集上均为 L^2 类的) 函数. 对于 $U\in L^p$ $(1<p<+\infty)$, 可证明 $(\mathrm{vp.}\,\frac{1}{x})*U$ 可写成①

$$\mathrm{vp.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{U(x)}{x-t}\,dt\,,$$

该积分对几乎所有 x 收敛. 通过证明与 $\mathrm{vp.}\,\frac{1}{x}$ 作卷积是一个从 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 到 $(\mathscr{D}'_{L^q})$ 的连续线性运算 ($1<p<+\infty$, $p\leqslant q$, 或 $1=p<q$), 我们可立刻推广该积分的经典性质.

一般地, 为计算一个函数 $U(r)$ 的 Fourier 变换 V, 我们将会用到下述经典公式:

$$V(r) = \frac{2\pi}{r^{\frac{n-2}{2}}}\int_0^{+\infty}U(t)t^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi rt)\,dt\,, \tag{7.7.22}$$

其中 $J_{\frac{n-2}{2}}$ 是一个 Bessel 函数②.

这个在 U,V 为函数时成立的公式有一个推广, 定义了半直线 $(0,+\infty)$ 上的缓增广义函数的 Hankel 变换, 但我们将不在这上面做进一步的讨论.

---

① Marcel RIESZ [3]. 这就是 Hilbert 变换.

② BOCHNER [1], p. 187, 公式 15.

对于 $U(r) = 1/(1+r^2)^{\frac{m}{2}}$ ($\Re m > n$), 沿用公式 (2.3.20) 中的记号, 我们因此有

$$\mathscr{F}\left((1+r^2)^{-\frac{m}{2}}\right) = \frac{2(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} r^{\frac{m-n}{2}} K_{\frac{m-n}{2}}(2\pi r) = L_m, \tag{7.7.23}$$

但对任意的 m, 均有 $(1+r^2)^{-\frac{m}{2}} \in (\mathscr{S}')$; 且它为复变量 m 的整函数. 故其 Fourier 变换 V 属于 $(\mathscr{S}')_y$ [由 $(1+r^2)^{-\frac{m}{2}}$ 的解析性可知 V 甚至在无穷远处指数递降], 且可解析延拓到 $\Re m \leqslant n$. 故该延拓总与 L_m 相等, 除非 $m = 0, -2, -4, \ldots$, 在书写时还需添加记号 Pf. (有限部分); 而在上述例外的情形, 我们则显然有

$$L_{2k} = \mathscr{F}\left((1+r^2)^k\right) = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k \delta.$$

在许多问题中, 可用 $1/(1+r^m)$ 和 $1 + \left(-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^m$ 来代替 $1/(1+r^2)^m$ 和 $\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^m$.

例 6. 亚纯函数 设 $f(z)$ 为平面 $\mathbb{R}^2$ 上关于复变量 z 的亚纯函数. 我们曾见过如何定义广义函数 vp. $f(z)$ (第 2 章第 3 节例 3).

大家可验证下述公式:

$$\begin{cases} \mathscr{F}(z) = -\dfrac{1}{i\pi}\dfrac{\partial\delta}{\partial\bar{z}}, & \mathscr{F}(z^m) = \left(-\dfrac{1}{i\pi}\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)^m \delta, \\ \mathscr{F}\left(\frac{1}{z}\right) = \dfrac{-i}{z}, & \mathscr{F}\left(\text{vp.}\, \dfrac{1}{z^m}\right) = -\dfrac{i}{z}\dfrac{(-i\pi\bar{z})^{m-1}}{(m-1)!}, \end{cases} \tag{7.7.24}$$

其中将 $\mathbb{R}^2$ 与其对偶视为等同. 上述这些公式与 (2.3.27) 等价.

例 7. Hermite 多项式的 Fourier 变换 首先考虑单变量 ($n = 1$) 的情形. 我们借助下述公式来定义 Hermite 多项式 $H_m(x)$ ①:

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[\exp(-2\pi x^2)\right] = (-1)^m \sqrt{m!}\, 2^{m-\frac{1}{4}} \pi^{\frac{m}{2}} H_m(x) \exp(-2\pi x^2). \tag{7.7.25}$$

由这些多项式所定义的 Hermite 函数

$$\mathscr{H}_m(x) = H_m(x)\exp(-\pi x^2)$$

在 L^2 中构成了一个正交归一系:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}_p(x)\mathscr{H}_q(x)\, dx = \begin{cases} 0 & 若\ p \neq q, \\ 1 & 若\ p = q. \end{cases} \tag{7.7.26}$$

① 通常的 Hermite 多项式 $P_m(x)$ 与我们的 Hermite 多项式通过下述公式联系起来:

$$\frac{d^m}{dx^m}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = (-1)^m P_m(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad H_m(x) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{m!}} P_m(2\sqrt{\pi}x).$$

另外, Fourier 变换给出

$$\mathscr{F}\Big[\mathscr{H}_m(x)\Big](y) = (-i)^m \mathscr{H}_m(y)\,. \tag{7.7.27}$$

设 $\varphi(x) \in L^2$. 该函数依 Hermite 函数的展开在 L^2 中收敛:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(\varphi)\mathscr{H}_m(x)\,, & a_m(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathscr{H}_m(x)\,dx\,, \\ \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m(\varphi)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\,dx\,. \end{cases} \tag{7.7.28}$$

考虑由下式定义的变换 $\mathscr{T}_+$ 和 $\mathscr{T}_-$:

$$\mathscr{T}_\pm\varphi = \pm\frac{d\varphi}{dx} + 2\pi x\varphi\,, \tag{7.7.29}$$

它们当中的每一个均为另外一个的转置.

根据 Hermite 多项式之间的递归关系式, 我们有

$$\begin{cases} \mathscr{T}_+\mathscr{H}_m = 2\sqrt{\pi m}\,\mathscr{H}_{m-1}\,, \\ \mathscr{T}_-\mathscr{H}_m = 2\sqrt{\pi(m+1)}\,\mathscr{H}_{m+1}\,. \end{cases} \tag{7.7.30}$$

若 $\varphi, \varphi', x\varphi$ 均属于 L^2, 则由上式可导出

$$a_m(\mathscr{T}_+\varphi) = \mathscr{T}_+\varphi.\,\mathscr{H}_m = \varphi.\,\mathscr{T}_-\mathscr{H}_m\,. \tag{7.7.31}$$

$$\begin{cases} a_m(\mathscr{T}_+\varphi) = 2\sqrt{\pi(m+1)}\,a_{m+1}(\varphi)\,, \\ a_m(\mathscr{T}_-\varphi) = 2\sqrt{\pi m}\,a_{m-1}(\varphi) \quad [m \geqslant 1\,,\ a_0(\mathscr{T}_-\varphi) = 0]\,, \end{cases} \tag{7.7.32}$$

由此可导出级数

$$\sum_{m=0}^{+\infty} m|a_m(\varphi)|^2$$

收敛. 反过来, 若 $\varphi \in L^2$, 则级数

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(\varphi)\mathscr{H}_m(x)$$

在 L^2 中收敛, 故也在 $(\mathscr{D}')$ 中收敛; 对之逐项应用运算 $\mathscr{T}_+$ 和 $\mathscr{T}_-$ 可知 $\mathscr{T}_+\varphi$ 与 $\mathscr{T}_-\varphi$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中为 Hermite 函数的级数和; 若 $\sum_{m=0}^{+\infty} m|a_m(\varphi)|^2 < +\infty$, 则这些级数在 L^2 中收敛, 从而 φ' 和 $x\varphi$ 属于 L^2. 因此下述两性质等价:

a) $\varphi,\ \varphi',\ x\varphi$ 属于 L^2;

b) $\sum_{m=0}^{+\infty} m|a_m(\varphi)|^2 < +\infty\,.$

将算子 $\mathscr{T}_+$ 和 $\mathscr{T}_-$ 进行迭代, 我们可由此导出下列性质:

1° 为使 $\varphi \in (\mathscr{S})$, 当且仅当序列 $a_m(\varphi)$ 在 $m \to +\infty$ 时速降. 将 $\varphi \in (\mathscr{S})$ 与序列 $\{a_m(\varphi)\}$ 对应的映射为 $(\mathscr{S})$ 与速降序列空间之间的 (拓扑向量空间) 同构.

2° 若 T 为缓增广义函数, 则我们可计算 $a_m(T) = T.\mathscr{H}_m$. 由定理 6.1° 可知 T 为一些广义函数的有限和, 且这些广义函数均是对 L^2 中函数反复应用算子 $\mathscr{T}_+$ 和 $\mathscr{T}_-$ 而得到, 于是由 (7.7.32) 可知所有 $a_m(T)$ 构成了一个在 $m \to +\infty$ 时速降的序列. 反过来, 若序列 b_m 在 $m \to +\infty$ 时速降, 则它为 $\sqrt{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}$ 与某个序列 c_m 之积, 其中 $\sum |c_m|^2 < +\infty$, 这就证明了级数 $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m\mathscr{H}_m(x)$ 在 $(\mathscr{S}')$ 中趋于一个以 b_m 作为其 Hermite 系数的极限 T (参见第 1 节定理 1). 同时可知, 任意广义函数 $T \in (\mathscr{S}')$ 可表示成 $(\frac{d}{dx} + 2\pi x)^k f$, 其中 k 充分大, 而 f 属于 L^2 [但 f 不唯一, 我们可对之添加一个线性组合 $\sum_{m=0}^{k-1} a_m\mathscr{H}_m(x)$], 甚或是一个有界连续函数.

将 $T \in (\mathscr{S}')$ 与序列 $\{a_m(T)\}$ 相对应的映射为空间 $(\mathscr{S}')$ 与缓增序列空间之间的 (拓扑向量空间) 同构.

于是 $(\mathscr{S})$ 和 $(\mathscr{S}')$ 同 $(\mathscr{D})_{\mathbb{T}^n}$ 和 $(\mathscr{D}')_{\mathbb{T}^n}$ (第 1 节) 一样, 同构于序列的空间[1]; 而 $(\mathscr{S})$ 和 $(\mathscr{D})_{\mathbb{T}^n}$ 同构, 且 $(\mathscr{S}')$ 和 $(\mathscr{D}')_{\mathbb{T}^n}$ 亦同构. 借助 $\varphi \in (\mathscr{S})$ 或 $T \in (\mathscr{S}')$ 的 Hermite 展开, 点积 $T.\varphi$ 有简单的表达式, 由 (7.7.27) 可知其 Fourier 变换亦如此:

$$
\text{(7.7.33)} \qquad \begin{cases} T.\varphi = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(T)a_m(\varphi)\,, \\ \mathscr{F}\left[\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(T)\mathscr{H}_m(x)\right](y) = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}(-i)^m a_m(T)\mathscr{H}_m(y)\,. \end{cases}
$$

这使得我们可将由下式定义的 Fourier – Mehler 变换推广到 $(\mathscr{S})$ 和 $(\mathscr{S}')$ 上[2]:

$$
\text{(7.7.34)} \qquad \mathscr{F}_\omega\left[\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(T)\mathscr{H}_m(x)\right](y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \omega^m a_m(T)\mathscr{H}_m(y)\,,
$$

其中 ω 为模 1 的复数, 而 $\mathscr{F}_\omega$ 和 $\overline{\mathscr{F}}_\omega = \mathscr{F}_{\bar{\omega}}$ 为 $(\mathscr{S})_x$ 和 $(\mathscr{S})_y$, 或 $(\mathscr{S}')_x$ 和 $(\mathscr{S}')_y$ 之间的互逆同构.

对于高维情形, 我们将 $\mathscr{H}_m$ 换成下列函数:

$$
\text{(7.7.35)} \qquad \mathscr{H}_l(x) = \mathscr{H}_{l_1}(x_1)\mathscr{H}_{l_2}(x_2)\cdots\mathscr{H}_{l_n}(x_n)\,,
$$

其中 $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$, 且 $l_\nu \geqslant 0$ 为整数.

---

① 这些序列空间曾被 Köthe 先生研究过, 参见 KÖTHE [1].

② Wiener 先生口头上向我指出了这个推广.

例 8. 双曲距离 重新考虑 Riesz 先生的广义函数:

$$Z_l = \frac{1}{\pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{l-1} \Gamma\left(\frac{l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l+2-n}{2}\right)} \operatorname{Pf.} s^{l-n}. \tag{7.7.36}$$

提醒一下 (第 2 章第 3 节例 4), 上面的定义仅对那些使得有限部分有明确意义的非奇异值 $l-n$ 成立. 对于 $l-n$ 的奇异值, 可通过取极限来定义 Z_l; 由此得到一个取值在 $(\mathscr{D}')$ 中以复数 l 为变量的整函数. 另外提醒大家, 广义函数 Z_l 的支集包含于波锥区域 $x_n \geqslant 0,\ x_n^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-1}^2 \geqslant 0$. 若 $\Re l > n$, 则 Z_l 为缓增连续函数; 由求导公式 (2.3.33) 可知对任意 l, 均有 $Z_l \in (\mathscr{S}')$. 另外可证明当 $\Re l \leqslant n$ 时 Z_l 属于 $(\mathscr{B}')$, 并且当 $\Re l < 0$ 的绝对值越大时 Z_l 在无穷远处递降得越快.

我们将通过 Laplace 变换来得到 $\mathscr{F}(Z_l)$. 事实上, 若 $\varepsilon > 0$, 则 $Z_l \exp(-2\pi\varepsilon x_n)$ 属于 $(\mathscr{O}'_C)$, 并且当 $\Re l \geqslant n$ 时, 我们有下述公式:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\Big[Z_l \exp(-2\pi\varepsilon x_n)\Big] &= \iint\cdots\int Z_l(x) \exp(-2i\pi x.y - 2\pi\varepsilon x_n)\, dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^l \Big[(\varepsilon + iy_n)^2 + y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2\Big]^{-\frac{l}{2}}. \end{aligned} \tag{7.7.37}$$

由于 $Z_l \exp(-2\pi\varepsilon x_n)$ 为复变量 l 的亚纯函数 [在 $(\mathscr{O}'_C)$ 中取值], 故其 Fourier 变换亦如此, 从而上述公式对所有的 l 均成立, 并且该式的右边为 $(\mathscr{O}_M)$ 中的函数 (因为中括号中的函数永不为零).

若现在 $\varepsilon \to 0$, 则 $Z_l \exp(-2\pi\varepsilon x_n)$ 在 $(\mathscr{S}')$ 中趋于 Z_l, 故 $\mathscr{F} Z_l$ 由 (7.7.37) 中最后那一项 [在 $(\mathscr{S}')$ 中] 的极限来定义. 记函数 $y_n^2 - y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_{n-1}^2$ 为 σ^2; 则在波锥的内部 (在 $y_n > 0$ 和 $y_n < 0$ 这两个分支中), 成立 $\sigma^2 > 0$, 在外部则有 $\sigma^2 < 0$. 在波锥的内部的分支 $y_n > 0$ 中, 函数 σ^2 与 s^2 相等, 但 σ^2 的支集为整个空间, 而 s^2 在波锥的正向分支之外为零.

设 $\Re l < 0$. 可验证 (7.7.37) 的右边 [在任意紧集上一致且也在 $(\mathscr{S}')$ 中] 收敛于函数 $g(y)$, 后者等于

$$\begin{cases} g_1 = \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^l (-\sigma^2)^{-\frac{l}{2}} & \text{在波锥的外部 } (-\sigma^2 \geqslant 0), \\ g_2 = \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^l (\sigma^2)^{-\frac{l}{2}} \exp\left(-i\pi \dfrac{l}{2}\right) & \text{在波锥的内部 } (\sigma^2 \geqslant 0,\ y_n \geqslant 0), \\ g_3 = \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^l (\sigma^2)^{-\frac{l}{2}} \exp\left(+i\pi \dfrac{l}{2}\right) & \text{在波锥的内部 } (\sigma^2 \geqslant 0,\ y_n \leqslant 0). \end{cases} \tag{7.7.38}$$

当 $\Re l \geqslant 0$ 时 $\mathscr{F} Z_l$ 可由如上定义的函数关于 l 做解析延拓而得到; 对于 l 的非例外值, 在函数 g 的定义前添加符号 Pf. 就可得到上述解析延拓. 对于 l 的例外值, 需明确指出记号 $\operatorname{Pf.} g$ 被赋予的意义. 所采用的定义要考虑到这是复变量 l 的整函数,

而这就完全确定所要找的广义函数. 它没有奇异点不是因为像 Z_l 那样在 Pf. 的前面有一个系数, 而是由于赝函数 $\mathrm{Pf.}\,g$ 在波锥面两边取不同辐角的复数值, 而这会产生抵消, 从而消去这三个赝函数 $\mathrm{Pf.}\,g_1, \mathrm{Pf.}\,g_2, \mathrm{Pf.}\,g_3$ 每个在点 l 处单独具有的奇异性.

对于偶整数 $l = 2k \geqslant 0$, 我们得到迭代波动方程基本解的 Fourier 变换:

$$\mathscr{F}(Z_{2k}) = \mathrm{Pf.}\left(\frac{-1}{4\pi^2\sigma^2}\right)^k, \tag{7.7.39}$$

其中约定上述表达式仅在明确了 Pf. 的定义之后才有意义 (因为我们正好碰到一个奇异值). 我们这里不给出其确切定义, 但不管怎样, 我们有

$$(-4\pi^2\sigma^2)^k \mathrm{Pf.}\left(\frac{-1}{4\pi^2\sigma^2}\right)^k = 1, \tag{7.7.40}$$

而这正好对应于公式 (2.3.34): $\Box^k Z_{2k} = \delta$.

下述评注表明在没有明确的定义时, 记号 Pf. 被赋予的意义可能会产生混淆. 当 l 为实数时 $\widetilde{Z}_l = \check{Z}_l$ 的 Fourier 变换为 $\mathrm{Pf.}\,\bar{g} = \mathrm{Pf.}\,\check{g}$, 而这可在公式 (7.7.38) 中或者将 g_2 和 g_3 换成 $\bar{g}_2$ 和 $\bar{g}_3$, 或者交换 g_2 和 g_3 而得到. 但当 $l = 2k$ 时, 我们将会得到关于 $\mathscr{F}\check{Z}_{2k}$ 和 $\mathscr{F}Z_{2k}$ 的同样表达式 $\mathrm{Pf.}\left(\frac{-1}{4\pi^2\sigma^2}\right)^k$, 而 $\check{Z}_{2k}$ 和 Z_{2k} 不相等 (它们的支集关于原点对称). 这是因为记号 Pf. 在上述两种情形没有同样的定义. 在这两种情形, 与公式 (2.2.13) 中的那个无限部分 $I(\varepsilon)$ 相对应的是一个关于 $1/\varepsilon$ 的带常数项的虚多项式, 并且这个虚多项式关于原点不对称; 由此可导出如此定义的 $\mathrm{Pf.}\left(\frac{-1}{4\pi^2\sigma^2}\right)^k$ 是一个关于原点不对称的虚广义函数 (另外 Z_{2k} 关于原点不对称且不具有 Hermite 对称性 $\widetilde{Z}_{2k} = \check{Z}_{2k} \neq Z_{2k}$), 而通常的函数 $\left(\frac{-1}{4\pi^2\sigma^2}\right)^k$ 关于原点对称且为实的. 满足 Hermite 对称性的基本解 $\frac{1}{2}(\check{Z}_{2k} + Z_{2k})$ 的 Fourier 变换也可以被称为 $\mathrm{Pf.}\left(\frac{-1}{4\pi^2\sigma^2}\right)^k$, 但这一次定义的有限部分为对称且为实的 ①.

例 9. 利用逐次积分来计算 Fourier 变换 通常可用一些非常经典的、将多重积分换成简单的逐次积分的方法来计算 Fourier 变换.

比如说, 现要计算 $\mathscr{F}U$, 其中当 $\Re k > 0$ 时 U 是由下式定义的赝函数:

$$U_x = \mathrm{Pf.}\left(\frac{1}{2i\pi x_n + 4\pi^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2)}\right)^k. \tag{7.7.41}$$

将变量 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的空间 X^n 看成是关于变量 x_n 的一维空间与关于变量 $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ 的 $n-1$ 维空间的乘积将会比较方便.

① 关于在 Lorentz 群下不变的广义函数, 记号 Pf. 在 Methée [1]中已明确定义: 相对于此定义, 这里所用的记号 Pf. 是错误的. Methée [2] 和 Braga Carmen Lys [1] 计算了 Z_l 的 Fourier 变换.

这里记号 Pf. 的显式定义如下. 唯一的奇异点为 $x=0$; 当 $\Re k<(n+1)/2$ 时 U 是一个函数, 这是因为右边那个表达式中的函数在原点邻域内可积, 从而记号 Pf. 多余. 但当 $\Re k \geqslant (n+1)/2$ 时 U 是一个赝函数. 当 $\varphi(x)\in(\mathscr{S})_x$ 时, 考虑单积分

$$I(\xi,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)\,dx_n}{\left(2i\pi x_n+4\pi^2|\xi|^2\right)^k}, \tag{7.7.42}$$

它在 $\xi\neq 0$ 处有定义且连续; 但我们可以 (利用 φ 在原点 0 的邻域内的 Taylor 展式) 证明, 当 $\xi\to 0$ 时, 该量趋近一个有限的极限, 从而我们可令

$$U_x.\varphi(x)=\int\cdots\int I(\xi,\varphi)\,d\xi=\int\cdots\int d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)\,dx_n}{\left(2i\pi x_n+4\pi^2|\xi|^2\right)^k}. \tag{7.7.43}$$

这里的有限部分是一个条件收敛的积分.

现在来计算 $V_y=\mathscr{F}U$. 我们自然会因此令

$$I\big(\xi,\exp(-2i\pi x.\,y)\big)=\exp(-2i\pi\xi.\,\eta)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-2i\pi x_n y_n)\,dx_n}{\left(2i\pi x_n+4\pi^2|\xi|^2\right)^k}, \tag{7.7.44}$$

进而令

$$\begin{aligned}W(y)&=\int\cdots\int I\big(\xi,\exp(-2i\pi x.\,y)\big)\,d\xi\\&=\int\cdots\int\exp(-2i\pi\xi.\,\eta)\,d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-2i\pi x_n y_n)\,dx_n}{\left(2i\pi x_n+4\pi^2|\xi|^2\right)^k}.\end{aligned} \tag{7.7.45}$$

当然还须验证这些公式有意义. 上述单积分在 $y_n\neq 0$, $\xi\neq 0$ 时条件收敛 (当 $k\geqslant 2$ 时为绝对收敛), 且等于

$$\begin{cases}0 & \text{若 } y_n>0,\\ \dfrac{|y_n|^{k-1}}{\Gamma(k)}\exp\big(-4\pi^2|y_n||\xi|^2\big) & \text{若 } y_n<0.\end{cases} \tag{7.7.46}$$

当 $y_n\neq 0$ 时, 所得到的函数在 $\xi\to 0$ 时有一个有限极限, 而那个多重积分等于

$$\begin{cases}0 & \text{若 } y_n>0,\\ \dfrac{|y_n|^{k-1}}{\Gamma(k)}\displaystyle\int\cdots\int\exp(-2i\pi\xi.\,\eta)\exp\big(-4\pi^2|y_n||\xi|^2\big)\,d\xi & \\ \quad=\dfrac{|y_n|^{k-1}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{\pi|y_n|}}\right)^{n+1}\exp\left(-\dfrac{|\eta|^2}{4|y_n|}\right) & \text{若 } y_n<0.\end{cases} \tag{7.7.47}$$

如此计算得到的 $W(y)$ 在 $y_n\neq 0$ 处 (故几乎处处) 有定义; 它在超平面 $y_n=0$ 的邻域内局部可积, 因此表示一个为函数的广义函数.

剩下来还需证明该函数 $W(y)$ 就是 Fourier 变换 V.

该结果的证明是纯代数的, 我们将之留给读者. 我们可利用 Parseval 等式 (7.6.6) 来定义 V, 而大家则可以仅满足于对形如 $u(x) = u_1(\xi)u_2(x_n)$, $v(y) = v_1(\eta)v_2(y_n)$ 这样的 u, v 来应用该等式 (第 4 章定理 3):

$$V_y . \bar{v}_1(\eta)\bar{v}_2(y_n) = U_x . \bar{u}_1(\xi)\bar{u}_2(x_n) . \tag{7.7.48}$$

我们可借助给出 U_x 的定义的公式 (7.7.43) 来计算上式的右边, 同时逐步应用 Parseval 公式, 先是对变量 x_n, y_n 进行, 随后对变量 ξ, η, 最后再适当交换积分次序.

利用有限部分, 我们可将之推广到 $\Re k \leqslant 0$ 的情形.

§8. Fourier 变换的性质

张量积 定理 14. 张量积的 Fourier 变换为 Fourier 变换的张量积: 若

$$V_y = \mathscr{F} U_x, \ V'_{y'} = \mathscr{F} U'_{x'} ,$$

则

$$\mathscr{F}(U_x \otimes U'_{x'}) = V_y \otimes V_{y'} \quad [\text{参见第 4 章}] . \tag{7.8.1}$$

当 U, U' 属于 $(\mathscr{S})$ 时, 该公式实际上是显然的, 于是通过从 $(\mathscr{S})$ 到 $(\mathscr{S}')$ 延拓可知上式成立 (参见第 6 节).

例. 在两个 n 维空间 X^n 和 Y^n 上的 Fourier 变换中, 令

$$U_{x_1,x_2,\ldots,x_n} = (1)_{x_1,x_2,\ldots,x_k} \otimes S_{x_{k+1},\ldots,x_n} . \tag{7.8.2}$$

则我们将有

$$V_{y_1,y_2,\ldots,y_n} = \delta_{y_1,y_2,\ldots,y_k} \otimes (\mathscr{F} S)_{y_{k+1},\ldots,y_n} . \tag{7.8.3}$$

不依赖 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 的广义函数的 Fourier 变换 (第 4 章第 5 节例 1) 为定义在由 $y_1, y_2, \ldots, y_k$ 构成的子空间上的广义函数在 Y^n 上的延拓 (第 4 章第 5 节例 2), 且反之亦然.

乘积与卷积 定理 15. 变换 $\mathscr{F}$ 和 $\overline{\mathscr{F}}$ 在 $(\mathscr{O}_M)$ 和 $(\mathscr{O}'_C)$ 之间建立了两个互逆同构, 且将乘积和卷积互换:

$$\begin{cases} S \in (\mathscr{O}_M),\ U \in (\mathscr{S}') \rightrightarrows \mathscr{F} S \in (\mathscr{O}'_C),\ \mathscr{F} U \in (\mathscr{S}') \quad \text{且} \\ \mathscr{F}(SU) = (\mathscr{F} S) * (\mathscr{F} U) . \end{cases} \tag{7.8.4}$$

$$\begin{cases} T \in (\mathscr{O}'_C),\ U \in (\mathscr{S}') \rightrightarrows \mathscr{F} T \in (\mathscr{O}_M),\ \mathscr{F} U \in (\mathscr{S}') \quad \text{且} \\ \mathscr{F}(T * U) = (\mathscr{F} T)(\mathscr{F} U) . \end{cases} \tag{7.8.5}$$

我们由此可知 $(\mathscr{O}_M)$ 和 $(\mathscr{O}'_C)$ 彼此同构.

在所涉及的广义函数均为 $(\mathscr{S})$ 中函数这一个最基本的情形, 乘积和卷积之间可互换这个性质是经典的. 当 T, U 属于 $(\mathscr{S})$ 甚或是 $(\mathscr{D}'_{L^1})$ 时 [参见 (6.8.3) 和 (7.7.9)], 我们的确有:

$$
(7.8.6)\quad \mathscr{F}(T*U)_x = (T*U)_x.\exp(-2i\pi x.y) = (T_\xi \otimes U_\eta).\exp[-2i\pi(\xi+\eta).y)]
$$
$$
= \Big[T_\xi.\exp(-2i\pi\xi.y)\Big]\Big[U_\eta.\exp(-2i\pi\eta.y)\Big] = (\mathscr{F}T)_y * (\mathscr{F}U)_y\,.
$$

同样的公式对 $\mathscr{F}$ 的逆 $\overline{\mathscr{F}}$ 也成立, 故在 $(\mathscr{S})$ 中也有将乘积变为卷积的变换.

由于 $(\mathscr{S})$ 在 $(\mathscr{O}_M), (\mathscr{O}'_C), (\mathscr{S}')$ 中稠密 [空间 $(\mathscr{O}_M), (\mathscr{O}'_C)$, 或 $(\mathscr{S}')$ 中的任意元素均为 $(\mathscr{S})$ 中序列的极限], 且所考虑的运算均连续, 于是为保证 $\mathscr{F}$ 在定理叙述中的预设条件下互换乘积和卷积, 我们只需证明 $\mathscr{F}$ 将 $(\mathscr{O}_M)$ 和 $(\mathscr{O}'_C)$ 互换且将 $(\mathscr{O}_M)$ 中的收敛序列变成 $(\mathscr{O}'_C)$ 中的收敛序列, 而反之亦然.

但这种互换性是显然的. $a)$ 若 $S \in (\mathscr{O}_M)$, 则 S 是一个多项式与一个可积函数的乘积, 故由第 7 节例 1 [公式 (7.7.3)] 可知 $\mathscr{F}S$ 是某一个有界函数的导数之和, 它因此是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界广义函数. 而 S 的任意导数均有同样的形式, 于是 $\mathscr{F}S$ 与任意多项式的乘积在 $\mathbb{R}^n$ 上有界, 从而 $\mathscr{F}S$ 为在无穷远处速降的广义函数, 也即属于 $(\mathscr{O}'_C)$. $b)$ 若现在 $T \in (\mathscr{O}'_C)$, 则它可积 [即属于 $(\mathscr{D}'_{L^1})$], 于是由第 7 节例 4 可知 $\mathscr{F}T$ 为缓增连续函数; 而 T 与任意多项式的乘积也可积, 故 $\mathscr{F}T$ 的所有导数均为缓增连续函数, 从而 $\mathscr{F}T \in (\mathscr{O}_M)$. 由于上述证明所用的条件不仅对单个广义函数成立, 而且对收敛序列也成立, 因此 $\mathscr{F}$ 将 $(\mathscr{O}_M)$ 中的收敛序列变成 $(\mathscr{O}'_C)$ 中的收敛序列, 且反之亦然. 这就是所要证明的.

请注意我们并没有真正完成上述定理的证明. 我们仅针对收敛序列, 具有有界或可数基的滤子证明了 $(\mathscr{O}_M)$ 和 $(\mathscr{O}'_C)$ 之间的同构 $\mathscr{F}$ 的连续性, 而事实上对于任意收敛的滤子也有同样的结论; 这里我们不补全这个有些复杂的证明.

评注. 在一些别的条件下, 乘积和卷积也可以互换. 例如:

若 $T \in (\mathscr{D}'_{L^p})$, $S \in (\mathscr{D}'_{L^q})$ $(1 \leqslant p,\ q \leqslant 2)$, 则 $S*T$ 的 Fourier 变换是一个函数且为函数 $\mathscr{F}S$ 和 $\mathscr{F}T$ 的乘积.

事实上, 由于 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 和 $(\mathscr{D}'_{L^q})$ 包含于 $(\mathscr{D}'_{L^2})$, 故只需在 $p = q = 2$ 时证明上述结论成立. 我们可在 $(\mathscr{D}'_{L^2})$ 中用序列 S_j, T_j 来逼近 S, T, 其中 S_j, T_j 有紧支集. 但一方面, 卷积 $S_j * T_j$ 在 $(\mathscr{D}'_{L^\infty})$ 中收敛, 因此也在 $(\mathscr{S}')$ 中收敛, 从而我们可以断言 $\mathscr{F}(S*T)$ 为 $\mathscr{F}(S_j * T_j)$ 在 $(\mathscr{S}')$ 中的极限, 它因而也是 $\mathscr{F}(S_j * T_j)$ 在 $(\mathscr{D}')$ 中的极限. 而另一方面, 所有 $\mathscr{F}S_j$ 和 $\mathscr{F}T_j$ 在局部上均为 L^2 类 (第 7 节例 4), 且在局部上依 L^2 范数分别趋于 $\mathscr{F}S$ 和 $\mathscr{F}T$, 从而 $(\mathscr{F}S_j)(\mathscr{F}T_j)$ 也在局部上依 L^1 范数趋于 $(\mathscr{F}S)(\mathscr{F}T)$, 进而它们在 $(\mathscr{D}')$ 中亦如此. 故必有 $\mathscr{F}(S*T) = (\mathscr{F}S)(\mathscr{F}T)$.

可注意 $S*T$ 属于 $(\mathscr{B}')$, 且其 Fourier 变换 $f(y)$ 是一个函数, 等于一个多项式与一个可积函数的乘积. 反过来, 若 $f(y)$ 是一个这样的函数, 我们可以记 $f = gh$, 其中 f, g 为多项式与 L^2 类函数的乘积; 故 $g = \mathscr{F}S$ 且 $h = \mathscr{F}T$, 其中 S, T 属于 $(\mathscr{D}'_{L^2})$, 从而由前述可知

$$\mathscr{F}(S*T) = gh = f\,.$$

于是我们有:

缓增测度 μ (参见定理 7) 是一个函数当且仅当它是 $(\mathscr{D}'_{L^2})$ 中的两个广义函数的卷积的 Fourier 变换.

例子　1° 我们知道 [公式 (7.5.1)] 函数 $\exp(i\pi x^2)$ $(n=1)$ 同时属于 $(\mathscr{O}_M)$ 和 $(\mathscr{O}'_C)$. 由其 Fourier 变换可知它不可能属于上述两空间当中的一个而不属于另外一个:

$$\mathscr{F}\left[\exp(i\pi x^2)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\pi x^2 - 2i\pi xy)\,dx = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\exp(-i\pi y^2)\,. \tag{7.8.7}$$

对任意 y, 公式中的积分在通常意义下条件收敛. 由第 7 节例 3 [函数 $\exp(i\pi x^2)$ 为有界函数] 可知, 该积分也在 $(\mathscr{S}'_y)$ 中收敛, 并且对任意的 y, 上述积分依公式 (7.7.9) 收敛 $[\exp(i\pi x^2) \in (\mathscr{D}'_{L^1})]$.

2° 我们已经知道 $(1+r^2)^{-m}$ 的 Fourier 变换为广义函数 L_m [公式 (7.7.23)]. 又显然有 $(1+r^2)^{-m} \in (\mathscr{O}_M)$ 且 $(1+r^2)^{-p}(1+r^2)^{-q} = (1+r^2)^{-(p+q)}$, 由此可重新推出 $L_m \in (\mathscr{O}'_C)$ 且 $L_p * L_q = L_{p+q}$ [公式 (6.8.5)].

3° 我们已知道 (除了 m 的例外值) $\mathscr{F}(\mathrm{Pf.}\, r^m)$ 正比于 $\mathrm{Pf.}\, r^{-(m+n)}$ [公式 (7.7.13)]. 若 $\Re p < -\frac{n}{2}$ 且 $\Re q < -\frac{n}{2}$, 则 $\mathrm{Pf.}\, r^p$ 和 $\mathrm{Pf.}\, r^q$ 属于 $(\mathscr{D}'_{L^2})$, 故有乘积 – 卷积互换公式:

$$\mathscr{F}\left[(\mathrm{Pf.}\, r^p) * (\mathrm{Pf.}\, r^q)\right] = \mathscr{F}(\mathrm{Pf.}\, r^p)\mathscr{F}(\mathrm{Pf.}\, r^q)\,, \tag{7.8.8}$$

这重新给出 Frostman 先生和 Marcel Riesz 先生① 在势论中曾用的 (易直接证明的) 经典卷积公式. 当 $0 > \Re p > -\infty$, $0 > \Re q > -\infty$, $\Re(p+q) < -n$ 时, 上述互换公式依然成立, 虽然此时它并不能被纳入上面所介绍的一般规则, 另外我们甚至可以在更为一般的情形对该公式赋予一个意义.

4° Marcel Riesz 先生的广义函数 Z_l (第 2 章第 3 节例 4) 彼此之间可以做卷积:

$$Z_p * Z_q = Z_{p+q} \quad [(6.5.19)]\,,$$

而这在于支集特殊的定向而不在于无穷远处的递降性. 同样地, 仅仅对于适当的 p, q (比如说 $\Re p < 0$, $\Re q < 0$), 这些卷积公式才能被 $\mathscr{F}$ 变成乘积公式.

① Frostman [1], p. 29, 以及 M. Riesz [4].

谱为紧集的广义函数. 广义 Paley – Wiener 定理[1] 设 $F(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 且可被延拓成关于复变量 $z=x+i\xi$ $(x,\xi\in\mathbb{R}^n)$ 的整函数 $F(z)$. 若

$$\limsup_{|z|\to+\infty}\frac{\log|F(z)|}{|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|}\leqslant 2\pi C\,, \tag{7.8.9}$$

则称 F(z) 为阶不大于 $2\pi C$ 的指数型.

我们可将经典的 Paley – Wiener 定理推广如下:

定理 16. *为使广义函数 $U_x\in(\mathscr{S}')_x$ 的 Fourier 变换 $V_y=\mathscr{F}U_x$ 具有紧支集且其支集包含于立方体 $Q_C:|y_1|\leqslant C,\ |y_2|\leqslant C,\ldots,|y_n|\leqslant C$, 当且仅当 U 是一个连续函数 $F(x)$, 且可被延拓成关于复变量 $z=x+i\xi$ 的阶不大于 $2\pi C$ 的指数型整函数.*

1° 条件必要. 若 V_y 的支集包含在立方体 Q_C 中, 则它为支撑在 Q_C 的任意小邻域 $Q_{C+\varepsilon}$ 上的测度的导数的有些和 (第 3 章定理 26; 我们也可利用不是那么初等的定理 34 而假设测度的支集均包含在 Q_C 本身当中; 但这在后面并没有什么用处):

$$V_y=\mathscr{F}U_x=\sum_{|p|\leqslant m}D_y^p(\mu_p)_y\,. \tag{7.8.10}$$

但 $F_p=\overline{\mathscr{F}}\mu_p=\iint\cdots\int\exp(2i\pi x.\,y)\,d\mu_p(y)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的有界函数, 且它还可被延拓成阶不大于 $2\pi(C+\varepsilon)$ 的指数型解析函数. 又 U_x 为多项式与 F_p 的乘积之和; 故对任意 ε, 它为阶不大于 $2\pi(C+\varepsilon)$ 的指数型解析函数, 因此也为阶不大于 $2\pi C$ 的指数型解析函数, 且在 $\mathbb{R}^n$ 上缓增. 它在 $\mathbb{R}^n$ 上的增长次数不大于 V 的阶 m.

2° 条件充分. *a*) 当 $U_x\in(\mathscr{S})_x$ 时, 定理的结论已知, 此时可认为已经完成证明.

b) 设 $U_x\in(\mathscr{O}_M)_x$. 若 $\psi(y)\in(\mathscr{D}_{Q_\varepsilon})_y$, 则其支集包含在立方体 Q_ε 中, 且 $\overline{\mathscr{F}}\psi=\varphi$ 属于 $(\mathscr{S})$. 由条件的必要性可知 φ 还是阶不大于 $2\pi\varepsilon$ 的指数型整函数. 故 $\varphi U\in(\mathscr{S})$ 为阶不大于 $2\pi(C+\varepsilon)$ 的指数型整函数. 根据 (*a*), 它的 Fourier 变换 $V_y*\psi$ 的支集包含在 $Q_{C+\varepsilon}$ 中, 又 V 为其正则化的极限, 故它的支集包含在 Q_C 中.

c) 最后假设 $U_x\in(\mathscr{S}')$. 作为 $(\mathscr{D}')$ 中广义函数, 它被假设等于一个函数 $F(x)$, 并且可以被解析延拓成阶不大于 $2\pi C$ 的指数型整函数 $F(z)$; 但我们不知道缓增广义函数 $F(x)$ 是否就是一个通常意义下的缓增连续函数. 对任意的 $\varphi(x)\in(\mathscr{D}_{Q_\eta})_x$, 令 $\mathscr{F}\varphi=\psi(y)$, 则正则化 $G=F*\varphi$ 属于 $(\mathscr{O}_M)_x$ (定理 9 及其之后的相关结论); 根据 (7.8.9), 对任意 $\varepsilon>0$, 正则化 G 在复数 z 处的值

$$G(z)=\iint\cdots\int_{Q_\eta}F(z-t)\varphi(t)\,dt \tag{7.8.11}$$

满足

$$|G(z)|\leqslant A(\varepsilon)\exp\left|2\pi(C+\varepsilon)(|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|+n\eta)\right|\iint\cdots\int|\varphi(t)|\,dt\,, \tag{7.8.12}$$

这就证明了正则化 G 是一个阶不大于 $2\pi C$ 的指数型整函数.

[1] Paley – Wiener [1], p. 12. 该论文仅对属于 L^p 的函数给出了证明.

于是由 $b)$ 可知 G 的 Fourier 变换 $V_y\psi(y)$ 的支集包含在立方体 Q_C 中. 又由 $a)$ 可知 ψ 为 $(\mathscr{S})$ 中阶不大于 $2\pi\eta$ 的任意指数型整函数, 故我们可选取 φ 使得 ψ 在任意给定点处不为 0, 因此 V_y 的支集也包含在 Q_C 中 [且 $U_x \in (\mathscr{O}_M)_x$].

评注. 1° 设函数 $\beta(x) \in (\mathscr{S})$ 使得 $\gamma = \mathscr{F}\beta$ 在 Q_C 的邻域上等于 1. 则对任意的阶不大于 $2\pi C$ 的指数型函数 $F(x) \in (\mathscr{S}')$, 由 $\mathscr{F}(F * \beta) = (\mathscr{F}F) * \gamma = \mathscr{F}F$ 可得

$$F * \beta = F. \tag{7.8.13}$$

2° 记 (Exp. C) 为 $(\mathscr{O}_M)$ 中阶不大于 $2\pi C$ 的指数型整函数所构成的向量子空间. 若 $F_j \in$ (Exp. C) 在 $(\mathscr{S}')$ 中收敛, 则它们也在 $(\mathscr{O}_M)$ 中收敛 [由于 $\mathscr{F}F_j$ 在 $(\mathscr{S}')$ 中收敛, 故它们在 $(\mathscr{O}'_C)$ 中收敛]; 平移 $\tau_k F_j$ 具有同样的性质, 且当 $k = h + ih'$ 跑遍 $\mathbb{C}$ 的一个紧子集时上述收敛是一致的. 又 F_j 的极限 F 也属于 (Exp. C), 从而 (Exp. C) 为 $(\mathscr{S}')$ 和 $(\mathscr{O}_M)$ 的闭子空间.

同样地, 若 $F_j \in$ (Exp. C) 在 $(\mathscr{O}'_C)$ 中收敛, 则它们在 $(\mathscr{S})$ 中收敛, 且其平移 $\tau_k F_j$ 在 k 跑遍 $\mathbb{C}$ 的一个紧子集时为一致收敛; 极限 F 属于 (Exp. C), 从而 (Exp. C)$\cap(\mathscr{S})$ 为 $(\mathscr{O}'_C)$ 和 $(\mathscr{S})$ 的闭子空间.

3° 记 (Exp. $\mathscr{S}$) 和 (Exp. $\mathscr{O}_M$) 分别为由 $(\mathscr{S})$ 和 $(\mathscr{O}_M)$ 中 (阶为任意的) 指数型整函数所构成的向量子空间, 并且在其上赋予最细的局部凸拓扑使得在由它们的阶有界的指数型函数组成的子空间上所诱导的就是 $(\mathscr{S})$ 或 $(\mathscr{O}_M)$ 的拓扑. 则 $\mathscr{F}$ 和 $\overline{\mathscr{F}}$ 为 (Exp. $\mathscr{S}$) 和 $(\mathscr{D})$ 之间以及 (Exp. $\mathscr{O}_M$) 和 $(\mathscr{E}')$ 之间的互逆的拓扑向量空间同构.

4° 我们可以针对 $F \in$ (Exp. $\mathscr{O}_M$) 的谱与其沿不同方向的增长性之间的关系做一个更为具体的研究. 由此可以推广那些关于 $F \in L^p$ 的已知结果①.

§9. 非负型广义函数

非负型函数 称 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $f(x)$ 为非负型函数②并将之记作 $f \gg 0$, 如果对任意的 $x_1, x_2, \ldots, x_l \in \mathbb{R}^n$ 以及任意的复数 $z_1, z_2, \ldots, z_l$, 均有

$$\sum_{j,k} f(x_j - x_k) z_j \bar{z}_k \geqslant 0. \tag{7.9.1}$$

依次取 $l = 1, 2$ 并利用 Hermite 型的性质可知, 一方面 $\bar{f}(x) = f(-x)$, 这可写成

$$\bar{f} = \check{f}, \quad \text{也即} \quad \tilde{f} = f \quad (f \text{ 具有 Hermite 对称性}), \tag{7.9.2}$$

而另外一方面,

$$f(0) \geqslant 0 \quad \text{且} \quad |f(x)| \leqslant f(0), \tag{7.9.3}$$

因此非负型函数为 $\mathbb{R}^n$ 上的有界函数.

① 参见 Pólya – Plancherel [1], Martineau [1].
② 参见 Bochner [1], p. 74 – 82, 以及 A. Weil [1], p. 56 – 60.

记 μ 为由位于点 x_j 的质量 z_j 所构成的离散测度; 则公式 (7.9.1) 可以写成

$$\iint\cdots\int\iint\cdots\int f(x-\xi)\,d\mu(x)\,d\bar{\mu}(\xi)\geqslant 0\,. \tag{7.9.4}$$

我们知道, 在由支集为紧集的测度所组成的空间上 (将之看成是连续函数空间的对偶, 且在连续函数空间上赋予在任意紧集上一致收敛的拓扑), 当我们仅限于考虑收敛的序列时 (参见第 3 章定理 11 和第 4 章定理 6), 张量积 $(\mu,\nu)\to\mu_x\otimes\nu_x$ 为弱连续运算. 由于支集为紧集的任意测度为离散测度列的弱极限 (连续函数的积分可表示成 Riemann 和), 它同时也是 $(\mathscr{D})$ 中函数列的弱极限 (测度 μ 的正则化), 于是对支集为紧集的任意测度, 若 (7.9.1) 成立或者对任意 $\varphi\in(\mathscr{D})$, 均有

$$\iint\cdots\int\iint\cdots\int f(x-\xi)\varphi(x)\bar{\varphi}(\xi)\,dx\,d\xi\geqslant 0\,, \tag{7.9.5}$$

则 (7.9.4) 成立. 特别地, 由此可知 (7.9.1) 和 (7.9.5) 等价. 借助公式 (7.6.10) 的记号, 我们可将前面的公式写成

$$\iint\cdots\int\iint\cdots\int f(x+\xi)\varphi(x)\tilde{\varphi}(\xi)\,dx\,d\xi\geqslant 0\,,\quad \text{也即}\ f.(\varphi*\tilde{\varphi})\geqslant 0\,. \tag{7.9.6}$$

非负型广义函数 我们因此称广义函数 T 为非负型广义函数并将之记作 $T\gg 0$, 如果对任意 $\varphi\in(\mathscr{D})$, 均有

$$T.(\varphi*\tilde{\varphi})\geqslant 0\,. \tag{7.9.7}$$

立刻可知非负型广义函数在 $(\mathscr{D}')$ 中构成了一个闭子集, 后者甚至还为弱闭集.

可见, 若 $T\gg 0$, 则 $\overline{T},\check{T},\widetilde{T}$ 亦如此. 若在 (7.9.7) 中将 T 换成 $\check{T}$, 则可知该公式将被换成下述公式:

$$\mathrm{Tr.}(T*\varphi*\tilde{\varphi})\geqslant 0\,. \tag{7.9.8}$$

定理 17. *所有的非负型广义函数 T 均具有 Hermite 对称性:*

$$\overline{T}=\check{T}\quad\text{即}\quad\widetilde{T}=T\,. \tag{7.9.9}$$

且为 $\mathbb{R}^n$ 上的有界广义函数, 也就是说 $T\in(\mathscr{B}')$.

事实上, 对任意的 $\alpha\in(\mathscr{D})$, 正则化函数 $T*\alpha*\tilde{\alpha}$ 满足 (7.9.8), 从而为非负型连续函数. 它因此满足 Hermite 对称性. 如果让 α 在 $(\mathscr{E}')$ 的拓扑下趋于 Dirac 测度 δ, 则通过取极限 (并应用卷积的连续性定理, 第 6 章定理 5) 可导出公式 (7.9.9).

顺便指出, 我们可以修改定义 (7.9.7) 而说: 为使 T 为非负型广义函数, 当且仅当它的所有双正则化 $T*\varphi*\tilde{\varphi}$ $[\varphi\in(\mathscr{D})]$ 均为非负型连续函数.

另外, 根据 (7.9.3), 任意非负型函数 $T*\alpha*\tilde{\alpha}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界. 但对任意 $\alpha, \beta \in (\mathscr{D})$,

$$(7.9.10)\qquad 4(\alpha*\beta) = (\alpha+\tilde{\beta})*(\tilde{\alpha}+\beta) - (\alpha-\tilde{\beta})*(\tilde{\alpha}-\beta) + i(\alpha+i\tilde{\beta})*(\tilde{\alpha}-i\beta) - i(\alpha-i\tilde{\beta})*(\tilde{\alpha}+i\beta)\,,$$

故 $T*\alpha*\beta$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的有界函数. 于是由第 6 章 (更为精细形式下的) 定理 25. 2° 可知 $T*\alpha \in (\mathscr{B}')$, 因此 $T \in (\mathscr{B}')$. 这就是所要证明的.

值得一提的是, 若 T 在原点邻域内是一个连续函数, 则公式

$$(7.9.11)\qquad |T*\alpha*\tilde{\alpha}| \leqslant \mathrm{Tr.}\,(T*\alpha*\tilde{\alpha}) = \check{T}.\,(\alpha*\tilde{\alpha})$$

表明, 若让 α 和 $\tilde{\alpha}$ 在 $(\mathscr{E}')$ 中趋于 δ, 则 T 是一个在 $\mathbb{R}^n$ 上可被它的迹界住的函数 (第 53 页评注 2°, 其中取 $p=+\infty$). 我们因此可以说

在原点邻域内为连续函数的非负型广义函数为 $\mathbb{R}^n$ 上的非负型连续函数.

我们甚至可以证明下述结论:

若由非负型广义函数组成的一个集合在 $\mathbb{R}^n$ 的某个原点邻域 Ω 上为 $(\mathscr{D}'_\Omega)$ 中的有界集, 则该集合在 $(\mathscr{B}')$ 中有界.

对于趋于 0 的非负型广义函数 T_j 也有同样的性质.

非负型广义函数与非负型测度　定理 18. (Bochner①) *广义函数 T 为非负型当且仅当它是一个缓增非负测度的 Fourier 变换.*

1° 设 $T=V_y$ 为非负型广义函数. 它在 $\mathbb{R}^n$ 上有界, 从而属于 $(\mathscr{S}')_y$. 它因此是一个广义函数 $U_x \in (\mathscr{S}')_x$ 的 Fourier 变换 $V_y = \mathscr{F}U_x$. 通过取极限可知对 $\varphi \in (\mathscr{D})_y$ 成立的公式 (7.9.7) 对 $\varphi = v(y) \in (\mathscr{S})_y$ 也成立 [根据定理 3, 空间 $(\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{S})$ 中稠密]. 于是借助公式 (7.6.10) 和定理 15 可知, 对任意 $u \in (\mathscr{S})_x$, 我们将有:

$$(7.9.12)\qquad U.\,u\bar{u} \geqslant 0\,.$$

由此我们将推出

$$(7.9.13)\qquad U(\psi) \geqslant 0\,,\quad \text{其中 } \psi \in (\mathscr{S})_x \text{ 且 } \psi \geqslant 0\,.$$

又 $(\mathscr{D})$ 在 $(\mathscr{S})$ 中稠密, 因此只需对 $\psi \in (\mathscr{D})_x$ 证明上述结论.

在 $(\mathscr{D})_x$ 中, 不是所有非负函数 ψ 均形如 $u\bar{u}$, 这是因为至少当 $n>1$ 时, 函数 $\sqrt{\psi}$ 在 ψ 的零点的邻域内不可微. 但 ψ 却为形如 $u\bar{u}$ 的函数在 $(\mathscr{D})$ 中的极限; 事实上, 若 $\alpha \in (\mathscr{D})$ 非负且在 ψ 的支集的邻域上等于 1, 则

$$(7.9.14)\qquad \psi = \lim_{\varepsilon>0,\varepsilon\to 0} \alpha^2(\psi+\varepsilon)\,,$$

① Bochner [1], p. 76 (定理 23), A. Weil [1], p. 122. 经典的 Bochner 定理讨论非负型函数.

而右边恰为形如 $u\bar{u}$ 的函数, 其中

$$u=\alpha\sqrt{\psi+\varepsilon}\in(\mathscr{D}). \tag{7.9.15}$$

于是由 (7.9.12) 可导出 (7.9.13). 这就证明了 $U\geqslant 0$, 进而根据第 1 章定理 5 和第 7 章定理 7 可知 U 是一个缓增非负测度 μ.

2° 反过来, 如果 $V=\mathscr{F}\mu$, 其中 $\mu\geqslant 0$, 那么 $U=\mu$ 满足 (7.9.13), 因此更是满足 (7.9.12), 从而 V 满足 (7.9.17) 且为非负型.

与此同时我们还证明了在 $(\mathscr{S})$ 的拓扑下, 形如 $v*\tilde{v}\,[v\in(\mathscr{D})]$ 的函数在由 $(\mathscr{S})$ 中非负型函数 φ 所组成的集合中稠密; 且若 $T\gg 0$, 则我们不仅有 (7.9.7), 而且还有

$$T(\varphi)\geqslant 0,\quad \text{其中 } \varphi\in(\mathscr{S}) \text{ 且 } \varphi\gg 0. \tag{7.9.16}$$

我们因此有两个类似的定义:

$$\begin{cases} T\geqslant 0 & \text{若对任意 } \varphi\in(\mathscr{D}),\ \text{当 } \varphi\geqslant 0 \text{ 时, 均有 } T(\varphi)\geqslant 0, \\ T\gg 0 & \text{若对任意 } \varphi\in(\mathscr{D}),\ \text{当 } \varphi\gg 0 \text{ 时, 均有 } T(\varphi)\geqslant 0. \end{cases} \tag{7.9.17}$$

上述证明并不假设已知经典情形的 Bochner 定理.

在经典情形, 测度 $\mu=\overline{\mathscr{F}}V$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可积, 且反之亦然; 我们有

$$\mathrm{Tr}.\,V=\iint\cdots\int d\mu\geqslant 0. \tag{7.9.18}$$

当 μ 不可积时, 需要将右式看成是 $+\infty$. 因此, 若 T 为非负型广义函数但不是一个连续函数, 则可令

$$\mathrm{Tr}.\,T=+\infty. \tag{7.9.19}$$

非负型广义函数上的运算　定理 19. *如果 $\alpha\in(\mathscr{E}^m)$ 和 $T\in(\mathscr{D}'^m)$ 均为非负型, 则它们之间的乘积 αT 也为非负型.*

若 T 为连续函数, 则上述该性质是经典的; 这是因为 α 和 T 均为 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可积测度的 Fourier 变换, 并且

$$\mathscr{F}(\alpha T)=(\mathscr{F}\alpha)*(\mathscr{F}T) \tag{7.9.20}$$

也为 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可积测度.

若 $T\in(\mathscr{D}'^m)$, 则其正则化 $T_j=T*\beta_j*\tilde{\beta}_j\ [\beta_j\in(\mathscr{D})]$ 均为非负型连续函数, 于是 αT_j 亦如此. 若让 β_j 趋于 δ 使得 T_j 在 $(\mathscr{D}'^m)$ 中弱收敛于 T (第 6 章定理 11), 则 αT_j 也在 $(\mathscr{D}'^m)$ 中弱收敛于 αT, 从而 $\alpha T\gg 0$.

推论. *任意非负型广义函数 T 为属于 $(\mathscr{D})$ 的非负型函数在 $(\mathscr{S}')$ 中的极限.*

事实上, 若 $\alpha \in (\mathscr{D})$ 为非负型, 在原点处取值 1, 且当 $j \to +\infty$ 时 $\alpha_j(x) = \alpha(x/j)$ 在下述意义下趋于 1: $\alpha_j - 1$ 在任意紧集上一致趋于 0 且在 $\mathbb{R}^n$ 上有界, 而它们的各阶导数在 $\mathbb{R}^n$ 上一致趋于 0 [从而 α_j 在 $(\mathscr{B}_c)$ 中趋于 1, 参见第 146 页]. 于是若 $T \gg 0$, 则 $T \in (\mathscr{B}')$, 而 $\alpha_j T \gg 0$ 在任意具有紧闭包的开子集上趋于 T, 且它们还在 $\mathbb{R}^n$ 上有界. 故它们在 $(\mathscr{S}')$ 中 [因而也在 $(\mathscr{B}'_c)$ 中, 参见第 146 页] 趋于 T.

随后由于 $\alpha_j T$ 为它在 $(\mathscr{D})$ 中的非负型双正则化的极限, 该结论由此得证.

定理 20. 1° 若 $S \in (\mathscr{D}'_{L^p})$, $T \in (\mathscr{D}'_{L^q})$ 为非负型 $\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geqslant 0\right]$, 则 $S * T \gg 0$.

2° 对任意的 $S \in (\mathscr{D}'_{L^2})$, 均有 $S * \widetilde{S} \gg 0$①; 在 $(\mathscr{S}')$ 的拓扑下, 这种形式的广义函数的全体构成了非负型广义函数集的一个稠密的子集. 为使一个非负型广义函数形如 $S * \widetilde{S}$ $[S \in (\mathscr{D}'_{L^2})]$ 当且仅当该广义函数的 Fourier 变换是一个函数.

1° 若 S 和 T 均为具有紧支集的非负型广义函数, 则显然 $S * T \gg 0$, 这是因为

$$\mathscr{F}(S * T) = (\mathscr{F}S)(\mathscr{F}T) \tag{7.9.21}$$

是一个非负函数.

若 $S \in (\mathscr{D}'_{L^p})$ 且 $T \in (\mathscr{D}'_{L^q})$ $[p < +\infty, q < +\infty]$, 则我们可用 $(\mathscr{E}')$ 中的非负型广义函数 $S_j = \alpha_j S$ 和 $T_j = \alpha_j T$ 来逼近 S 和 T (参见定理 19 的推论), 这些广义函数分别在 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ 和 $(\mathscr{D}'_{L^q})$ 中趋于 S 和 T. 又 $S_j * T_j$ 为非负型且在 $(\mathscr{D}'_{L^r})$ 中趋于 $S * T$, 其中 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ (第 6 章定理 26), 故 $S * T \gg 0$. 当 $p = +\infty$ 或 $q = +\infty$ 时, 需要对该证明做一些修正.

2° 显然 $S * \widetilde{S} \gg 0$, 而这基于定义 (7.9.8) 本身以及

$$\operatorname{Tr.}(S * \widetilde{S} * \varphi * \tilde{\varphi}) = \iint \cdots \int |S * \varphi|^2 \, dx \geqslant 0 . \tag{7.9.22}$$

至于 $S * \widetilde{S}$ 在由非负型广义函数 T 所组成的集合中稠密这一事实, 则是源于定理 19 以及 $\alpha * \tilde{\alpha}$ $[\alpha \in (\mathscr{D})]$ 在由 $(\mathscr{S})$ 中非负型函数 β 所组成的集合中的稠密性.

根据公式 (7.6.10) 以及关于 $(\mathscr{D}'_{L^2})$ 的定理 15 可知, 为使非负型广义函数 T 形如 $S * \widetilde{S}$ $[S \in (\mathscr{D}'_{L^2})]$, 当且仅当它的 Fourier 变换是一个多项式与 L^2 中函数乘积的模的平方, 也就是说是一个函数 (根据 Bochner 定理, 该函数必然非负且为缓增).

非负型广义函数的结构 公式 (2.3.20) 中的所有广义函数 L_l 均为非负型, 这是因为它们的 Fourier 变换均非负 [公式 (7.7.23)]. 于是若 $T \gg 0$, 则 $L_l * T \gg 0$.

由此可见, 对任意的 $T \gg 0$, 满足

$$\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k S = T$$

的缓增广义函数 S 也为非负型 [这里 $\mathscr{F}S = (1 + r^2)^{-k} \mathscr{F}T$].

① 若 $T \in (\mathscr{D}'_{L^1})$ 为非负型, 则 $\operatorname{Tr.}(T * S * \widetilde{S}) \geqslant 0$. 正是这个基本关系式被 Deny 先生用来推广势和能量的概念. 参见 J. DENY [1].

当 k 充分大时 S 为有界连续函数 [公式 (7.9.3)]; 并且只要它在原点邻域内连续, 它就在 $\mathbb{R}^n$ 上连续. 设 k 为整数使得存在连续函数 g 在原点邻域内满足

$$\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k g = T\,.$$

与这个 k 对应的广义函数 S 使得 $S-g$ 在原点邻域内为下列椭圆偏微分方程的解:

$$\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k (S-g) = 0\,,$$

因此 $S-g$ 是一个解析函数 (第 5 章定理 12); 故 S 是一个在原点邻域内连续的函数, 因而也在 $\mathbb{R}^n$ 上连续. 于是我们可以断言:

定理 21. 任意非负型广义函数均形如 $(1-\frac{\Delta}{4\pi^2})^k f$, 其中 k 为充分大的整数而 f 为非负型连续函数, 且反之亦然.

如果非负型广义函数 T 在原点邻域上等于 $(1-\frac{\Delta}{4\pi^2})^k g$ (其中 g 为连续函数), 那么它在 $\mathbb{R}^n$ 上等于 $(1-\frac{\Delta}{4\pi^2})^k f$, 其中 f 为非负型连续函数.

另外, 我们可将第 202 页中所叙述的一个命题推广如下:

定理 22. 如果非负型广义函数 T 在原点邻域上是一个 $2k$ 阶连续可微函数, 则它在整个空间 $\mathbb{R}^n$ 上亦如此.

为此设 P 是一个次数为 $2k$ 的齐次多项式求导算子使得其 Fourier 变换 $Q=\mathscr{F}P$ 为非负多项式. 则导数 $P*T$ 为非负型广义函数, 这是因为它的 Fourier 变换 $Q\mathscr{F}T$ 为非负; 它因此是一个在原点邻域内连续的函数, 故在 $\mathbb{R}^n$ 上连续. 由于次数为 $2k$ 的任意齐次多项式可表示成非负多项式 Q_j 的有限线性组合, 故 T 的所有 $2k$ 阶导数均为 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数. 这就是所要证明的.

我们不知道将 $2k$ 换成 $2k+1$ 后上述性质是否依然成立.

例子 1° 当实数 $m>-n$ 时, 函数 r^m 为非负. 因此广义函数

$$\frac{\mathrm{Pf.}\, r^{-(m+n)}}{\Gamma\left(-\frac{m}{2}\right)}$$

为非负型 [当 $m=0,+2,+4,\ldots$ 时仅得 $(-\Delta)^k\delta$ 为非负型]. 当 $2k<m<2(k+1)$ 时

$$(-1)^{k+1}\,\mathrm{Pf.}\, r^{-(m+n)}$$

也为非负型. 相反 $\pm\mathrm{Pf.}\, r^{-(n+2k)}$ 均不是非负型.

2° 现在考虑广义函数 $U=\mathrm{Pf.}\, r^{-(m+n)}$ $(m>0)$. 它们均不是非负测度, 故其 Fourier 变换不为非负型. 另外, 这些 Fourier 变换均与函数 r^m 成正比, 它们在原点邻域内连续但在 $\mathbb{R}^n$ 上无界. 假设 $2k\leqslant m<2(k+1)$. 若 φ 的所有阶不大于 $2k$ 的导数在原点处为零, 则根据公式 (2.3.5) 可知记号 Pf. 多余. 于是若 u 的所有阶不大于 $2k$ 的导数在原点处为零, 则 $\mathrm{Pf.}\, r^{-(m+n)}.(u\bar{u})\geqslant 0$; 且显然 $\Delta^{k+1}\delta.(u\bar{u})\geqslant 0$.

故我们可以说 Fourier 变换 $V = \mathscr{F}U$ [公式 (7.7.13) 和 (7.7.14)] 为条件非负型. 若函数 $\varphi \in (\mathscr{S})$ 的所有阶不大于 k 的矩均为零, 则我们将有 $V.(\varphi * \tilde{\varphi}) \geqslant 0$.

将 φ 换成一个具有紧支集的测度 μ, 则上述性质等价于说: 若

$$\iint \cdots \int x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}\, d\mu(x) = 0\,, \tag{7.9.23}$$

其中 $k_\nu \geqslant 0$ 为任意整数且满足 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n \leqslant k$, 那么

a) 当 $2k \leqslant m \leqslant 2(k+1)$ 时, 成立

$$(-1)^{k+1} \iint \cdots \int |x - \xi|^m\, d\mu(x)\, d\mu(\xi) \geqslant 0\,, \tag{7.9.24}$$

[当 $m = 2k$ 时, 可知上式显然等于 0];

b) 我们有

$$(-1)^k \iint \cdots \int |x - \xi|^{2k} \log \frac{1}{|x - \xi|}\, d\mu(x)\, d\mu(\xi) \geqslant 0\,. \tag{7.9.25}$$

而当 $k = 0$ 时 *b*) 给出了势论中的一个熟知性质 ①.

§10. 在偏微分方程与积分方程中的应用 ②

卷积方程的 Fourier 变换 考虑类似于 (6.10.1) 的方程

$$A * T = B\,, \tag{7.10.1}$$

其中 A, T, B 为 n 维空间 X^n 上的广义函数.

为了能够对这个方程施行 Fourier 变换, 我们必须假设 B 为缓增广义函数, 并仅限于寻求缓增广义函数解 T. 但我们也可以拓广所考虑的方程的类型: 出现在方程 (7.10.1) 中的 A 将是一个速降广义函数 [也即属于 $(\mathscr{O}'_C)$] 而不再像 (6.10.1) 中那样必然具有紧支集; 则对任意的 $T \in (\mathscr{S}')$, 上述左式总有意义.

设 $\mathscr{A} = \mathscr{F}A$, $\mathscr{T} = \mathscr{F}T$, $\mathscr{B} = \mathscr{F}B$; 则 $\mathscr{A}, \mathscr{T}, \mathscr{B}$ 为空间 Y^n 上的广义函数. 上述方程 (7.10.1) 完全等价于

$$\mathscr{A}\mathscr{T} = \mathscr{B}\,. \tag{7.10.2}$$

我们现在有一个乘积方程; 而所提的问题则变成一个除法问题 (第 5 章第 4 节和第 5 节), 由此可见除法问题的重要性. 这里 $\mathscr{T}, \mathscr{B}$ 为缓增广义函数 [即属于 $(\mathscr{S}')$], 而 $\mathscr{A}$ 为缓增无穷可导函数 [即属于 $(\mathscr{O}_M)$].

当然, 我们也可以考虑多个未知广义函数的卷积方程组.

---

① 即便对任意 k, 该性质肯定也不新. Marcel Riesz 先生告诉我他很早就知此结论, 但从未发表.

② 我们这里仅给出了几个应用. 但整个现代偏微分方程理论都要用到缓增广义函数的 Fourier 变换. 参见, 比如说 Hörmander [3]. 值得一提的还有在 Arsac [1] 中给出的在经典物理中的应用, 以及在 Schwartz [17] 和 Wightman [1] 中给出的在粒子或场的量子理论中的应用.

齐次卷积方程 这里我们将假设 $B=0$, $\mathscr{B}=0$.

1° 若 $\mathscr{A}$ 在 Y^n 上永远不为零, 则由 $\mathscr{A}\mathscr{T}=0$ 可导出 $\mathscr{T}=0$, 且方程 (7.10.1) 的唯一缓增广义函数解为零解.

例如, 齐次椭圆偏微分方程

$$\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k T=\left(\delta-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{*k} * T=0 \tag{7.10.3}$$

唯一的缓增广义函数解为零, 这是因为

$$\mathscr{F}\left(\delta-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{*k}=(1+r^2)^k$$

永远不为零. 相反, 可注意到该方程有无穷多个不是缓增广义函数的解, 而简单的 Fourier 变换不会让我们得到, 比如说指数函数解:

$$T=\exp(2\pi h.x)\,,\quad \text{其中 } h=(h_1,h_2,\ldots,h_n) \text{ 且 } |h|=1. \tag{7.10.4}$$

同样地, 齐次积分方程

$$\exp(-\pi r^2)*T=0 \tag{7.10.5}$$

没有异于 0 的缓增广义函数解, 这是因为 $\mathscr{F}[\exp(-\pi r^2)]=\exp(-\pi r^2)$ 绝不会等于零.

该方程可能没有任何非零的缓增或非缓增的广义函数解.

若相反函数 $\mathscr{A}$ 至少在 Y^n 的某点 a 处为零, 则 (7.10.2) 至少会以离散测度 $\delta_{(a)}$ 作为其解, 且 (7.10.1) 具有指数缓增广义函数解:

$$T=\overline{\mathscr{F}}(\delta_{(a)})_y=\exp(2i\pi a.x)\,. \tag{7.10.6}$$

2° 若现在函数 $\mathscr{A}$ 在 Y^n 的某个闭集 F 上为零, 则 $\mathscr{T}$ 的支集必然包含在 F 中, 从而 T 的谱包含在 F 中. 该条件远不足以来刻画 T, 但通常对应用来说已足够精确.

比如说, 对于 X^n 上的迭代 Laplace 方程或者 X^2 上的 Cauchy 方程

$$\begin{cases}\Delta^k T=0\\ \text{或 } \frac{\partial T}{\partial \bar{z}}=0 \quad [\text{公式 } (2.3.23)]\,,\end{cases} \tag{7.10.7}$$

经 Fourier 变换后的方程可写成

$$\begin{cases}(-4\pi^2 r^2)^k\mathscr{T}=0\\ \qquad \text{或 } i\pi z\mathscr{T}=0\,,\end{cases} \tag{7.10.8}$$

又由于 r^{2k} 和 z 都仅仅在原点处为零, 于是 $\mathscr{T}$ 为 Dirac 测度的导数的有限线性组合 (第 3 章定理 35), 因此 T 是一个多项式; 为缓增广义函数的多重调和函数或

全纯函数只能是多重调和多项式或全纯多项式 (经典 Picard – Liouville 定理的推广). 通过求解 (7.10.8) 来寻求多重调和多项式并不比直接求解 (7.10.7) 来得更容易. 这里还可注意到, 所有不是缓增广义函数的多重调和函数或整函数不能用 Fourier 方法处理 [而方程 (7.10.8) 不仅在 $(\mathscr{S}')$ 中而且 $(\mathscr{D}')$ 中也都只有多项式求导算子解].

更一般地, 若闭集 F 退缩成有限多个点, 则 T 为指数 – 多项式函数的有限和. 我们可以做如下推广:

定理 23. *一族卷积方程 (7.10.1) 的任意缓增广义函数解均可表示成该族方程的指数 – 多项式解的有限线性组合在 $(\mathscr{S}')$ 中的极限.*

我们将不在这里给出证明 ①.

该结论类似于第 6 章中的定理 28, 但这里 n 为任意且 $A \in (\mathscr{O}'_C)$; 不过, 我们要假设 T 为缓增广义函数且在 $(\mathscr{S}')$ 中进行逼近.

3° 若 A 有紧支集 [方程 (6.10.1)], 则 $\mathscr{A}$ 为解析函数 [定理 16 (Paley – Wiener)], 且其零点集 F 为 Y^n 中的解析流形. 若该流形没有重点, 则由第 5 章中的方法可以给出一个全解. 例如, 对于齐次椭圆偏微分方程

$$\left(1+\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k T = \left(\delta+\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{*k} * T = 0\,, \tag{7.10.9}$$

Fourier 变换给出

$$(1-r^2)^k \mathscr{T} = 0\,. \tag{7.10.10}$$

于是由公式 (5.5.2) 可知, 方程 (7.10.9) 的任意缓增广义函数解 T 均为支撑在球面 $r=1$ 上的阶不大于 k 的多层的 Fourier 变换, 且反之亦然.

同样可刻画下述迭代双曲减幅波动方程的缓增广义函数解:

$$(\Box-\lambda)^k T = (\Box-\lambda\delta)^{*k} * T = 0\,, \quad \Box = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}\,. \tag{7.10.11}$$

(当 $\lambda \neq 0$ 为实数时), 该方程的解为缓增广义函数 $\mathscr{T}$ 的 Fourier 变换, 而 $\mathscr{T}$ 为支撑在双曲面 $4\pi^2(y_n^2 - y_1^2 - \cdots - y_{n-1}^2) + \lambda = 0$ 上的阶不大于 k 的多层.

若 λ 不为实数, 则上述方程没有非零的缓增广义函数解.

但当 $\lambda = 0$ 时 (对应于通常的波动方程), 双曲面被换成在原点处有二重点的波锥面 $y_n^2 - y_1^2 - \cdots - y_{n-1}^2 = 0$. 则 $\mathscr{T}$ 在原点之外必为支撑在波锥面上阶不大于 k 的多层, 但在原点邻域内如何刻画 $\mathscr{T}$ 则是一个比较困难的问题.

4° 值得一提的是, 若 A 的支集为紧集, 则 (7.10.2) 的解 $\mathscr{T}$ 绝不会是一个函数, 这是因为其支集是一个解析流形, 因而, 比如说, 在研究常系数偏微分方程的解时, 测度或广义函数的 Fourier 变换是不可避免的.

① 大家可在 SCHWARTZ [15] 中找到这个证明.

但对于任意的广义函数 $T \in (\mathscr{D}'_{L^p})$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, 尤其是对于具有紧支集的任意广义函数, 其 Fourier 变换 $\mathscr{T}$ 是一个函数 (第 7 节例 4). 于是形如 (7.10.1) 的卷积方程 [其中 $A \in (\mathscr{E}')$] 没有属于 $(\mathscr{D}'_{L^p})$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ 的非零解, 更没有支集为紧集的解.

特别地, 若 A 是一个阶为 m 的多项式求导算子, 则 (7.10.1) 是一个阶为 m 的常系数偏微分方程. 设 S 为 m 阶连续可微超曲面, 所围成的区域为 V. 对于该方程的任意一个在通常意义下 m 阶连续可微的函数解, 若其本身及其阶不大于 $m-1$ 的导数均在 S 上为零时, 则该函数解在 V 上为零: 事实上, 在 V 上等于 f 而在 V 的余集上为 0 的函数 f' 为方程的广义函数论意义下的解 (第 5 章定理 11), 又 f' 的支集为紧集, 故 f' 为零. 这个非常简单的定理不依赖方程的类型 (椭圆, 双曲, 等等), 因为它是卷积方程的一个普适性质的一个特殊情形; 该定理也不依赖基本解的存在性. 提请大家注意, 该结论绝不能导出 f 在 V 的余集上为零. 例如, 在以 x, y 为坐标的平面 $\mathbb{R}^2$ 上, 所有形如 $f(x,y) = \alpha(x) + \beta(y)$ 的函数为方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ 的解: 若 α 和 β 本身及其各阶导数分别在区间 $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$ 上为零但在其它地方大于 0, 则 f 本身及其各阶导数在正方形 $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$ 中为零而在其它地方大于 0. 我们不知道能在什么程度上将这些性质推广到变系数偏微分方程 ①.

5° 可注意到, 若 F 为紧集, 则 T 为指数型整函数 [定理 16 (Paley - Wiener)].

因此常系数椭圆偏微分方程组的缓增广义函数解只能是指数型整函数.

大家将发现某些双曲或积分方程 (组) 的所有缓增广义函数解也具有此性质.

缓增广义函数解的这个解析性自然不能导出与非缓增广义函数解有关的任何结论; 比如说, 当 λ 不是实数时, 双曲方程 (7.10.11) 的缓增广义函数解只能等于 0, 但它的非缓增广义函数解并不都是解析函数.

对基本解的寻求 我们现在假设 $B = \delta$, $\mathscr{B} = 1$. 我们打算来求解 1 除以 $\mathscr{A}$ 这个除法问题. 如果我们能够定义缓增广义函数 $\mathscr{E} = \frac{1}{\mathscr{A}}$ 或 Pf. $\frac{1}{\mathscr{A}}$, 那么由公式 (5.3.10) 可知 $\mathscr{A}\mathscr{E} = 1$, 而 $E = \overline{\mathscr{F}}\mathscr{E}$ 将是一个缓增广义函数基本解. 现在来给几个例子.

例 1. 椭圆方程

(7.10.12) $$A_k = \left(\delta - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{*k}, \quad \mathscr{A}_k = (1 + r^2)^k.$$

根据已见过的公式 (2.3.22), 由此可立刻导出上述方程的基本解

(7.10.13) $$\mathscr{E}_k = (1+r^2)^{-k}, \quad E_k = L_{2k} = \frac{2\pi^k r^{k-\frac{n}{2}}}{(k-1)!} K_{\frac{n}{2}-k}(2\pi r) \quad [\text{参见公式 } (7.7.23)].$$

① de Rham 先生曾向我指出该性质的一个不依赖 Fourier 变换的证明, 但其证明似乎也不能应用到变系数偏微分方程. 无论如何, 该性质在前面那个很一般的形式下肯定不成立, 有反例.

所找到的基本解属于 $(\mathscr{O}'_C)$, 且是唯一的缓增广义函数基本解. 大家可注意到

$$\mathscr{E}_k = (\mathscr{E}_1)^k\,, \quad E_k = (E_1)^{*k}\,.$$

借助相似变换, 我们可由此导出与

$$A_k = (\Delta - \lambda\delta)^{*k} \quad (\lambda > 0 \text{ 为实数}) \tag{7.10.14}$$

相对应的基本解为

$$E_k = \frac{(-1)^k \lambda^{\frac{n}{4}-\frac{k}{2}} r^{k-\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}+k-1}\pi^{\frac{n}{2}}(k-1)!} K_{\frac{n}{2}-k}(\sqrt{\lambda}\, r)\,. \tag{7.10.15}$$

该基本解是复变量 λ 的全纯函数 [在 $(\mathscr{D}')$ 中取值], 且以 $\lambda = 0$ 作为它的唯一奇异点 (临界点).

另外 $(\Delta - \lambda\delta)^{*k}$ 为复变量 λ 的整函数 [在 $(\mathscr{D}')$ 中取值]. 而当 $\lambda > 0$ 时, 卷积 $(\Delta - \lambda\delta)^{*k} * E_k$ 等于 δ, 因此独立于 λ, 从而当 λ 为复数时, 该卷积也等于 δ. 沿上半复平面从实数 $\lambda > 0$ 过渡到实数 $\lambda < 0$, 由此导出与下列算子对应的基本解:

$$A_k = (\Delta + \lambda\delta)^{*k} \quad (\lambda > 0 \text{ 为实数})\,. \tag{7.10.16}$$

所找到的基本解不是实的, 但我们可将之换成其实部而得到

$$E_k = \frac{(-1)^{k+1} \lambda^{\frac{n}{4}-\frac{k}{2}} r^{k-\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}+k}\pi^{\frac{n}{2}-1}(k-1)!} Y_{\frac{n}{2}-k}(\sqrt{\lambda}\, r)\,. \tag{7.10.17}$$

这里 $Y_{\frac{n}{2}-k}$ 表示一个 Bessel 函数.

我们不能仅仅满足于令 $\lambda = 0$ 来得到迭代 Laplace 算子 Δ^k 的基本解; 直接计算会更简单.

值得一提的是, 上述这个解析延拓方法使我们得以从一个问题过渡到另外一个完全不同的问题. 事实上, 对于 $A_k = \left(\delta + \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{*k}$, 我们有

$$\mathscr{A}_k = (1 - r^2)^k\,, \quad \mathscr{E}_k = \mathrm{Pf.}\, \frac{1}{(1 - r^2)^k}\,.$$

由于 $1 - r^2$ 在球面 $r = 1$ 上为零, 因此上述有限部分必须要事先明确地定义好, 而赝函数 $\mathscr{E}_k$ 的 Fourier 变换要比函数 $(1 - r^2)^{-k}$ 的 Fourier 变换更难于直接计算. 但那只是一个技术层面上的困难, 而我们已通过对 λ 进行解析延拓绕过了此困难; 这是因为理论上我们可取 $\mathscr{E}_k$ 为 1 除以 $(1 - r^2)^k$ 后得到的任何结果 (第 5 章定理 8), 而上述 $\mathscr{E}_k$ 恰好为缓增广义函数 (它在无穷远处趋于 0). 公式 (7.10.16) 中的算子 A_k 因此拥有无穷多个缓增广义函数基本解, 但 (7.10.12) 中的算子 A_k 却只有一个这样的基本解; 另外, 这里不会有 $\mathscr{E}_k = (\mathscr{E}_1)^k$, $E_k = (E_1)^{*k}$, 因为这些表达式均没有意义.

例 2. 迭代 Laplace 方程

$$A_k = \Delta^k\,, \quad \mathscr{A}_k = (-4\pi^2 r^2)^k\,, \tag{7.10.18}$$

$$\mathscr{E}_k = \frac{(-1)^k}{2^{2k}\pi^{2k}}\,\mathrm{Pf.}\, r^{-2k}\,, \tag{7.10.19}$$

而基本解 E_k 可由给出 $\mathscr{F}(\mathrm{Pf.}\, r^m)$ 的公式 (7.7.13) 和 (7.7.14) 来导出.

须区分两种情况:

a) 若 n 为奇数, 或者 n 为偶数但 $2k<n$, 则我们所处的是非奇异的情形, 从而可以应用 (7.7.13) [当 $2k<n$ 时, 记号 Pf 是多余的]:

$$E_k = \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{2^{2k}\pi^{\frac{n}{2}}(k-1)!}\, r^{2k-n}\,. \tag{7.10.20}$$

b) 若 n 为偶数且 $2k \geqslant n$, 则我们所处的是奇异的情形, 因此须用公式 (7.7.14):

$$E_k = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{2k-1}\pi^{\frac{n}{2}}(k-1)!\left(k-\frac{n}{2}\right)!}\, r^{2k-n}\left(\log\frac{1}{r}+h\right)\,. \tag{7.10.21}$$

常数 h 并不重要且可被被换成 0, 因为这只是等价于在基本解中添加齐次方程的一个解 (多重调和多项式); 换句话说, 这只是所需公式 (7.7.14) 中最容易的部分. 公式 (7.10.20) 和 (7.10.21) 恰好与公式 (2.3.15) 和 (2.3.17) 一致.

可注意到例 1 和例 2 中的结果不仅仅依赖椭圆方程的最高次项; 这在于我们所找到的基本解不只是具有局部性态, 因为它还必须为缓增广义函数.

例 3. 迭代热传导方程

$$A_k = \left[\frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}\right)\right]^{*k} \quad (\lambda>0\ \text{为实数})\,. \tag{7.10.22}$$

将变量 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 的空间 X^n 看成是变量 $\xi=(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ 的 $n-1$ 维空间与变量 x_n 的一维空间的乘积会比较便利. 于是

$$A_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda\Delta_\xi\right)^{*k}\,, \tag{7.10.23}$$

$$\mathscr{A}_k = \left(2i\pi y_n + 4\pi^2\lambda|\eta|^2\right)^k\,, \quad \eta=(y_1,y_2,\ldots,y_{n-1})\,. \tag{7.10.24}$$

$$\mathscr{E}_k = \mathrm{Pf.}\left(\frac{1}{2i\pi y_n+4\pi^2\lambda|\eta|^2}\right)^k\,. \tag{7.10.25}$$

我们将应用第 7 节例 9 中的方法. 对于 $E_k=\overline{\mathscr{F}}\mathscr{E}_k$, 我们将因此得到

$$E_k = \begin{cases} 0 & \text{若 } x_n \leqslant 0\,, \\ \dfrac{x_n^{k-1}}{(k-1)!}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{\lambda\pi x_n}}\right)^{n-1}\exp\left(-\dfrac{|\xi|^2}{4\lambda x_n}\right) & \text{若 } x_n > 0\,, \end{cases} \tag{7.10.26}$$

而这也是一个经典的结果.

可注意到我们有

$$E_k = \frac{x_n^{k-1}}{(k-1)!} E_1 , \tag{7.10.27}$$

而这在理论上是显然的, 这是因为从 E_k $(k > 1)$ 的定义出发, 由通常的乘积求导公式 (5.2.3) 可在 $k > 1$ 时给出

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda\Delta_\xi\right) E_k &= \frac{x_n^{k-2}}{(k-2)!} E_1 + \frac{x_n^{k-1}}{(k-1)!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda\Delta_\xi\right) E_1\right] \\ &= E_{k-1} + \frac{x_n^{k-1}}{(k-1)!}\delta = E_{k-1} ,\end{aligned} \tag{7.10.28}$$

由此可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda\Delta_\xi\right)^{*k} E_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda\Delta_\xi\right) E_1 = \delta . \tag{7.10.29}$$

基本解 E_k 依赖 λ, 且在 $\Re\lambda > 0$ 上为复变量 λ 的全纯函数, 而在 $\Re\lambda \geqslant 0$ 上为复变量 λ 的连续函数并在 $(\mathscr{D}')$ 中取值 [当 $\Re\lambda < 0$ 时, 由公式 (7.10.26) 所定义的那个常义函数不再在原点的邻域内可积且不再代表一个广义函数]. 我们因此可将 λ 换成 $\pm i\lambda$ (参见例 1), 并得到与

$$A_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \pm i\lambda\Delta_\xi\right)^{*k} \quad (\lambda > 0 \text{ 为实数}) \tag{7.10.30}$$

相对应的基本解为

$$E_k = \begin{cases} 0 & \text{若 } x_n \leqslant 0 , \\ \dfrac{x_n^{k-1}}{(k-1)!}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}(1\pm i)\sqrt{\lambda\pi x_n}}\right)^{n-1} \exp\left(-\dfrac{|\xi|^2}{\pm 4i\lambda x_n}\right) & \text{若 } x_n > 0 . \end{cases} \tag{7.10.31}$$

这里再次同例 1 一样, 关于 λ 的解析延拓使我们可以从一个问题过渡到另外一个完全不同的问题, 从而避免那些纯技术性的困难.

例 4. 双曲方程

$$A_k = (\Box - \lambda\delta)^{*k} , \quad \Box = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \Delta_\xi , \tag{7.10.32}$$

其中我们沿用了前一个例子中的记号.

$$\mathscr{A}_k = \Big(-4\pi^2\sigma^2 - \lambda\Big)^k , \quad \sigma^2 = y_n^2 - |\eta|^2 . \tag{7.10.33}$$

$$\mathscr{E}_k = \text{Pf.}\left(\frac{1}{-4\pi^2\sigma^2 - \lambda}\right)^k . \tag{7.10.34}$$

1° 若 λ 不是实数, 则 $4\pi^2\sigma^2+\lambda$ 在 Y^n 中永不为零, 记号 Pf. 因此是多余的, 而 $\mathscr{E}_k$ 显然为有界连续函数, 故 $E_k=\overline{\mathscr{F}}\mathscr{E}_k$ 给出了一个基本解, 它是唯一的缓增广义函数基本解. 更有甚者, 我们还有 $\mathscr{E}_k\in(\mathscr{O}_M)$, 故 $E_k\in(\mathscr{O}'_C)$.

我们这里不计算这个基本解. 该解与公式 (6.5.29) 中所找到那个基本解具有完全不同的特性和应用:

a) 公式 (6.5.29) 中的基本解的支集包含在正向波锥 $+\Gamma$ 中; 它是具有该性质的唯一基本解, 这是因为 $(\mathscr{D}'_{+\Gamma})$ 是一个代数. 根据公式 (6.5.26), 它可用来求解 Cauchy 问题. 该基本解在无穷远处指数增长, 因此不为缓增广义函数且不能由 Fourier 变换而得到; 它不能用来求以缓增广义函数为常数项的非齐次方程的缓增广义函数解.

b) 基本解 $\overline{\mathscr{F}}\mathscr{E}_k$ 关于原点对称, 故不能用来依照公式 (6.5.26) 求解 Cauchy 问题. 它为缓增广义函数, 且是具有该性质的唯一基本解, 这是因为齐次方程没有非零的缓增广义函数解; 该基本解属于 $(\mathscr{O}'_C)$, 因此可以给出以缓增广义函数为常数项的任意非齐次方程的缓增广义函数解.

2° 若 λ 为实数且不为零, 则 $\mathscr{E}_k$ 在双曲面 $4\pi^2\sigma^2+\lambda=0$ 上奇异. 因此有必要明确定义有限部分, 但这里我们也可以取 $\mathscr{E}_k$ 为 1 除以 $(-4\pi^2\sigma^2-\lambda)^k$ 后所得的任何结果. 在局部上可施行该除法 (第 5 章定理 8), 并且我们还可以很容易地证明利用该除法可使 $\mathscr{E}_k$ 为缓增广义函数 (参见第 218 页). 公式 (6.5.30) 表明仅当 $\lambda<0$ 时我们才能重新得到那个属于 $(\mathscr{D}'_{+\Gamma})$ 的基本解, 此时该基本解是一个缓增广义函数.

3° 若 $\lambda=0$, 则上述双曲面被替换成圆锥面 $\sigma^2=0$. 以 σ^2 为分母做除法不能被纳入第 5 章中的定理 8, 这是因为原点为圆锥的二重点, 但这里还是可以很容易地对之进行处理. 正如我们曾经指出过 (第 7 节例 8), 我们可以定义赝函数 $\mathscr{E}_k$ 为缓增广义函数来重新得到公式 (2.3.34) 中的 Z_{2k}.

可注意到, 在所有情形, 属于 $(\mathscr{D}'_{+\Gamma})$ 的基本解乘以 $\exp(-kx_n)$ 后 ($k>0$ 充分大) 变成一个缓增广义函数, 因此可通过 Fourier 变换而得到; 这等价于说这些解均可以通过 Laplace 变换而得到, 而所有的双曲方程组亦如此.

这些例子显示了为何在一般情形我们会被除法问题的理论困难所阻碍. 它们尤其展示了构作用来计算广义函数的 Fourier 变换的图表的价值[1].

例 5. 积分方程 由于 $\exp(+\pi r^2)$ 不是缓增广义函数, 因此与

$$A=\exp(-\pi r^2),\quad \mathscr{A}=\exp(-\pi r^2) \tag{7.10.35}$$

对应的积分方程无缓增广义函数基本解. 该方程可能没有, 即便是非缓增的, 基本解.

[1] 参见 LAVOINE [1].

例 6. 设 A 是以原点 O 为中心的单位球面上的总质量为 $+1$ 均匀面密度. 考虑与之对应的积分方程. 若 T 是一个函数 f, 则 $A * f$ 是一个函数, 且在点 x 处等于 f 在以 x 为中心的单位球面上的均值. 我们有

$$\mathscr{A} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(\pi r)^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)\,, \tag{7.10.36}$$

$$\mathscr{E} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \operatorname{Pf.}\left(\frac{(\pi r)^{\frac{n-2}{2}}}{J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)}\right). \tag{7.10.37}$$

有必要明确定义上述有限部分, 但这同往常一样毫不重要. 可取 $\mathscr{E}$ 为 1 除以 $\mathscr{A}$ 后所得到的任何结果, 该除法可纳入第 5 章定理 8 的范畴, 这是因为 $J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)/r^{\frac{n-2}{2}}$ 的所有关于 r 的根均为单根且不为零. 还须让 $\mathscr{E}$ 为缓增广义函数, 而这就需要仔细地研究它在无穷远处的性态.

我们将选取 $\mathscr{E}$ 如下. 它关于原点 O 旋转不变, 因而

$$\mathscr{E}.\varphi(y) = \mathscr{E}.\psi(r)\,,$$

其中 $\psi(r)$ 为 $\varphi(y)$ 在球面 $|y| = r$ 上的均值.

设 L_1 为所有区间 $(r_\nu - \varepsilon, r_\nu + \varepsilon)$ 的并集, 其中 r_ν 为 Bessel 函数 $J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)$ 的所有非零根组成的序列. 设 L_2 为 L_1 在右半直线 $0 \leqslant r < +\infty$ 中的余集.

对任意 $\varphi \in (\mathscr{D})$, 我们令

$$\begin{aligned}\mathscr{E}.\varphi = &\int_{L_2} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2} (\pi r)^{\frac{n-2}{2}} \frac{r^{n-1}\psi(r)}{J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)}\,dr \\ &+ \sum_\nu \int_{r_\nu-\varepsilon}^{r_\nu+\varepsilon} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2} (\pi r)^{\frac{n-2}{2}} r^{n-1} \left(\frac{r - r_\nu}{J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)}\right)\left(\frac{\psi(r) - \psi(r_\nu)}{r - r_\nu}\right) dr\,.\end{aligned} \tag{7.10.38}$$

一方面, 鉴于 $r \to +\infty$ 时, 我们有

$$\begin{cases} \text{在 } L_2 \text{ 上}, & \left|\frac{1}{J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)}\right| = O(\sqrt{r})\,, \\ \text{在 } L_1 \text{ 上}, & \left|\frac{r-r_\nu}{J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)}\right| = O(\sqrt{r})\,, \end{cases} \tag{7.10.39}$$

而另一方面, 鉴于 $r \to +\infty$ 时 $\psi(r)$ 比 $1/r$ 的任意次幂都要递降得更快, 而在 L_1 上,

$$\frac{\psi(r) - \psi(r_\nu)}{r - r_\nu} \quad [\text{可被导数 } \psi'(\rho_\nu) \text{ 界住, 其中 } r_\nu - \varepsilon \leqslant \rho_\nu \leqslant r_\nu + \varepsilon]$$

亦如此, 故 $\mathscr{E}.\varphi$ 可被一个收敛的积分定义, 进而可将 $\mathscr{E}$ 定义成一个缓增广义函数.

立刻可见 $\mathscr{E}$ 满足 $\mathscr{A}\mathscr{E} = 1$, 也就是说

$$\mathscr{E}(\mathscr{A}\varphi) = \iint\cdots\int \varphi(y)\,dy = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \psi(r) r^{n-1}\,dr \quad [\text{因为 } \mathscr{A}(r_\nu) = 0]\,.$$

剩下要计算 $E=\overline{\mathscr{F}}\mathscr{E}$ 以便得到一个基本解. 但该结果似乎不能写成简单形式.

利用同样方法可以毫无困难地得到与 $A_k=A^{*k}$ 相对应的基本解 $\mathscr{E}_k=\mathrm{Pf.}\left(\frac{1}{\mathscr{A}^k}\right)$ (这里不会有 $\mathscr{E}_k=\mathscr{E}^k$ 也即 $E_k=E^{*k}$; 因为这些表达式没有意义).

例 7. Fredholm 定理 设 $\mathscr{A}$ 是一个仅含 m 阶导数的 m 阶椭圆多项式求导算子:

$$\begin{cases} A=\sum_{|p|=m} a_p D^p, & \text{其中 } a_p \text{ 为复值常数}, \\ \text{由 } \sum_{|p|=m} a_p y^p=0 \text{ 可导出 } y=0. \end{cases} \tag{7.10.40}$$

$$\mathscr{A}=\sum_p a_p (2i\pi y)^p. \tag{7.10.41}$$

更一般地, 若 l 为任意复数, 我们将令

$$\mathscr{A}_l=\mathrm{Pf.}\left[\mathscr{A}^l(y)\right], \quad A_l=\overline{\mathscr{F}}\mathscr{A}_l. \tag{7.10.42}$$

这意味着 $\mathscr{A}$ 的辐角在 Y^n 上 (除了原点以外) 有定义; 当 $n\neq 2$ 时总可以在单位球面上定义辐角; 但当 $n=2$ 时, 若辐角不是一个单值函数 [例如 $A=\frac{\partial}{\partial \bar z}$, $\mathscr{A}=i\pi z$, 公式 (2.3.23)], 我们可以对 $A*\widetilde{A}$ 和 $\mathscr{A}\overline{\mathscr{A}}$ 而不是 A 和 $\mathscr{A}$ 来进行讨论.

当 $(\Re l)m+n>0$ 时记号 Pf. 是多余的. 当 $|y|\to 0$ 时 $\mathscr{A}^l$ 的阶为 $|y|^{m(\Re l)}$, 此时如同在与 $\mathscr{A}=r^2$ 对应的公式 (2.3.4) 中那样, 通过考虑同心球面 $|y|=\varepsilon\,(\varepsilon\to 0)$, 我们可用一个不依赖 $\mathscr{A}^l$ 的方法来定义有限部分. 则 $\mathscr{A}_l$ 为复变量 l 的亚纯函数且在 $(\mathscr{S}')_y$ 中取值, 极点为使 $lm+n\leqslant 0$ 为偶数的那些 l 的值; 对于这些奇异值, 我们有一个与 (2.3.7) 类似的公式.

设 H 是一个从 Y^n 到它自己的同构. 当 $(\Re l)m+n<0$ 时 $\mathscr{A}_l\in(\mathscr{D}'_{L^1})$, 而 A_l 则是一个连续函数 (第 7 节例 4), 且根据 (7.6.10), 我们有

$$\overline{\mathscr{F}}(H\mathscr{A}_l)=A_l\big({}^tH(x)\big). \tag{7.10.43}$$

当 $(\Re l)m+n\geqslant 0$ 时, 该公式可能没有意义.

但 $\mathscr{A}_l$ 在 $(\Re l)m+n>0$ 时是一个函数, 故根据 (7.6.14) 可知:

$$H\mathscr{A}_l(y)=|\det H^{-1}|\,\mathscr{A}_l\big(H^{-1}(y)\big)=|\det H^{-1}|\,\mathscr{A}^l\big(H^{-1}(y)\big). \tag{7.10.44}$$

对于 l 的所有非奇异值, 借助解析延拓, 我们可由此导出

$$H\mathscr{A}_l=|\det H^{-1}|\,\mathrm{Pf.}\,\mathscr{A}^l\big(H^{-1}(y)\big). \tag{7.10.45}$$

对于所有使得 $(\Re l)m+n<0$ 的 l 的非奇异值, 我们最终有

$$\overline{\mathscr{F}}\Big[|\det H^{-1}|\,\mathrm{Pf.}\,\mathscr{A}^l\big(H^{-1}(y)\big)\Big]={}^tH(x). \tag{7.10.46}$$

但 (只要 H 保持可逆), 广义函数 $|\det H^{-1}|\,\mathrm{Pf.}\,\mathscr{A}^l(H^{-1}(y)) \in (\mathscr{D}'_{L^1})_y$ 会解析地依赖矩阵 H 的系数 (为将之延拓到矩阵 H 的复值系数, 我们当然需要根据情况来将 $|\det H^{-1}|$ 换成 $\det H^{-1}$ 或 $-\det H^{-1}$); 于是若 l 非奇异的且 $(\Re l)m+n<0$, 则 $A_l({}^tH(x))$ (作为连续函数, 关于任意紧集上的一致收敛拓扑) 会解析地依赖可逆矩阵 ${}^tH$ 的系数. 这就证明了连续函数 $A_l(x)$ 在 X^n 的原点的余集上解析 [①].

通过适当地取极限可将上述性质推广到奇异的情形, 使之可对 $(\Re\, l)m+n<0$ 无限制地成立.

但我们总有 [公式 (5.3.10)]

$$\mathscr{A}_l\mathscr{A}=\mathscr{A}_{l+1}\,,\quad A_l * A = A_{l+1}\,, \tag{7.10.47}$$

这使得我们可以从 l 过渡到 $l+1$; 从而最终, 对 l 的任意复数值, 所有 A_l 均在原点之外解析 (但 A_l 并不总是 X^n 上的函数, 例如 A_1 就是一个多项式求导算子)

Fredholm 定理 [②] 对应于 $l=-1$ 这个特殊情形:

第 5 章定理 12 的证明方法则表明, 方程 $A*T=B$ 的所有解均在 B 是一个解析函数的区域内为解析函数; 另外, 该证明可由卷积公式来简化, 且不用知道 A_{-1} 是否为 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 这是因为 (5.6.33) 和 (5.6.34) 可写成

$$\beta T = A_{-1}*[A*(\beta T)] = A_{-1}*(\alpha g) + A_{-1}*\big[(1-\alpha)\big(A*(\beta T)\big)\big]\,, \tag{7.10.48}$$

该证明可推广到许多别的常系数椭圆方程 (组).

另外, 若一个常系数椭圆方组有一个基本解, 则根据第 5 章定理 12 可知, 该解必然在常数项 δ 本身为解析函数的区域, 也即原点之外, 为解析函数.

但第 6 章定理 29 不用基本解就证明了解的解析性.

常数项为任意缓增广义函数的方程的求解　若可以找到一个属于 $(\mathscr{O}'_C)$ 的基本解 E, 则只要 B 为缓增广义函数, 公式 (6.10.9) 就可给出常数项为 B 的非齐次方程的一个缓增广义函数解 $E*B$, 另外该解也是唯一的缓增广义函数解.

但若 E 不属于 $(\mathscr{O}'_C)$, 该方法不再可用. Fourier 变换则可能借助公式 (6.10.2) 来直接给出非齐次方程的解, 而无需过渡到基本解. 现在给几个例子.

---

① 为此, 设 $x=(1,1,\ldots,1)$, 在 H 的对角线上是不为零的 $t_1,t_2,\ldots,t_n$ 而在其余地方均为零; 则当 t_i 均不为零时 $A_l(t_1,\ldots,t_n)$ 为关于 $t_1,\ldots,t_n$ 的解析函数. 故 A_l 在坐标平面外为解析函数; 通过改变坐标轴可导出它在原点之外解析.

② Fredholm 详细研究了这些椭圆方程的基本解, 并借助 Abel 积分来表示这些基本解, 但其研究仅是针对 $n=3$: FREDHOLM [1]. 上述方法具有普适性并且还十分初等.

例 1 设 $A=\left(\frac{\Delta}{4\pi^2}+\delta\right)^{*k}$ [公式 (6.10.16)]. 则 Pf. $\left(\frac{1}{1-r^2}\right)^k$ 的 Fourier 变换是 A 的一个基本解; 又 Pf. $\left(\frac{1}{1-r^2}\right)^k\notin(\mathscr{O}_M)$, 故所有基本解均不属于 $(\mathscr{O}'_C)$. 由第 5 章定理 8 可知, 在 $(\mathscr{D}')_y$ 中总能以 $(1-r^2)^k$ 为分母来做除法; 商 $\mathscr{B}/(1-r^2)^k$ 在球面 $r=1$ 的余集上唯一确定; 若 $\mathscr{B}$ 为缓增广义函数, 即"在无穷远处缓增" (定理 6), 由于 $(1-r^2)^k$ 本身及其各阶导数在 $r\to+\infty$ 时趋于 0, 故所有的商 $\mathscr{T}=\mathscr{B}/(1-r^2)^k$ 也为缓增广义函数. 借助 Fourier 变换, 我们可由此得到方程的一个缓增广义函数解. 于是 A 在 $(\mathscr{S}')$ 中"完全可逆" (第 153 页). 利用一个受前面讨论的启发并推广了那个基本解存在性的证明的推理可知, 在前面所有例子中 (除了例 5), 那些可逆的广义函数 A 也为完全可逆 [虽然 E 一般并不属于 $(\mathscr{O}'_C)$]. 在 $(\mathscr{S}')$ 中, 我们还不知道可逆但不完全可逆的广义函数 T 的例子.

例 2 对于算子 $A=(\square-\lambda\delta)^{*k}$ ($\lambda\neq0$ 为实数) [公式 (7.10.32)], 我们可引入一个带广泛普适性的新推理.

我们要在 $(\mathscr{S}')$ 中求解除法问题

$$(-4\pi^2\sigma^2-\lambda)^k\mathscr{T}=\mathscr{B}. \tag{7.10.49}$$

根据第 5 章定理 8, 在有限距离内可施行该除法; 但我们希望 $\mathscr{T}$ 为缓增广义函数, 而这就要求在无穷远处采取某些预防措施.

将 Y^n 看成是实射影空间 $\mathbb{P}^n$ 的开子集, 并采用定理 5 中的结论和记号.

设 $\Omega_0=Y^n$ 而 Ω_l 为射影超平面 $y_l=0$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中的余集, 后者为 $\mathbb{P}^n$ 中的开集. 所有 Ω_ν $(0\leqslant\nu\leqslant n)$ 构成 $\mathbb{P}^n$ 的一个开覆盖; 设 $\{\bar{\alpha}_\nu\}$ 为 $\mathbb{P}^n$ 上的一个从属于该覆盖的单位分解, 其中 $\bar{\alpha}_\nu\in(\mathscr{D}_{\Omega_\nu})$ (第 1 章定理 2).

由于 $\mathscr{B}$ 为缓增广义函数, 因此可延拓成 $\mathbb{P}^n$ 上广义函数 $\overline{\mathscr{B}}$. 现证明, 对每个 ν, 可找到广义函数 $\overline{\mathscr{T}}_\nu\in(\mathscr{D}'_{\Omega_\nu})$ 使之在 $\omega_\nu=\Omega_\nu\cap Y^n$ 上的限制 $\mathscr{T}_\nu$ 满足等式 (7.10.49).

当 $\nu=0$ 时已成立. 设 $\nu=l\neq0$. 在 Ω_l 中取 $y'_1,y'_2,\ldots,y'_n$ 为局部坐标, 其中[①]:

$$\begin{cases} y'_1=\dfrac{y_1}{y_l}, \quad y'_2=\dfrac{y_2}{y_l}, \quad \ldots, \quad y'_l=\dfrac{1}{y_l}, \quad \ldots, \quad y'_n=\dfrac{y_n}{y_l}, \\[2ex] y_1=\dfrac{y'_1}{y'_l}, \quad y_2=\dfrac{y'_2}{y'_l}, \quad \ldots, \quad y_l=\dfrac{1}{y'_l}, \quad \ldots, \quad y_n=\dfrac{y'_n}{y'_l}. \end{cases} \tag{7.10.50}$$

我们因此可以在 Ω_l 中求解除法问题:

$$\left[-4\pi^2\left(y'^2_n-y'^2_1-y'^2_2-\cdots-1-\cdots-y'^2_{n-1}\right)-\lambda y'^2_l\right]^k\overline{\mathscr{T}}_l=y'^{2k}_l\overline{\mathscr{B}}_l, \tag{7.10.51}$$

这是因为 $y'^{2k}_l\overline{\mathscr{B}}_l$ 是一个在 Ω_l 上已知的广义函数, 而

$$-4\pi^2\left(y'^2_n-y'^2_1-y'^2_2-\cdots-1-\cdots-y'^2_{n-1}\right)-\lambda y'^2_l$$

在 Ω_l 上满足应用第 5 章定理 8 所需要的条件.

① 在 $\mathbb{P}^n$ 上, 我们总可以取笛卡儿坐标的齐次函数来作为局部坐标.

公式 (7.10.51) 在 ω_ν 上也成立, 而 y_l^{2k} 在 ω_ν 上无穷可导, 我们因此可以在两边乘以 y_l^{2k}, 而这就在 ω_ν 上给出了 (7.10.49).

又 $\bar{\alpha}_\nu$ 在 ω_ν 中具有紧支集, 则 $\bar{\alpha}_\nu \overline{\mathscr{T}}_l$ 不仅是 ω_ν 上的广义函数, 而且也是 $\mathbb{P}^n$ 上的广义函数. 它在 Y^n 上的限制为缓增广义函数, 且不仅在 ω_ν 上而且还在 $\mathbb{P}^n$ 上满足

$$(-4\pi^2\sigma^2 - \lambda)^k (\alpha_\nu \mathscr{T}_\nu) = \alpha_\nu \mathscr{B}. \tag{7.10.52}$$

和式 $\mathscr{T} = \sum_\nu \alpha_\nu \mathscr{T}_\nu$ 因此是 Y^n 上的缓增广义函数, 且满足 (7.10.49).

该方法是第 5 章第 5 节第 2° 段中评注的应用, 通过将 $\mathbb{P}^n$ 上的局部解粘贴起来而得到除法问题的一个解.

除法问题的解的推论　正如 Lojasiewicz 和 Hörmander 所证明的[①], 在 $\mathbb{R}^n$ 上总能以多项式为分母来做除法, 从而借助前面那个利用射影空间 $\mathbb{P}^n$ 的推理可导出:

任意的常系数偏微分方程 (A 为多项式求导算子) 至少有一个缓增广义函数基本解, 而当常数项为缓增广义函数时, 非齐次方程至少有一个缓增广义函数解.

Fredholm 定理 (例 7) 因此被推广到所有常系数椭圆偏微分方程.

Fourier 变换在卷积方程中还要许多别的应用, 这里我们只给出了几个典型例子.

① 参见 Hörmander [1], Lojasiewicz [1], 以及 Schwartz [16], 报告 21 – 25.

第八章　Laplace 变换

内容提要　第 1 节介绍基本的定义, 凸集 Γ 及其性质. 在第 2 节, 针对空间 Ξ^n 中的凸集 Γ, 我们研究由 X^n 上使得对任意 $\xi \in \Gamma$ 满足 $\exp(-x\cdot\xi)T_x \in \mathscr{S}'$ 的广义函数 T 所组成的空间 $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$; 命题 4 给出了卷积的一个基本性质. 在第 3 节, 我们定义广义函数 $T \in \mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 的 Laplace 变换; 在 Γ 为开集这一最为重要的情形, 命题 6 断言上述广义函数的 Laplace 变换为复变量 p ($p = \xi + i\eta$, $\xi \in \Gamma$) 的全纯函数, 且在无穷远处为多项式增长. 维数 $n = 1$ 这个特殊情形曾在第 227 页的评注 5 中简短提及. Laplace 变换将卷积变为乘积. 第 4 节从一个广义函数的 Laplace 变换的增长性出发来研究该广义函数的支集. 最后那个推论给出了维数 $n = 1$ 的情形.

单变量函数的 Laplace 变换 (理论和应用) 曾被 Dœtsch, Widder 等人大量研究. 对于多变量, 相关的工作都是最近的: Bochner, Leray, Mackey, Gårding, 等等. 另外, 有必要指出的是, 在数学上被解释清楚之前, 广义函数正是被电气专家们尤其应用在 Laplace 变换中 ($\delta, \delta', \delta'', \ldots$ 就是那些 Laplace 变换等于 $1, p, p^2, \ldots$ 的东西). 最近的一些工作讨论了广义函数的 Laplace 变换[①].

我们认为详尽地给出广义函数的 Laplace 变换的理论体系会很有用. 读者很容易看到这里仅涉及到广义函数的常用技巧的直接应用.

---

① Garnir [5], Sebastião e Silva [2], [3], [4], Schwartz [10], 第 1 卷, p. 74. Lavoine [2] 给出了一些 Laplace 变换表. 本章只不过是我们在 *Séminaire math. Univ. Lund, 1952* 上所发表的那篇论文的的转载.

§1. 广义函数与指数函数的乘积

设 $X^n = \mathbb{R}^n$ 为 n 维实向量空间, $\Xi^n = \mathbb{R}^n$ 为其对偶, 而 $\Pi^n = \Xi^n + i\Xi^n$ 为 Ξ^n 上典则构造的 n 维复向量空间 (也即 X^n 上的复值线性型的空间).

对于 $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in X^n$, $p = (p^1, p^2, \ldots, p^n) \in \Pi^n$, 其中

$$p^j = \xi^j + i\eta^j\,,\ p = \xi + i\eta \quad (\xi \in \Xi^n\,,\ \eta \in \Xi^n)\,,$$

我们令 $px = p^1x^1 + p^2x^2 + \cdots + p^nx^n$, 并称之为 (复值) 点积.

现设 $T \in \mathscr{D}'_x$ 为 X^n 上广义函数. 使 $\exp(-px)T$ ① 为缓增广义函数 (属于 $\mathscr{S}'_x$) 的所有点 $p \in \Pi^n$ 组成的集合显然是由 $\xi \in \Gamma$ 定义的 "柱集" $\Gamma + i\Xi^n$, 其中 Γ 是 Ξ^n 的一个适当子集; 这是因为对任意 $\eta \in \Xi^n$, 一旦 S 为缓增广义函数, 则 $\exp(-i\eta x)S$ 显然也为缓增广义函数 [另外, 从 $\Xi^n \times \mathscr{S}'$ 到 $\mathscr{S}'$ 的映射 $(\eta, S) \to \exp(-i\eta x)S$ 为连续].

命题 1. 集合 Γ 为凸集.

为此, 设 $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma$. 对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$, 令 $\xi = t\xi_1 + (1-t)\xi_2$; 则

$$\exp(-\xi x) = \big[\exp(-\xi_1 x)\big]^t \big[\exp(-\xi_2 x)\big]^{1-t}$$

介于 $\exp(-\xi_1 x)$ 和 $\exp(-\xi_2 x)$ 之间, 故可被它们之和界住. 若我们令

$$\alpha(x;\xi) = \frac{\exp(-\xi x)}{\exp(-\xi_1 x) + \exp(-\xi_2 x)}\,, \tag{8.1.1}$$

则这是一个关于 x 的有界连续函数, 且可知它关于 x 的任意偏导数也为关于 x 的有界连续函数. 换句话说 $\alpha \in \mathscr{B}_x = (\mathscr{D}_{L^\infty})_x$.

于是我们有

$$\exp(-\xi x)\,T = \alpha(x;\xi)\big[\exp(-\xi_1 x)T\big] + \alpha(x;\xi)\big[\exp(-\xi_2 x)T\big]\,. \tag{8.1.2}$$

由于 $\mathscr{S}'$ 中的广义函数与 $\mathscr{B}$ 中的函数之积还是属于 $\mathscr{S}'$, 命题由此得证.

更一般地, 若 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l$ 为 Γ 中的 l 个固定点, ξ 属于其凸包, 而 $p = \xi + i\eta$, 则

$$\alpha(x;p) = \frac{\exp(-px)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{l} \exp(-\xi_j x)} \in \mathscr{B}_x\,. \tag{8.1.3}$$

---

① 我们记 x 为 Laplace 变换前的变量, 而 $p = \xi + i\theta$ 为 Laplace 变换后的变量. 与第 7 章相反, 我们将积分 $g(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\exp(-ixy)\,dx$ 而不是 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\exp(-2i\pi xy)\,dx$ 所定义的 Fourier 变换记作 $\mathscr{F}$, 从而 Laplace 变换为 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\exp(-px)\,dx$; 而 $\overline{\mathscr{F}}$ 则被定义为

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\exp(ixy)\,dy\,.$$

所有这些只是为了简化书写.

事实上, 上述函数有界; 而该函数关于 x 的任意阶偏导数为其本身与一些类似函数 (其中 p 被换成 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l$, 故这些函数可被 1 界住) 的乘积的有限组合 (当 η 有界时系数亦有界), 因此当 η 有界时在 X^n 上有界.

另外, 它关于 x, ξ, η 的各阶偏导数均关于这三个变量连续且 (当 η 有界时) 可被一个关于 x 的多项式界住. 这表明 $(\xi, \eta) \to \alpha(x;p)$ 是一个关于 ξ, η 的、取值在 $(\mathscr{O}_M)_x$ 中的无穷可微函数. 若这 l 个点 ξ_j 的凸包在 Ξ^n 中还有一个非空内部, 则 $p \to \alpha(x;p)$ 是一个关于 p 的、取值在 $(\mathscr{O}_M)_x$ 中的全纯函数.

由于我们总有

$$\exp(-px)\,T = \sum_{j=1}^{l} \alpha(x;p)\big[\exp(-\xi_j x)T\big], \tag{8.1.4}$$

则我们将有:

命题 2. *只要 ξ 落在由 Γ 中的有限多个点 ξ_j $(1 \leqslant j \leqslant l)$ 所张成的凸包中, 则广义函数 $\exp(-px)T \in \mathscr{S}'_x$ 为关于 ξ, η 的无穷可微函数 (在 $\mathscr{S}'_x$ 中取值); 只要 ξ 落在 Γ 的内部 $\mathring{\Gamma}$, 则上述广义函数还为关于 p 的全纯函数 (在 $\mathscr{S}'_x$ 中取值).*

提请大家注意, 若比如说 Γ 由闭球 $|\xi| \leqslant 1$ 构成而 ξ_0 为球面 $|\xi| = 1$ 上的一点, 则仅当 $\xi - \xi_0$ 与球面的切平面的夹角大于某个固定 $\varepsilon > 0$ 时, 上述命题才能断言当 ξ 趋近 ξ_0 时 $\exp(-px)T_x$ (在 $\mathscr{S}'_x$ 中) 连续. 借助反例, 我们可证明这样的限制是必要的. 但若我们知道当 ξ 属于 Γ 的某个子集 A 时 $\exp(-px)T$ 在 $\mathscr{S}'_x$ 中有界, 则它是一个关于 $\xi \in A$ 的、取值在 $\mathscr{S}'_x$ 中的连续函数. 这是因为它是一个关于 ξ 的、取值在 $\mathscr{D}'_x$ 中的连续函数, 而在 $\mathscr{S}'_x$ 的一个有界 (从而为相对紧的) 集合上, 空间 $\mathscr{S}'$ 的拓扑与 $\mathscr{D}'$ 的拓扑相等. 由于 $\exp(-px)T_x$ (在 $\mathscr{D}'_x$ 中) 关于 ξ 的各阶偏导数为其本身与一些关于 x 的多项式的乘积, 因此这些偏导数属于 $\mathscr{S}'_x$ 且在 $\mathscr{S}'_x$ 中有界, 故 $\exp(-px)T_x$ 是一个关于 $\xi \in A$ 的、取值在 $\mathscr{S}'_x$ 中的无穷可导函数.

命题 3. *若 K 为 $\mathring{\Gamma}$ 的紧子集, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得当 $\xi \in K$, 而 η 保持有界时*

$$\exp\left[\varepsilon\sqrt{1+|x|^2} - px\right] T_x$$

在 $\mathscr{S}'_x$ 中有界, 并且这还是一个关于 p 的、取值在 $\mathscr{S}'_x$ 中的全纯函数.

事实上, 当 ε 充分小时, 集合 $\{\xi + b \;:\; \xi \in K,\ |b| < \varepsilon\}$ 包含在由 Γ 中的有限多个点 ξ_j $(1 \leqslant j \leqslant l)$ 所张成的凸包中. 设

$$\beta(x;p) = \exp\left(\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}\right)\alpha(x;p). \tag{8.1.5}$$

则我们有

$$\begin{aligned}|\beta(x;p)| &\leqslant \exp(\varepsilon)\ \exp(\varepsilon|x|)\,\alpha(x;p)\\ &\leqslant \exp(\varepsilon)\ \max_{|b|\leqslant\varepsilon} \exp(-bx)\,\alpha(x;p)\\ &\leqslant \max_{|b|\leqslant\varepsilon} \exp(\varepsilon)\,\alpha(x;p+b)\,,\end{aligned}$$

而根据假设, 当 η 保持有界时, 上式也有界.

在同样的条件下, 函数 $\beta(x;p)$ 关于 x 的每个偏导数有界, 这是因为它是 α 的导数的乘积的有限线性组合, 这些导数同 α 本身一样可被 $\exp\left(\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}\right)$ 的导数界住, 而后者则同该函数本身一样有界.

于是对任意 p, 若 $\xi\in K$, 则 $\beta(x:p)$ 属于 $\mathscr{B}_x$, 进而属于 $(\mathscr{O}_M)_x$; 并且它还是一个关于 p 的、取值在 $(\mathscr{O}_M)_x$ 中的全纯函数.

因此我们有

$$\exp\left[\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}-px\right]T=\sum_{j=1}^{l}\beta(x;p)\left[\exp(-\xi_j x)\,T\right], \tag{8.1.6}$$

故当 η 有界时, 该广义函数在 $\mathscr{S}'_x$ 中有界, 且为关于 p 的、取值在 $\mathscr{S}'_x$ 中的全纯函数. 这就是所要证明的.

推论. 对任意 $\xi\in\mathring{\Gamma}$, 均有 $\exp(-px)\,T_x\in(\mathscr{O}'_C)_x$, 这是一个关于 p 的、取值在 $(\mathscr{O}'_C)_x$ 中的全纯函数.

事实上, 它为关于 p 的、取值在 $\mathscr{S}'_x$ 中的全纯函数

$$\exp\left[\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}-px\right]T$$

与 $\exp\left[-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}\right]\in\mathscr{S}$ 之积.

可见, 在命题 3 的陈述中, 我们可将 $\mathscr{S}'_x$ 换成 $(\mathscr{O}'_C)_x$.

评注. 我们可将 $\mathscr{S}'_x$ 换成别的具有更强局部正则性限制条件的空间; 而命题 3 可以毫无困难地进行推广.

例如, 若 T 为函数 f 且当 ξ 属于某个凸集 Γ 时, 均有 $\exp(-\xi x)\,f\in L^k(X^n)$, 则当 $\xi\in\mathring{\Gamma}$ 时, 可知 $\exp(-px)\,f$ 为某个 L^k 类函数与速降函数 $\exp\left(\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}\right)$ 之积 (其中 $\varepsilon>0$ 为适当常数). 若 $\xi\in\Gamma$ 时, 均有 $\exp(-\xi x)\,f\in(\mathscr{O}_M)_x$, 则当 $\xi\in\mathring{\Gamma}$ 时, 我们有 $\exp(-px)\,f\in\mathscr{S}$. 我们自然可与 $T\in\mathscr{D}'_x$ 以及诸如 $\mathscr{S}'$, L^k, $\mathscr{O}_M$ 等等之类的广义函数空间, 相伴一个随这些广义函数空间而变的凸集 Γ[①].

① 这里的 Γ 不能是一个任意的凸集. 参见 AUTHIER [1].

§2. 与 Ξ^n 的非空凸子集 Γ 相伴的广义函数空间 $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$

我们令

$$\mathscr{S}'_x(\Gamma) = \{T \in \mathscr{D}'_x \ : \ \exp(-\xi x)\, T \in \mathscr{S}'_x, \forall \xi \in \Gamma\}\,.$$

则通常的空间 $\mathscr{S}'_x$ 对应于 $\Gamma = \{0\}$.

在 $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 上赋予如下拓扑: 称 $T_j \in \mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 趋于 0, 如果对任意的 $\xi \in \Gamma$, 均有 $\exp(-\xi x)T_j$ 在 $\mathscr{S}'_x$ 中趋于 0 [此时根据命题 2, 当 ξ 属于 Γ 中的有限多个点所张成的凸包时, 那些 $\exp(-px)\,T_j$ 关于有界的 η 趋于一致 0]; 该拓扑是让所有从 $\mathscr{S}'_x$ 到 $\mathscr{S}'_x$ 的线性映射 $T \to \exp(-\xi x)\,T$ 均连续的最粗的拓扑. 空间 $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 为局部凸的 Hausdorff 完备空间. 同样地, 我们可引入空间 $(\mathscr{O}'_C)_x(\Gamma)$ (若有明确的应用目的, 也可引入别的类似空间). 我们有

$$(\mathscr{O}'_C)_x(\Gamma) \subset \mathscr{S}'_x(\Gamma) \subset (\mathscr{O}'_C)_x(\mathring{\Gamma})\,,$$

从而当 Γ 为开集时, 空间 $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 和 $(\mathscr{O}'_C)_x(\Gamma)$ (作为拓扑向量空间) 相等.

命题 4. 当 $S \in \mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 且 $T \in (\mathscr{O}'_C)_x(\Gamma)$ 时, 卷积 $S * T$ 有定义且属于 $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$; 从 $\mathscr{S}'_x(\Gamma) \times (\mathscr{O}'_C)_x(\Gamma)$ 到 $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 的双线性映射 $(S,T) \to S * T$ 为亚连续.

我们将用下述公式来定义 $S * T$:

$$\exp(-px)(S * T) = \big[\exp(-px)\, S\big] * \big[\exp(-px)\, T\big]\,, \quad \forall \xi \in \Gamma\,, \tag{8.2.1}$$

也就是说

$$S * T = \exp(px)\Big[\big(\exp(-px)\, S\big) * \big(\exp(-px)\, T\big)\Big]\,, \quad \forall \xi \in \Gamma\,, \tag{8.2.2}$$

一旦选定 p ($\xi = \Re p \in \Gamma$), 公式 (8.2.2) 就明确地定义了 $S * T$; 若该结果不依赖 p, 则上述定义有意义, 由此命题 4 立刻得证.

设 α_j 为 $\mathscr{D}_x$ 中的一列函数使得 $1-\alpha_j$ 本身及其各阶导数在 X^n 上有界且在任意紧集上一致趋于 0.

则 $S_j = \alpha_j S$ 和 $T_j = \alpha_j T$ 分别在 $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$, $(\mathscr{O}'_C)_x(\Gamma)$ 中趋于 S, T (这就借助正则化证明了 $\mathscr{E}'_x$, 甚至是 $\mathscr{D}_x$ 在这些空间中稠密). 对任意的 p, 我们有与公式 (8.2.2) 相同但在其中用 S_j, T_j 来代替 S, T 的公式公式 (8.2.2′). 但若 $\xi \in \Gamma$, 则

$$\exp(-px)\, T_j = \alpha_j \big[\exp(-px)\, T\big]$$

在 $(\mathscr{O}'_C)_x$ 中趋于 $\exp(-px)\,T$. 我们同样也有 $\exp(-px)\, S_j$ 在 $\mathscr{S}'_x$ 中趋于 $\exp(-px)\, S$. 公式 (8.2.2′) 的右边在 $\mathscr{D}'_x$ 中趋于 (8.2.2) 的右边. 这就证明了 $S_j * T_j$ (在 $\mathscr{D}'_x$ 中)

以 (8.2.2) 的右边为其极限, 又由于 $S_j * T_j$ 不依赖 p, 故对任意 $\xi \in \Gamma$, 公式 (8.2.2) 的右边不依赖 p. 这就是所要证明的.

上述证明还额外证明了如此定义的卷积 $S*T$ 为 S_j*T_j 在 $\mathscr{D}'_x$ 中的极限, 它表明, 若基于别的理由用另外一种方法定义了 $S*T$, 则所得到的结果是一样的.

推论. 若 Γ 为凸开集, 则 $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 关于卷积构成一个交换的代数, 并且卷积还是一个从 $\mathscr{S}'_x(\Gamma) \times \mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 到 $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 的双线性连续映射.

这源于 $\mathscr{S}'_x(\Gamma) = (\mathscr{O}'_C)_x(\Gamma)$, 空间 $(\mathscr{O}'_C)_x(\Gamma)$ 关于卷积构成一个代数, 并且卷积为亚连续运算 ①.

§3. 空间 $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 上的 Laplace 变换

设 Γ 为 Ξ^n 中的非空凸集. 对于固定的 $\xi \in \Gamma$, 我们想要寻求被看成是关于 x 的广义函数 $\exp(-\xi x)\, T_x$ 的 Fourier 变换; 我们将这个 Fourier 变换看成是关于 η 的广义函数, 它属于 $\mathscr{S}'_\eta$ $(\eta \in \Xi^n)$ 且依赖参数 $\xi \in \Gamma$, 也即

$$(8.3.1) \qquad \big(E(\xi)\big)_\eta = \big[\mathscr{F}_{(x)}\big(\exp(-\xi x)\, T_x\big)\big]_\eta ,$$

[如果积分

$$\int_{X^n} \exp\big[-(\xi + i\eta)x\big]\, T_x ,$$

有意义, 也就是说 $\exp\big[-(\xi+i\eta)x\big]\, T_x$ 属于 $(\mathscr{D}'_{L^1})_x$, 那么 $\big(E(\xi)\big)_\eta$ 就是上述积分所定义的函数].

命题 5. 对应 $\xi \to \big(E(\xi)\big)_\eta$ 是一个从 Γ 到 $\mathscr{S}'_\eta$ 的映射, 且当 ξ 属于由 Γ 中的有限多个点所张成的凸包时, 该映射为无穷可微. 设 V 为 Γ 在 Ξ^n 中所生成的仿射流形. 若 d 为沿着 V 中的某个向量的求导运算, 而 ξ 为 Γ 在 V 中的内点, 则有 ②

$$(8.3.2) \qquad (d_\xi + i d_\eta)\big(E(\xi)\big)_\eta = 0 .$$

反过来, 若 $\xi \to \big(E(\xi)\big)_\eta$ 是一个从 Γ 到 $\mathscr{S}_\eta$ 的映射且具有上述性质, 则存在唯一的广义函数 $T \in \mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 使得

$$\big(E(\xi)\big)_\eta = \big[\mathscr{F}_{(x)}\big(\exp(-\xi x)\, T_x\big)\big]_\eta .$$

① 参见命题 4, 以及 DIEUDONNÉ – SCHWARTZ [1], 定理 9, p. 96.

② d_ξ 表示将求导算子 d 作用于以 ξ 为自变量而在 $\mathscr{S}'_\eta$ 中取值的函数 $\big(E(\xi)\big)_\eta$; 而 d_η 则表示, 对固定的 ξ, 将求导算子 d 作用于 $\mathscr{S}'_\eta$ 中的广义函数 $\big(E(\xi)\big)_\eta$.

为此, 设 $\left(T(\xi)\right)_x = \left[\mathscr{F}_\eta\left(E(\xi)\right)_\eta\right]_x$. 对任意向量 $a = (a^1, \ldots, a^n) \in V$, 当 ξ 属于 Γ 在 V 中的内部时①, 公式 (8.3.2) 等价于

$$\sum_{\nu=1}^{n} a^\nu \frac{\partial}{\partial \xi^\nu}\left(T(\xi)\right)_x + \sum_{\nu=1}^{n} a^\nu x^\nu \left(T(\xi)\right)_x = 0\,, \tag{8.3.3}$$

其中 $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$, $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$. 而这又等价于

$$\sum_{\nu=1}^{n} a^\nu \frac{\partial}{\partial \xi^\nu}\left[\exp(\xi x)\left(T(\xi)\right)_x\right] = 0\,, \tag{8.3.4}$$

(中括号里的被看成是以 ξ 为自变量而在 $\mathscr{D}'_x$ 中取值的函数).

上式成立当且仅当 ξ 属于 Γ 在 V 中的内部时 $\exp(\xi x)\left(T(\xi)\right)_x \in \mathscr{D}'_x$ 不依赖 ξ, 从而由连续性可知当且仅当 ξ 属于 Γ 时 $\exp(\xi x)\left(T(\xi)\right)_x \in \mathscr{D}'_x$ 不依赖 ξ, 因此当且仅当存在广义函数 $T \in \mathscr{D}'_x$ 使得

$$\left(T(\xi)\right)_x = \exp(-\xi x)\, T_x\,. \tag{8.3.5}$$

这就是所要证明的.

可注意到, 为使 T_x 在 $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 中趋于 0, 当且仅当对任意的 $\xi \in \Gamma$, 均有 $\left(E(\xi)\right)_\eta$ 在 $\mathscr{S}'_\eta$ 中趋于 0, 此时在 Γ 的有限多个点的凸包上, 收敛是一致的.

定义. 这个从 Γ 到 $\mathscr{S}'_\eta$ 的映射 $\xi \to \left(E(\xi)\right)_\eta$ 被称为 $T \in \mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 的 Laplace 变换, 记作 $\left(\mathscr{L}T(\xi)\right)_\eta$ 或简记为 $\mathscr{L}T$.

命题 6. *若 Γ 为凸开集, 则 $T \in \mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 的 Laplace 变换是一个从 Γ 到 $(\mathscr{O}_M)_\eta$ 的无穷可微映射, 并且还有*

$$\left(E(\xi)\right)_\eta = E(\xi, \eta) = F(\xi + i\eta) = F(p)\,, \tag{8.3.6}$$

其中 F 为关于 $p \in \Gamma + i\Xi^n$ 的全纯函数, 也称为 T 的 Laplace 变换.

反过来, 定义在 $\Gamma + i\Xi^n$ 上使得对于 Γ 的任意紧子集 K, 在 $K + i\Xi^n$ 上可被 η 的多项式界住的任意全纯函数 F, 均为唯一的广义函数 $T \in \mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 的 Laplace 变换.

1) 条件必要.

这可由命题 5 导出, 而直接证明此结论也很容易. 我们可用 $(\mathscr{O}_M)_\eta$ 来替代 $\mathscr{S}'_\eta$, 该事实源于命题 3 的推论; 同样地, 由于 $\exp(-px)\,T_x$ 为关于 p 的、取值在 $(\mathscr{O}'_C)_\eta$ 中的全纯函数, 而这里 $F(p)$ 正好是积分

$$F(p) = \int_{X^n} \left[\exp(-px)\,T_x\right] dx\,, \tag{8.3.7}$$

因此 $F(p)$ 为关于 p 的全纯函数.

① 译者注: 将 Γ 看成拓向量扑空间 V 的子集, 此时的 Γ 的内部被称为 Γ 在 V 中的内部, 以此来区别通常所说的 Γ 的内部, 也即它在 Ξ^n 中的内部.

2) 条件充分.

若 F 可在 $K+i\Xi^n$ 上被某个多项式界住, 则由 Cauchy 积分得到的经典上界估计表明 F 关于 ξ 或 η 的任意偏导数也被一个关于 η 的 (次数固定的) 多项式界住; 故 $\xi \to F(\xi+i\eta)$ 是一个从 Γ 到 $(\mathscr{O}_M)_\eta$ 的无穷可微映射, 因此也是一个从 Γ 到 $\mathscr{S}'_\eta$ 的无穷可微映射; 另外, 由于 F 为全纯, 则它满足 Cauchy 条件

$$(d_\xi + id_\eta)F(\xi + i\eta) = 0\,,$$

其中 d 为沿任意向量的求导算子; 并且若

$$d = \frac{\partial}{\partial \xi^\nu} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant n)\,,$$

则

$$d_\xi + id_\eta = \frac{\partial}{\partial \xi^\nu} + i\frac{\partial}{\partial \eta^\nu}\,.$$

于是我们可由命题 5 得到所要的结论.

各种评注

1) 为使 T_j 在 $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 中收敛于 0, 只需 $F_j(\xi+i\eta)$ 在 $\Gamma+i\Xi^n$ 的任意紧子集上一致收敛于 0 且对于 Γ 的任意紧子集 K, 它们在 $K+i\Xi^n$ 上可被某个关于 η 的固定多项式界住 (若所涉及的是一个序列, 或者是具有有界或可数基的滤子, 则上述充分条件也为必要条件).

2) 当 ξ 有界时, 关于 η 的任意多项式可被关于 p 的多项式界住, 因为它可被

$$A + \sum_{\nu=1}^{n} (\eta^\nu)^2$$

的幂界住, 从而可被

$$B - \sum_{\nu=1}^{n} (p^\nu)^2$$

的幂界住. 于是对于 Γ 的任意紧子集 K, $F(p)$ 在 $K+i\Xi^n$ 上可被表示成一个关于 p 的多项式与一个有界全纯函数 $G(p)$ 之积.

3) 如果对任意的 $\xi \in \Gamma$, 均有 $\big(E(\xi)\big)_\eta$ 属于 $(\mathscr{D}'_{L^p})_\eta$ [相应地, 属于 $(\mathscr{O}'_C)_\eta$], 那么对任意的 $\xi \in \mathring{\Gamma}$, 均有 $\big(E(\xi)\big)_\eta$ 属于 $(\mathscr{D}_{L^p})_\eta$ [相应地, 属于 $\mathscr{S}_\eta$], 并且这还是一个从 $\mathring{\Gamma}$ 到 $(\mathscr{D}_{L^p})_\eta$ [相应地, 到 $\mathscr{S}_\eta$] 的无穷可微函数.

为此, 重新采用在证明命题 3 时所使用的方法, 则我们有

$$(E(\xi))_\eta = \sum_j \big[\mathscr{F}_{(x)} \exp\big(-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}\big)\big] * \mathscr{F}_{(x)}\beta * \big(E(\xi_j)\big)_\eta\,.$$

但若 $\big(E(\xi_j)\big)_\eta \in (\mathscr{D}_{L^p})_\eta$, 则 $\mathscr{F}_{(x)}\beta \in (\mathscr{O}'_C)_\eta$, 又

$$\mathscr{F}_{(x)} \exp\big(-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}\big) \in \mathscr{S}_\eta\,,$$

故 $\big(E(\xi)\big)_\eta \in (\mathscr{D}_{L^p})_\eta$. 这就是所要证明的.

4) 顺便, 我们也证明了下述结论:

设 U_x 为缓增广义函数; 为使 $\exp\big(k\sqrt{1+|x|^2}\big)\,U_x$ 在 $k<R$ 时为有界广义函数, 当且仅当 $V(y)=\mathscr{F}U$ 为 y 的解析函数, 在 $|y'|<R$ 时可被延拓成关于 $z=y+iy'$ 的全纯函数, 而延拓后的全纯函数在 $|y'|\leqslant R-\varepsilon$ 时可被 (关于 y 或 z) 的多项式界住.

5) 在一维的情形 $(n=1)$, 我们假设 Γ 是一个开区间 (a,b). 若

$$T\in\mathscr{S}'_x(a,b)\,,\quad \mathscr{L}T=F(p)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-px)\,T_x\,dx$$

在 $a<\xi<b$ 时是一个关于 $p=\xi+i\eta$ 的全纯函数, 则当 $a+\varepsilon\leqslant\xi\leqslant b-\varepsilon$ 时, 它是一个关于 p 的多项式与一个有界全纯函数 $G(p)$ 之积; 反之亦然.

命题 7. *若 Γ 为 Ξ^n 中的非空凸集, 而 $S\in\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 且 $T\in(\mathscr{O}'_C)_x(\Gamma)$, 则 $\mathscr{L}(S*T)$ 为 $\mathscr{L}S$ 与 $\mathscr{L}T$ 之积, 其中对任意 $\xi\in\Gamma$, 该乘积在 $\mathscr{S}'_\eta$ 中的广义函数与 $(\mathscr{O}_M)_\eta$ 中的函数之间进行.*

这是命题 4 的直接推论.

推论. *若 Γ 为开集, 而 $S,T\in\mathscr{S}'_x(\Gamma)$, 则复变量 $p\in\Gamma+i\Xi^n$ 的全纯函数 $\mathscr{L}(S*T)$ 为全纯函数 $\mathscr{L}S$ 和 $\mathscr{L}T$ 之积. 从而代数 $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 没有零因子.*

§4. 从一个广义函数的 Laplace 变换出发对其支集的研究

命题 8.① *设 T_x 为广义函数, 而 $\Gamma\subset\Xi^n$ 为与 T 相伴的凸集 (参见第 1 节). 假设 Γ 非空, 并且 $\xi_0\in\Gamma$.*

为使 T 的支集包含在半空间 $\xi x\geqslant A$ $(\xi\in\Xi^n)$ 中, 当且仅当对任意 $B<A$ 以及对任意的实数 $t\geqslant 0$, 广义函数

$$\exp(tB)\exp\big(-(\xi_0+t\xi)x\big)\,T_x \tag{8.4.1}$$

属于 $\mathscr{S}'_x$, 且当 $t\geqslant 0$ 时保持有界.

① 这个结果属于 Lions 先生. 鉴于它与前面的内容的密切关系, 在征得了 Lions 先生的同意之后, 我将它发表在这里.

1) 条件必要.

我们因此假设 T 的支集包含在 $\xi x \geqslant A$ 中. 我们将证明, 由 $\xi \in \Gamma$ 可导出, 对任意的 $t \geqslant 0$, 均有 $\xi_0 + t\xi \in \Gamma$, 并且 (8.4.1) 在 $\mathscr{S}'_x$ 中有界, 甚至当 $t \to +\infty$ 时, 它还在 $\mathscr{S}'_x$ 中趋于 0. 对此, 我们将证明, 若 $\varphi \in \mathscr{D}_x$ 的支集与原点充分接近, 则由 φ 得到的正则化属于 $(\mathscr{O}_M)_x$ 且当 $t \to +\infty$ 时在该空间中趋于 0.

我们可以假设 φ 的支集包含在带形区域 $|\xi x| \leqslant \varepsilon$ 中. 令

$$\psi_{(t)}(x) = \exp(t\xi x - 2\varepsilon t)\,\varphi(x)\,. \tag{8.4.2}$$

则 $\psi_{(t)}$ 可被 $\exp(-\varepsilon t)$ 界住, 而它关于 x 的各阶偏导数则被 $\exp(-\varepsilon t)$ 与一个关于 t 的多项式的乘积界住, 于是当 $t \geqslant 0$ 时 $\psi_{(t)}$ 在 $\mathscr{D}_x$ 中有界, 且当 $t \to +\infty$ 时在 $\mathscr{D}_x$ 中趋于 0. 由于 $\xi_0 \in \Gamma$ 而 $\big[\exp(-\xi_0 x)\,T_x\big] * \psi_{(t)}$ 的支集包含在半空间 $\xi x \geqslant A - \varepsilon$ 中, 因此我们可以断言, 当 $t \geqslant 0$ 时 $\big[\exp(-\xi_0 x)\,T_x\big] * \psi_{(t)}$ 属于 $(\mathscr{O}_M)_x$, 且当 $t \to +\infty$ 时, 它在该空间中趋于 0. 但

$$\begin{aligned}\exp(tB)\big[\exp\big(-(\xi_0+t\xi)x\big)\,T_x\big]_{(x)} * \varphi(x)\\ = \big[\big(\exp(-\xi_0 x)\,T_x\big) * \psi_{(t)}\big]\big[\exp(-t\xi x + tB + 2\varepsilon t)\big]\,,\end{aligned} \tag{8.4.3}$$

而当 $B \leqslant A - 4\varepsilon$ 时, 在上式右边第一个中括号里的卷积的支集上, 上式右边第二个中括号里的函数可被 $\exp(-\varepsilon t)$ 界住, 而它关于 x 的各阶偏导数则可被 $\exp(-\varepsilon t)$ 与一个关于 t 的多项式的乘积界住; 在此条件下, 上式右边属于 $(\mathscr{O}_M)_x$ 且当 $t \to +\infty$ 时在该空间中趋于 0, 故上式左边亦如此; 又由于 ε 可以任意地小, 命题因此得证.

2) 条件充分.

我们现在假设, 对任意 $t \geqslant 0$, 均有 $\xi_0 + t\xi \in \Gamma$ 且当 $t \geqslant 0$ 时 (8.4.1) 在 $\mathscr{S}'_x$ 中有界. 设 $\psi \in \mathscr{D}_x$ 的支集与原点充分接近, 例如包含在带形区域 $|\xi x| \leqslant \varepsilon$ 中. 这次, 我们令

$$\varphi_{(t)}(x) = \exp(-t\xi x - 2\varepsilon t)\,\psi(x)\,. \tag{8.4.4}$$

如前面一样, 当 $t \geqslant 0$ 时 $\varphi_{(t)}$ 在 $\mathscr{D}_x$ 中有界. 根据假设条件, 将 (8.4.1) 与 $\varphi_{(t)}$ 作卷积后所得到的正则化应在 $(\mathscr{O}_M)_x$ 中有界. 但

$$\begin{aligned}\exp(tB)\big[\exp\big(-(\xi_0+t\xi)x\big)\,T_x\big]_{(x)} * \varphi_{(t)}(x)\\ = \big[\big(\exp(-\xi_0 x)\,T_x\big) * \psi\big]\exp(-t\xi x + tB - 2\varepsilon t)\,,\end{aligned} \tag{8.4.5}$$

上式右边中括号里的函数是一个不依赖 t 的连续函数; 与之相乘的那个指数函数则当 $B \geqslant A - \varepsilon$ 且 $\xi x \leqslant A - 4\varepsilon$ 时, 随着 $t \to +\infty$ 而趋于 $+\infty$; 因此上式右边中括号里的函数的支集包含在半空间 $\xi x \geqslant A - 4\varepsilon$ 中; 而这对支集充分接近原点的任意函数 $\psi \in \mathscr{D}_x$ 均成立, 于是 $\exp(-\xi_0 x)\,T_x$ 的支集, 也就是说 T_x 的支集, 也包含在半空间 $\xi x \geqslant A - 4\varepsilon$ 中; 由于 ε 可以任意小, 故 T 的支集包含在半空间 $\xi x \geqslant A$ 中.

评注. 1) 若 $\xi_0 \in \mathring{\Gamma}$, 则 $\exp(-\xi_0 x)T_x \in (\mathscr{O}'_C)_x$ 且在命题中可将 $\mathscr{S}'_x$ 换成 $(\mathscr{O}'_C)_x$.

2) 使得 T 的支集包含在半空间 $\xi x \geqslant A$ 中的最大的实数 A, 就是使得 (8.4.1) 在 $t \geqslant 0$ 时在 $\mathscr{S}'_x$ 中有界的实数 B 的上确界. 这个上确界因此不依赖 $\xi_0 \in \Gamma$ 的选取. 该方法因此确定了所有包含 T 的支集的半空间, 进而确定了 T 的支集的凸闭包.

由 Laplace 变换立刻可得:

推论. *为使 $T \in \mathscr{S}'_x(\Gamma)$ 的支集包含在半空间 $\xi x \geqslant A$ 中, 当且仅当 T 的 Laplace 变换 $\big(E(\xi)\big)_\eta$ 使得对任意 $B < A$, 以及至少一点 $\xi_0 \in \Gamma$, 均有:*

$$\exp(tB)\big(E(\xi_0 + t\xi)\big)_\eta \quad (t \geqslant 0) \tag{8.4.6}$$

在 $\mathscr{S}'_\eta$ 中有界 (此时对任意的 $\xi_0 \in \Gamma$, 上述性质亦成立).

评注 1. 设 Γ 为开集, 而 $\big(E(\xi)\big)_\eta = F(\xi + i\eta)$. 为使前面的条件成立, 当且仅当对任意的 $\xi_0 \in \Gamma$ 以及任意 $B < A$,

$$\exp(tB)F(\xi_0 + t\xi + i\eta) \quad (t \geqslant 0) \tag{8.4.7}$$

可被一个关于 η (或 p) 的多项式界住.

评注 2. 我们可以给出一个更强的必要条件 (因此更是充分条件). 我们仅在维数 $n = 1$ 时给出该条件:

为使 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数 F 是 $\mathbb{R}$ 上的一个支集包含在半直线 $x \geqslant A$ 中的广义函数 T 的 Laplace 变换, 当且仅当 $|F(p)e^{A\xi}|$ 在 ξ 充分大时可被一个关于 η (或 $|p|$) 的多项式界住.

为此, 设 $T \in \mathscr{D}'$ 的支集包含在半直线 $x \geqslant A$ 中, 而 ξ_0 使得

$$S_x = e^{-\xi_0 x}T_x \in \mathscr{D}'_{L^1}.$$

则最后那个广义函数 S 为支撑在 $x \geqslant A$ 上的可积测度的导数的有限和:

$$\sum_{k \leqslant m} (\mu_k)^{(k)}$$

[首先可将之分解成支撑在 $[A, A+1]$ 上的广义函数 S_1 与支撑在 $[A+1, +\infty)$ 上的可积广义函数 S_2 之和 (第 3 章定理 34. 3°); 又 S_1 为支撑在 $[A, A+1]$ 上的测度的导数有限和 (第 3 章定理 34. 2°); 而 S_2 为可积测度的导数的有限和 (第 6 章定理 15), 在需要时可乘以一个支撑在 $[A, +\infty)$ 上且在 $[A+1, +\infty)$ 的邻域上等于 1 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 从而我们显然可以假设上述测度均支撑在 $[A, +\infty)$ 上].

于是 T 的 Laplace 变换为

$$F(p) = \sum_{k \leqslant m} (-1)^k \int \left(e^{\xi_0 x} e^{-px}\right) d\mu_k(x)$$
$$= \sum_{k \leqslant m} (p - \xi_0)^k \int_{x \geqslant A} e^{-(p-\xi_0)x} \, d\mu_k(x) .$$

从而当 $\xi \geqslant \xi_0$ 时, 我们有:

$$|F(p)| \leqslant |p - \xi_0|^m e^{-A(\xi-\xi_0)} \sum_{k \leqslant m} \int_{x \geqslant A} e^{-(\xi-\xi_0)(x-A)} \, d\mu_k(x) .$$

由于所有 $\int d\mu_k$ 均有限, 由此可推出 F 具有所要的上界估计:

$$|F(p)| \leqslant C e^{-A\xi} |p - \xi_0|^m ,$$

其中 $C > 0$ 为常数. 充分性显然可由评注 1 导出.

第九章 流形上的流

内容提要 第 1 节 (p. 232) 回顾什么是 (带边) 微分流形, 以及这些流形上的寻常形式或挠形式. 人们通常避免使用挠形式; 仅当假设该流形不仅可定向, 而且还是定向时才可避开挠形式, 这样的假设令人相当不舒服; 而挠形式实际上很容易操作.

第 2 节 (p. 238) 定义流形上的寻常流和挠流. 我们给出了大量的例子 (p. 239), 主要源于物理 (电流). 在定向流形的情形 (p. 249), 上述这两种流的概念重合. 该节以有限维向量丛纤维空间的截面 – 广义函数的定义作为结束 (p. 250).

第 3 节 (p. 251) 研究流上的运算: 外积 (p. 251), 与一个向量场的内乘 (p. 253), 上边缘或外微分 (p. 253) 以及各种例子, 无穷小变换求导运算 (p. 259). 该节以流的上同调 (广义 de Rham 定理, 定理 1, p. 261) 作为结束.

第 4 节 (p. 267) 研究流在映射下的直接像. 而定理 2 (p. 269) 则总结了上述直接像的主要性质; 我们随后给出许多例子 (p. 270). 定理 2′ (p. 271) 给出了一个在实际应用中很有用的同构.

第 5 节 (p. 275) 研究流的逆像, 也即流中的变量替换. 我们逐步引入了这个逆像, 并将它的性质总结在定理 3 中 (p. 278). 接下来还要知道该定理何时可用. 我们首先处理局部微分同胚的情形 (p. 279), 并给出了一些例子 (p. 279). 随后我们在纤维流形上研究微分形式在纤维上的偏积分的概念; 由此可得从 m 维流形 U^m 到 n 维流形 V^n 的、秩为 n 的变换所给出的变量替换的一般情形 (定理 4, p. 287). 我们也给出了这方面的一些例子 (p. 288).

第 6 节研究不变形式下的 Fourier 变换: 有限维向量空间上的缓增偶流和奇流的 Fourier 变换. 之前它曾被 SCARFIELLO [1] 研究过.

§1. 无穷可微流形上的偶形式与奇形式

寻常形式或偶形式 我们假设大家已了解微分流形的主要性质, 而为了避免罗嗦与复杂, 我们通常只限于给出证明的概要①. 除非特别指出为相反的情形, 流形是指: 实数域上 σ–紧的、分离的、无穷可微流形.

提醒大家, 在一个 (或许带边的②) n 维流形 $V = V^n$ 上, 我们已知道 m 阶连续可微 (也即 $\mathscr{C}^m$ 类) 函数以及无穷可微 (也即 $\mathscr{C}^\infty$ 类) 函数的概念. 我们也知道什么是从一个流形到另外一个流形的无穷可微映射.

特别地, 一个可逆映射被称为微分同胚, 若其本身以及它的逆均为无穷可微. 于是 V 的一个坐标卡由两部分组成: 流形 V 的一个开子集 Ω (坐标卡的定义域), 以及从 Ω 到 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n_-$ ($\mathbb{R}^n$ 的子空间 $x_1 \leqslant 0$) 的一个开子集的微分同胚 H. 由 V 的所有坐标卡的全体构成的集合称为 V 的图册. 而 V 的一个部分图册是指一族坐标卡, 它们的定义域构成了 V 的一个覆盖.

我们也知道什么是流形 V 上的 p–形式, 即 p 次微分形式, 也即 p–余向量场; 一个 p–形式在 V 的一点处的值就是该点处的一个 p–余向量; 当 $p < 0$ 或 $p > n$ 时, 我们认为只有唯一一个 p–形式, 即 0. 我们知道什么是 m 阶连续可微 (即 $\mathscr{C}^m$ 类) 或局部可积 p–形式: 大家应将之理解成该 p–形式被坐标卡所定义的任意微分同胚转换成 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n_-$ 的某个开集上的 p–形式, 其系数为 m 阶连续可微或局部可积函数. 这里所研究的形式均为复值.

---

① 关于流形方面的研究, 大家可查询, 比如说, DE RHAM [3], HELGASON [1].

② 虽然带边无穷可微流形以隐含的方式广为人知, 但它并不总是明白地出现在文献中. 利用边界上的点的邻域的坐标卡, 我们可在拓扑空间 $\mathbb{R}^n_-$ ($\mathbb{R}^n$ 的子空间 $x_1 \leqslant 0$) 的一个开集上来表示上述邻域. 因此 V^n 上的可微函数的概念可归结为 $\mathbb{R}^n_-$ 上的可微函数的概念; 而对于定义在 $\mathbb{R}^n_-$ 上的函数可立刻定义其偏导数 (在超平面 $x_1 = 0$ 上的一点处计算关于 x_1 的偏导数时, 只能用函数在其定义域 $x_1 \leqslant 0$ 内的值). 我们时常需要知道 $\mathbb{R}^n_-$ 上的任意 m 阶连续可微函数 φ 其实是 $\mathbb{R}^n$ 上的某一个 m 阶连续可微函数 Φ 在 $\mathbb{R}^n_-$ 上的限制. 我们可用一个完全初等的方式来得到这样的延拓. 当 m 为有限时, 对任意的 $x_1 > 0$, 令:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \varphi(-\nu x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n),$$

其中所选取的 c_ν 满足 Vandermonde 方程组:

$$\sum_{\nu}^{m} c_\nu (-\nu)^k = 1 \quad (0 \leqslant k \leqslant m),$$

从而 Φ 在 $x_1 > 0$ 上的所有阶不大于 m 的偏导数在 $x_1 \to 0$ 时与 φ 的相应偏导数一致. 若 φ 的支集为紧集, 则 Φ 的支集亦如此. 当 m 为无穷时, 事情最难处理. 我们可借助, 比如说 WHITNEY [4] 中的延拓定理 (定理 1, p. 65) 或 SEELEY [1] 中的延拓定理. Whitney 给出了一个定义在 $x_1 > 0$ 上的解析延拓, 而这对我们来说是不必要的; 若 φ 具有紧支集, 而 α 为 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 属于 $\mathscr{D}$ 且在 φ 的支集的邻域上等于 1, 则 $\alpha\Phi$ 也为 φ 的一个延拓, 但其支集为紧集.

我们称一个连续 p-形式的支集为由这样的点所组成的集合的闭包, 在每点处, 由该 p-形式定义的 p-余向量不为 0. 我们记 $\overset{p}{\mathscr{D}}{}^m$ (相应地, $\overset{p}{\mathscr{D}}$) 为具有紧支集的 m 阶连续可微 (相应地, 无穷可微) p-形式所组成的空间 [当有必要指出空间 V 时, 我们也将记之为 $\overset{p}{\mathscr{D}}{}^m(V)$ [相应地, $\overset{p}{\mathscr{D}}(V)$]]; 在由支集包含在 V 的紧子集 K 中的 p-形式构成的子空间 $\overset{p}{\mathscr{D}}{}^m_K$ [相应地, $\overset{p}{\mathscr{D}}_K$] 上, 我们赋予如下拓扑: 称 φ_j 在 $\overset{p}{\mathscr{D}}{}^m_K$ [相应地, $\overset{p}{\mathscr{D}}_K$] 中趋于 0, 若它们可被坐标卡定义的任意微分同胚转换成 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n_-$ 的某个开子集上的 p-形式, 这些 p-形式本身及其阶不大于 m 的偏导数 (相应地, 本身及其各阶偏导数) 在上述开集的任意紧子集上一致趋于 0. 随后我们在 $\overset{p}{\mathscr{D}}{}^m$ (相应地, $\overset{p}{\mathscr{D}}$) 上赋予通常的正向极限拓扑. 若 $(\Omega_i)_{i\in I}$ 为 V 的一个开覆盖, 则存在从属于该覆盖的一个无穷可微单位分解 (第 1 章定理 2). 其证明可以像在 $\mathbb{R}^n$ 上一样来进行.

稠密性定理 (第 1 章定理 1[①]) 在 V^n 上同样成立. 对任意 $\varphi \in \overset{p}{\mathscr{D}}{}^m_K$, 可将之写成

$$\varphi = \sum_i \alpha_i \varphi,$$

其中 $(\alpha_i)_{i\in I}$ 为从属于某个部分图册的单位分解. 由此可将问题归结为关于 $\alpha_i\varphi$ 的稠密性定理, 而这则可以借助微分同胚 H_i^{-1} 所定义的从 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n_-$ 出发的转换变换来很容易地证明.

我们通常将 p-形式之和 (p 从 0 变到 n) 称为一个形式:

$$\omega = \sum_{p=0}^{n} \overset{p}{\omega},$$

其中 $\overset{p}{\omega}$ 是 ω 的次数为 p 的分量. 称一个形式为齐次形式, 若至多除了一个以外, 该形式的所有其它分量均为零; 除非是次数未定的零形式, 每个齐次形式因此具有确定的次数. 从而根据定义可知, 由所有形式组成的空间就是所有的 p-形式空间的直和. 我们将在空间 $\mathscr{D}^m$ 或 $\mathscr{D}$ 上赋予 $\overset{p}{\mathscr{D}}{}^m$ 或 $\overset{p}{\mathscr{D}}$ 的直和拓扑. 我们刚才所研究的形式, 即寻常形式, 也被称为偶类形式或偶形式.

奇形式或挠形式[②] 我们现在定义另外一类形式 - 奇类形式, 也称奇形式或挠形式.

设 $\widetilde{V}$ 为 V 的典则定向覆盖. 这是由 V^n 中点以及切空间在该点处的一个定向组成的序偶所构成的集合[③]. 这是 V 的一个次数为 2 的覆盖. 它因此还是一个基空间为 V 的纤维空间, 而在 V 的一点处的纤维典则同构于由切空间在该点处的两个定向所组成的集合.

---

① 定理 1 仅在 $\mathbb{R}^n$ 的情形被证明了, 但它也在 $\mathbb{R}^n_-$ 中成立. 设 $\varphi \in \mathscr{D}^m(\mathbb{R}^n_-)$. 我们可将之延拓成一个函数 $\Phi \in \mathscr{D}^m(\mathbb{R}^n)$. 对 Φ 应用定理 1 可得一列函数 $\Phi_j \in \mathscr{D}^m(\mathbb{R}^n)$, 该函数列在某个 $\mathscr{D}^m_H(\mathbb{R}^n)$ 中趋于 Φ; 它们在 $\mathbb{R}^n_-$ 上的限制 φ_j 为 $\mathscr{D}^m(\mathbb{R}^n_-)$ 中的函数且在某个 $\mathscr{D}^m_{H\cap\mathbb{R}^n_-}(\mathbb{R}^n_-)$ 中趋于 φ.

② 参见 DE RHAM [3], 第 2 章第 5 节, p. 21.

③ 提醒大家, 若 V^0 退化成一点 (零维), 则我们称 V 在该点处的定向为符号 $+, -$ 当中的一个.

上述 $\widetilde{V}$ 也为无穷可微流形, 且具有典则的定向. 事实上, 若 $\tilde{a}$ 为 $\widetilde{V}$ 中的点, 则它是由 V 中的点 a 以及 V 在点 a 处的切空间的某个定向 O 所组成的序偶 (a,O); 从 $\widetilde{V}$ 到 V 的自然投影在点 $\tilde{a}$ 处具有一个线性切映射, 该映射是一个同构; 该同构的逆映射将 O 转移到 $\widetilde{V}$ 在点 $\tilde{a}$ 处的切空间上并在它上面定义了一个定向.

我们将从 $\widetilde{V}$ 到 V 的投影记作 P, 而将 $\widetilde{V}$ 中位于 V 的每点之上的那两点进行互换的对称映射记作 σ. 流形 V 上的形式 ω 在 $\widetilde{V}$ 上有一个逆像 $P^*\omega$. 这是 $\widetilde{V}$ 上的一个 σ–不变的形式; 而 $\widetilde{V}$ 上的任意 σ–不变形式则反过来为 V 上的某个形式的逆像. 故在 V 上的偶形式与 $\widetilde{V}$ 上的 σ–不变形式之间存在着一个双射. 我们因此将 $\widetilde{V}$ 上的 σ–反变形式, 也即被对称映射 σ 变为它的相反形式的形式, 称为 V 上的奇形式或挠形式. 我们将 V 上的挠形式记作 $\underline{\omega}$, 而将 $\widetilde{V}$ 上那个用来定义它的 σ–反变形式记作 $\tilde{\omega}$①. 对于奇形式, 我们显然也可以定义齐次形式, 次数, 支集, 可微性等概念.

我们将 V 上具有紧支集的 m 阶连续可微奇形式所组成的空间记作 $\underline{\mathscr{D}}^m$. 同样可引入类似空间 $\underline{\mathscr{D}}$, $\overset{p}{\underline{\mathscr{D}}}{}^m$, $\overset{p}{\underline{\mathscr{D}}}$ 以及这些空间上的显然拓扑. 稠密性定理 (第 1 章定理 1) 则是平凡的. 我们也将一个偶形式与一个奇形式之和称为形式. "寻常形式, 挠形式" 通常比 "偶形式, 奇形式" 这样的叫法更好, 后者易与偶次数或奇次数的形式混淆.

定向流形上的偶形式与奇形式 若 V 为定向流形, 我们可在偶形式与奇形式之间定义一个典则等同. 覆盖 $\widetilde{V}$ 实际上是不相交的流形 $\widetilde{V}_+$ 和 $\widetilde{V}_-$ 的并, 投影 P 为从 $\widetilde{V}_+$ 到 V 上的保定向微分同胚, 而为从 $\widetilde{V}_-$ 到 V 上的变定向微分同胚. 我们将 P 在 $\widetilde{V}_+$ 和 $\widetilde{V}_-$ 上的限制分别记作 P_+ 和 P_-. 若 ω 为偶形式, 也就是说是 V 上的一个寻常形式, 则那个在 $\widetilde{V}_+$ 上等于 $P^*\omega$ 而在 $\widetilde{V}_-$ 上等于 $-P^*\omega$ 的形式显然为 σ–反变, 因此定义了一个 V 上的奇形式 $\underline{\omega}$. 反过来, 如果 $\underline{\omega}$ 是由 $\widetilde{V}$ 上的 σ–反变形式 $\tilde{\omega}$ 所定义的 V 上的一个奇形式, 则微分同胚 P_+ 将 $\tilde{\omega}$ 转换成 V 上的一个偶形式 ω, 依照前面的方法由后者可给出 $\underline{\omega}$. 上面定义的 ω 到 $\underline{\omega}$ 对应是相同次数的偶形式空间与奇形式空间之间的一个关于所研究的所有结构的同构. 在定向流形上, 如果我们愿意, 我们也可以避免考虑这两类形式而总是将对应的偶形式与奇形式视为等同. 除非特别指出相反的情形, 我们将在后面总是做这样的约定, 并将它们简称为形式. 这也表明, 如果 V 是一个可定向连通流形, 我们自然可以将一个奇形式 $\underline{\omega}$ 看成是一对偶形式 ω', ω'', 它们彼此反号, 且分别与 V 的两个可能的定向 V', V'' 相对应. 事实上,

① 大家可能会对两个按定义应完全相同的东西采用不同的记号而感到奇怪. 这两个记号事实上指出研究同一对象的两个不同方法. 现给出一个例子: "$\underline{\omega}$ 的支集" 是说 "V 上的挠形式 $\underline{\omega}$ 的支集", 它是 V 的一个闭子集; 而 "$\tilde{\omega}$ 的支集" 则是说 "$\widetilde{V}$ 上的寻常形式 $\tilde{\omega}$ 的支集", 它是 $\widetilde{V}$ 的一个闭子集; 第一个支集为第二个支集的投影. 可注意到 $\tilde{\omega}$ 并不是 $\underline{\omega}$ 在 P 下的逆像 $P^*\underline{\omega}$, 后者没有任何意义. 挠形式在映射下没有逆像; 另外 $\underline{\omega}$ 是一个挠形式, 而 $\tilde{\omega}$ 是一个寻常形式. 但平凡地存在一个从 $\widetilde{V}$ 到 V 的定向映射 $\underline{P}$ (参见第 237 页, 与 $\underline{P}$ 相伴映射为 P) 使得 $\underline{P}^*\underline{\omega}$ 为 $\widetilde{V}$ 上的挠形式, 但由于 $\widetilde{V}$ 为定向流形, 则我们可与之对应一个寻常形式 $\underline{P}^*\omega$ (参见第 234 页), 而后者正是 $\tilde{\omega}$.

在挠形式下画划下划线可将它们与寻常形式迅速区分开; 但我们不会受它束缚而常将之省略掉.

我们可以将覆盖 $\widetilde{V}$ 看成是两个不相交的流形 $\widetilde{V}'$ 和 $\widetilde{V}''$ 的并, 从而使得 P 在这里也为 $\widetilde{V}'$ 到 V' 和 $\widetilde{V}''$ 到 V'' 的保定向微分同胚. 于是我们总可以在 V 上与奇形式 $\underline{\omega}$ 对应一个 σ–反变形式 $\tilde{\omega}$, 从而与之对应 $\widetilde{V}'$ 和 $\widetilde{V}''$ 上的两个形式 $\tilde{\omega}'$ 和 $\tilde{\omega}''$. 这两个形式在 P 下的像正好是 V 上的两个反号的形式 ω', ω'', 且分别对应于 V 的两个定向 V', V''. 若 V 不仅可定向而且还是定向的, 比如说 V' 为其定向, 则上面所指出的奇形式与偶形式之间的对应, 就是将 ω' 与 $\underline{\omega}$ 相对应.

若现在 V 不一定可定向, 我们可以考虑由可定向开集组成的 V 的任意覆盖, 并通过由这些开集上按照前面的方法定义的奇形式所组成的相容系统来在 V 上定义一个奇形式. 另外, 一个 p 次挠形式就是一个 p 次挠余向量场, 而点 $a \in V$ 处的一个 p 次挠余向量就是点 a 处的一对反号的 p 次余向量, 它们分别与 V 在点 a 处的两个定向相对应.

形式之间的外积 我们可以定义形式之间的外积. 两个偶形式或两个奇形式的外积是一个偶形式. 而一个偶形式与一个奇形式的外积则是一个奇形式.

我们已知道两个偶形式的情形.

设 α 为偶形式而 $\underline{\beta}$ 为奇形式. 则 $P^*\alpha$ 和 $\tilde{\beta}$ 为 $\widetilde{V}$ 上的偶形式, 分别为 σ–不变和 σ–反变. 故 $P^*\alpha \wedge \tilde{\beta}$ 为 σ–反变; 它因此在 V 上定义了一个奇形式 $\underline{\gamma}$, 其中

$$P^*\alpha \wedge \tilde{\beta} = \tilde{\gamma}\,.$$

由定义可知 $\alpha \wedge \underline{\beta} = \underline{\gamma}$. 若现在 $\underline{\alpha}$ 和 $\underline{\beta}$ 为 V 上的两个奇形式, 我们将借助

$$P^*\gamma = \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}$$

来定义偶形式 $\gamma = \underline{\alpha} \wedge \underline{\beta}$.

关于内乘, 我们仅满足于指出我们可以定义一个偶形式 (相应地, 奇形式) 与一个多重向量场 ξ 的左内乘或右内乘, 而得到一个具有相同性质的形式, 也就是说偶形式 (相应地, 奇形式)[①]. 若 ξ 为向量场, 我们记 $i(\xi)$ 为由

$$\omega \to \omega \,\mathbf{L}\, \xi = i(\xi)\omega$$

所定义的作用在偶形式或奇形式上的运算; 它是下述意义下的分级代数求导运算:

$$i(\xi)\big(\overset{p}{\alpha} \wedge \beta\big) = \big(i(\xi)\,\overset{p}{\alpha}\,\big) \wedge \beta + (-1)^p\,\overset{p}{\alpha} \wedge \big(i(\xi)\beta\big)\,,$$

其中 $\overset{p}{\alpha}$ 的次数为 p.

---

① 参见 BOURBAKI [9], 第 3 章第 8 节第 4° 段.

空间 $\mathbb{R}^n$ 上的形式 当 $V=\mathbb{R}^n$ 时, 我们知道寻常 p–形式具有如下典则分解:

$$\omega=\sum_I \omega_I\, dx_I\,, \tag{9.1.1}$$

其中 ω_I 为函数, 而 I 跑遍集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的所有 p 元子集组成的集合, 并且若 I 为 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的子集 $\{i_1,i_2,\ldots,i_p\}$ $(i_1<i_2<\cdots<i_p)$, 则 dx_I 表示外积

$$dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\cdots\wedge dx_{i_p}\,.$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 上的挠形式 $\underline{\omega}$, 我们也有类似分解, 但 $\underline{\omega}_I$ 则会是一些挠函数. 由于 $\mathbb{R}^n$ 具有一个典则定向, 因此一个挠函数 $\underline{f}$ 是一对反号的寻常函数 f_+,f_-, 前者对应于 $\mathbb{R}^n$ 的典则定向, 而后者对应于与典则定向相反的定向; 由 $\mathbb{R}^n$ 的典则定向所定义的挠函数与寻常函数之间的对应, 就是将 $\underline{f}$ 与 f_+ 相对应.

关于此问题, 可注意到在 $\mathbb{R}$ 上广泛采用的那些记号很是含糊不清. 记号 dx 可以表示 x 的外微分, 这是一个次数为 1 的偶形式; 从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

是次数为 1 的偶形式 $f(x)\,dx$ 在赋予了典则定向的直线上的积分. 但 dx 也可表示 Lebesgue 测度, 这是一个次数为 1 的奇形式; 而

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$$

则是次数为 0 的奇形式 $f(x)\,dx$ 在没有定向的直线上的积分. 这些次数为 0 的偶形式与奇形式借助 $\mathbb{R}$ 的典则定向来彼此对应. 同样地, 在 $\mathbb{R}^n$ 上, 记号 dx 既可以表示次数为 n 的偶形式 $dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$, 也可以表示由 Lebesgue 测度所定义的次数为 n 的奇形式. 我们可以用记号 dx 表示那个偶形式而用 $\underline{dx}$ 来表示那个奇形式, 从而可以很容易地将它们区分开.

我们有时需要对形式做除法. 设 α,β,λ 为三个 (偶或奇) 形式, 并假设 $\alpha=\beta\wedge\gamma$. 大家可能会试图将之记作 $\gamma=\beta^{-1}\wedge\alpha$.

但这个记号毫无意义. 不过我们依然可以在下述两种情形使用这个记号.

1) 若 α 和 β 的次数相同, 则 γ 的次数为 0. 从而当 β 不为零时, 由 α 和 β 就可以完全确定 γ, 此时上述记号是合适的.

2) 赋予 $\mathbb{R}^n$ 典则定向. 设 $i_1,i_2,\ldots,i_p,j_1,j_2,\ldots,j_q$ 为 1 和 n 之间的整数. 约定:

$$(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p})^{-1}\wedge(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_q})=dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_q}\,.$$

从而常用的形式 $(-1)^{k-1}dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge x_{k-1}\wedge dx_{k+1}\wedge\cdots\wedge dx_n$ 可以简写成:

$$(dx_k)^{-1}\wedge(dx_1\wedge dx_2\cdots\wedge dx_k\wedge\cdots\wedge dx_n)=(dx_k)^{-1}\wedge dx\,.$$

同样地, 可用记号 $\alpha\wedge\beta^{-1}$ 来表示满足 $\alpha=\gamma\wedge\beta$ 的 γ. 于是:

$$dx\wedge(dx_k)^{-1}=(-1)^{n-k}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{k-1}\wedge dx_{k+1}\cdots\wedge dx_n\,.$$

对于奇形式也存在同类型的记号.

可注意到我们也可以使用内乘. 如果 $\vec{e}_k$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的标准基底中的第 k 个向量, 则 $(dx_k)^{-1}\wedge dx$ 也可记作 $i(\vec{e}_k)dx$.

形式的逆像 设 H 是一个从流形 U 到流形 V 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类映射. 若 ω 为 V 上的 $\mathscr{C}^m$ 类 p–形式, 我们可以定义其逆像 H^*U 为 U 上的 $\mathscr{C}^m$ 类 p–形式. 运算 $H^*:\omega\to H^*\omega$ 为线性, 保形式的外积 $[H^*(\alpha\wedge\beta)=(H^*\alpha)\wedge(H^*\beta)]$ 以及外微分 $[H^*d\omega=dH^*\omega]$; 而 $H^*\omega$ 的支集则包含在 ω 的支集在 H 下的逆像中. 所有这些均对寻常形式成立; *挠形式没有逆像*.

假设 $\widetilde{H}$ 是一个从 U 到 V 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类"定向映射"①. 这意味着 $\widetilde{H}$ 是一个从 $\widetilde{U}$ 到 $\widetilde{V}$ 的 σ–不变的 $\mathscr{C}^\infty$ 类映射:

$$\widetilde{H}\sigma_{\widetilde{U}}=\sigma_{\widetilde{V}}\widetilde{H}\,.$$

这等价于说 $\widetilde{H}$ 是一个从 U 上的纤维丛空间 $\widetilde{U}$ 到 V 上的纤维丛空间 $\widetilde{V}$ 的同态. 于是 $\widetilde{H}$ 定义了一个 U 到 V 的寻常映射 H; 而 $\widetilde{H}$ 甚至正是由这样的一个映射 H 以及对任意 $x\in U$, 从 U 在点 x 处的两个定向组成的集合到 V 在点 $H(x)$ 处的两个定向组成的集合的一个连续依赖 x 的双射来给出. 若 $\underline{\omega}$ 为 V 上的 p 次挠形式, 我们可以定义其逆像 $\widetilde{H}^*\underline{\omega}$ 为 U 上的 p 次挠形式, 它由 $\widetilde{H}$ 上 σ–反变 p–形式 $\widetilde{H}^*\widetilde{\omega}$ 来定义. 从一个定向映射 $\widetilde{H}$ 出发, 我们因此可以同时定义 p 次挠形式 $\underline{\omega}$ 的逆像 $\widetilde{H}^*\underline{\omega}$, 以及寻常形式 ω 的逆像 $H^*\omega$. 又 $\widetilde{H}$ 与 d 交换, 并且我们还有公式

$$(9.1.2)\qquad \begin{cases}\widetilde{H}^*(\underline{\alpha}\wedge\beta)=(\widetilde{H}^*\underline{\alpha})\wedge(H^*\beta)\,,\\ H^*(\underline{\alpha}\wedge\underline{\beta})=(\widetilde{H}^*\underline{\alpha})\wedge(\widetilde{H}^*\underline{\beta})\,,\end{cases}$$

一旦将 U 或 V 上的寻常形式 ω 与它在 $\widetilde{U}$ 或 $\widetilde{V}$ 上的 σ–不变逆像 $P^*\omega$ 视为等同, 则上述公式就是显然的; 又 $\widetilde{H}$ 与投影映射 P 相容:

$$HP_U=P_V\widetilde{H}\,,$$

从而 $\widetilde{H}^*P_V^*\omega=P_U^*H^*\omega$, 而公式 (9.1.2) 则正好等价于说 $\widetilde{H}^*$ 保 $\widetilde{U}$ 和 $\widetilde{V}$ 上的寻常形式, σ–不变形式, σ–反变形式, 以及任意形式之间的乘积.

① 参见 DE RHAM [3], 第 2 章第 5 节, p. 21.

$\mathscr{C}^\infty$ 类形式的上同调 设 $\overset{p}{\mathfrak{Z}}$ 为 V 上所有 $\mathscr{C}^\infty$ 类 p 次闭形式 (也即上边缘为零的形式) 组成的空间; 设 $\overset{p}{\mathscr{B}}$ 为 V 上所有 $\mathscr{C}^\infty$ 类 p 次上边缘形式 (也即 $\mathscr{C}^\infty$ 类 $p-1$ 次形式的上边缘) 组成的空间. 商空间 $\overset{p}{\mathfrak{Z}}/\overset{p}{\mathscr{B}}$ 就是 V 的关于 p 次 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式的上同调向量空间; 其维数称为 V 的第 p 个 Betti 数. 我们知道 (de Rham 定理①) 该空间可被看成是等同于 V 的复上同调向量空间. 挠上同调向量空间为 $\underline{\overset{p}{\mathfrak{Z}}/\overset{p}{\mathscr{B}}}$, 可在前面的定义中将形式换成挠形式而得; 该空间同构于挠复上同调向量空间. 我们可通过要求所考虑的形式具有紧支集来得到具有紧支集的上同调. 上同调类之间可像形式本身那样来做乘法; 例如, 上同调向量空间为所有 p-上同调向量空间 ($p=0,1,2\ldots$) 的直和, 它是 $\mathbb{C}$ 上的一个代数, 而挠上同调向量空间则是该代数上的一个模. 如果 H 是一个从流形 U 到另外一个流形 V 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类映射, 则 H^* 与外微分 d 以及乘积的交换性表明 H^* 是一个从 V 的上同调代数到 U 的上同调代数的同态. 若 $\widetilde{H}$ 为定向映射, 则 $\widetilde{H}^*$ 将 V 的挠上同调向量空间映到 U 的挠上同调向量空间. 若 H 为逆紧映射 (也即 V 的任意紧子集在 H 下的逆像为 U 的紧子集), 则 $\widetilde{H}^*$ 将 V 的具有紧支集的上同调向量空间映到 U 的具有紧支集的上同调向量空间, 等等.

§2. 流形上的偶流与奇流

流② 我们将 $\overset{n-p}{\mathscr{D}}$ 上的连续线性型称为 V^n 上的 p 次奇流, 而将 $\underline{\overset{n-p}{\mathscr{D}}}$ 上的连续线性型称为 V^n 上的 p 次偶流. 大家在后面将可以看到这样的选择的理由 (第 239 页例 1). 奇流 $\underline{\overset{p}{T}}$ 在形式 $\overset{n-p}{\varphi}$ 处的值将被记作 $\underline{T}(\varphi)$ 或 $\langle \underline{T}, \varphi\rangle$ 或 $\underline{T}.\varphi$. 但大家不要交换 $\underline{T}$ 和 φ 而将之记作 $\langle \varphi, \underline{T}\rangle$ 或 $\varphi.\underline{T}$. 相反, 我们约定

$$\varphi.\underline{T} = \langle \varphi, \underline{T}\rangle = (-1)^{p(n-p)}\underline{T}.\varphi = (-1)^{p(n-p)} = \langle T, \varphi\rangle. \tag{9.2.1}$$

对于偶流 T 和奇形式 $\underline{\varphi}$ 亦如此. 我们将 p 次奇流 (p 从 0 变到 n) 的形式上的和称为奇流. 这等价于将奇流空间看成是所有 p 次奇流空间的直和 (p 从 0 变到 n). 对于偶流可以做同样的事情. 称一个流为齐次的, 若至多除了一个以外, 该流的所有其它分量均为零. 对于偶形式

$$\varphi = \sum_{p=0}^{n} \overset{p}{\varphi}$$

以及奇流

$$\underline{T} = \sum_{p=0}^{n} \underline{\overset{p}{T}},$$

① 参见 DE RHAM [3], 第 4 章第 21 节定理 16.

② 早在广义函数之前, de Rham 就在一个特殊的情形引入了流; 参见本书引论部分第 xvii 页. 大家可在 DE RHAM [3] 中找到一个更为一般的理论.

我们因此令

$$\underline{T}(\varphi)=\sum_{p=0}^{n}\overset{p}{\underline{T}}\left(\overset{n-p}{\varphi}\right), \tag{9.2.2}$$

如同往常一样, 这等价于将直和的对偶等同于对偶的直和. 在像上面那样定义了奇流在偶形式处的值之后可知, 一个奇流为 p 次齐次流, 也就是说所有次数异于 p 的分量均为零, 当且仅当它在所有次数不等于 $n-p$ 的齐次偶形式处为零. 我们也可以将一个偶流与一个奇流的形式上的和称为流, 并令

$$\langle T_1+\underline{T_2},\varphi_1+\underline{\varphi_2}\rangle=\langle T_1,\underline{\varphi_2}\rangle+\langle\underline{T_2},\varphi_1\rangle\,. \tag{9.2.3}$$

我们将所有的 p 次奇流 (相应地, 偶流) 组成的空间记作 $\overset{p}{\underline{\mathscr{D}'}}$ (相应地, $\overset{p}{\mathscr{D}'}$); 而将所有的奇流 (相应地, 偶流) 组成的空间记作 $\underline{\mathscr{D}'}$ (相应地, $\mathscr{D}'$). 如同对广义函数一样, 我们也可以定义阶不大于 m 的流, 以及空间 $\overset{p}{\mathscr{D}'^m}$, $\overset{p}{\underline{\mathscr{D}'^m}}$, $\mathscr{D}'^m$, $\underline{\mathscr{D}'^m}$; 其中 $\mathscr{D}'^m$ 和 $\underline{\mathscr{D}'^m}$ 分别为 $\mathscr{D}'$ 和 $\underline{\mathscr{D}'}$ 的子空间. *注意不要将一个流的用于揭示其局部奇异性的阶与其次数相混淆.* 我们可以毫不含糊地定义 V 上的流在 V 的开子集上的限制, 局部化原理 (分片粘贴定理, 第 1 章定理 4) 以及流的支集的概念. 只有 T 为奇流 (相应地, 偶流) 而 φ 为无穷可微偶形式 (相应地, 奇形式) 且它们的支集的交为紧集 (第 3 章第 7 节), 我们就同样可以定义 $T(\varphi)$. 这些流的空间上的拓扑并不会引入特别的新东西.

例子

例 1. 由一个形式所定义的流 首先提醒大家, 在 n 维定向流形 V 上, 我们可定义支集为紧集的局部可积 n 次微分形式 ω 的积分 $\int\omega$. 由此可以容易地推出, 若 V 是一个没有定向的 n 维流形, 我们可在 V 上定义支集为紧集的局部可积 n 次奇形式 $\underline{\omega}$ 的积分. 事实上, 若 $\tilde{\omega}$ 为 $\underline{\omega}$ 在定向覆盖 $\widetilde{V}$ 上所定义的形式, 则只需令

$$\int_V\underline{\omega}=\frac{1}{2}\int_{\widetilde{V}}\tilde{\omega}\,. \tag{9.2.4}$$

添加因子 $\frac{1}{2}$ 是基于一些显然的理由; 若 V 为定向流形, 我们知道 (p.234) 可与 $\underline{\omega}$ 相伴一个寻常形式 ω; 而我们希望 $\underline{\omega}$ 在 V 上的积分等于 ω 在定向的 V 上的积分.

若 V 退缩成一点 a (零维), 则一个次数为 0 的偶形式就是一个复数 z; 该形式在赋予了定向 $\pm$ 的流形 a 上的积分等于 $\pm z$. 而一个次数为 0 的奇形式则是分别与符号 $\pm$ 对应的两个反号复数 $\pm z$ 组成的系统; 它在没有定向的流形 a 上的积分为 z.

"一个不一定为齐次的奇形式在 V 上的积分"这个说法时常会给我们带来便利. 根据定义, 这是指奇形式次数为 n 的分量的积分. 一个偶形式在没有定向的 V 上的积分则根据定义等于 0. 设 ω 是一个具有紧支集的局部可积 p 次偶形式. 若 $\underline{\varphi}$ 是一个属于 $\overset{n-p}{\underline{\mathscr{D}}}$ 的奇形式, 则外积 $\omega\wedge\underline{\varphi}$ 是一个具有紧支集的局部可积 n 次奇形式. 因此

它有积分, 且我们可以毫无困难得知

$$\omega(\underline{\varphi}) = \int_V \omega \wedge \underline{\varphi} \tag{9.2.5}$$

在 $\overset{n-p}{\underline{\mathscr{D}}}$ 上定义了一个连续线性型, 也就是说一个 p 次偶流. 正是一个局部可积的 p 次偶形式定义了一个 p 次偶流这个事实, 促使我们采用在本节开始时所给出的定义 (该定义推广了与 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数相伴的广义函数的定义). 易见两个 p–形式定义了同一个流当且仅当它们几乎处处相等 ①. 同样地, 一个 p 次奇形式定义了一个 p 次奇流: 这次只需取 φ 为 $n-p$ 次偶形式. 可注意到, 若

$$\omega.\underline{\varphi} = \int_V \omega \wedge \underline{\varphi},$$

则由 (9.2.1) 给出的定义表明

$$\underline{\varphi}.\omega = \int_V \underline{\varphi} \wedge \omega .$$

另外, 无需具体指出次数上述公式也成立; 若 ω 为偶形式, 它所定义的流由 (9.2.5) 给出, 其中奇形式 φ 为的次数无需确定. 我们甚至也不需要具体指出其奇偶性: 一个局部可积形式 ω (一个偶形式与一个奇形式的形式上的和) 定义了一个流

$$\varphi \to \int_V \omega \wedge \varphi,$$

其中 φ 为具有紧支集的任意 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式.

特别地, 流形 V 上的一个局部可积函数定义了一个次数为 0 的偶流.

支集为紧集的 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式在流空间内稠密 (即便 V 是一个带边流形); 事实上, 若 $\varphi \in \mathscr{D}$ 与 $\mathscr{D}$ 正交, 也就是说对任意的 $\omega \in \mathscr{D}$, 均有

$$\int_V \omega \wedge \varphi = 0,$$

则我们易知 $\varphi = 0$, 从而 $\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{D}'$ 中弱稠密, 进而 $\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{D}'$ 中强稠密, 这是因为 $\mathscr{D}$ 为 Montel 空间, 因此为自反空间.

例 2. 积分; 流的积分 将任意 $\underline{\varphi} \in \overset{n}{\underline{\mathscr{D}}}$ 与积分 $\int_V \underline{\varphi}$ 相对应的线性型是一个次数为 0 的偶流, 它不是别的而是由常数函数 1 定义的次数为 0 的流 (例 1). 也可注意到, 若 T 是一个具有紧支集的任意流, 我们也可定义 $T(1)$ (恒为零, 若 T 是一个次数不等于 n 的齐次奇流, 或者是一个偶流). 将之称为 T 的积分并记作 $\int_V T$ 是合理的, 因为当 T 是一个具有紧支集的局部可积形式时, 这的确是它的积分 [见公式 (9.2.5)].

① 在无穷可微流形 V 上, "几乎处处相等"是说: 例外集在从 V 的开子集到 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n_-$ 的开子集的任意坐标卡下的像关于 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度为零测集. 为此, 只需验证关于某个部分图册的所有坐标卡具有上述性质.

例 3. Dirac 流 在 V 中的一点 a 处给定一个 k-向量 X, 并令:

$$X(\varphi) = \langle X, \varphi(a) \rangle, \quad \varphi \in \overset{k}{\mathscr{D}}. \tag{9.2.6}$$

记号 $\langle X, \varphi(a) \rangle$ 表示在点 a 处 k-向量 X 与 k-形式 φ 在点 a 处的值 k-余向量 $\varphi(a)$ 之间的点积.

我们刚才定义了一个以单点 a 为支集的 $n-k$ 次奇流, 而这是与一点相联的 Dirac 测度的一种推广. 为重新得到 Dirac 测度, 需取 $k=0$ 而让 X 为等于标量 1 的 0-向量; Dirac 测度为 n 次奇流.

我们可以将上述 k-向量换成点 a 处的一个挠 k-向量; 这将定义一个以点 a 为支集的 $n-k$ 次偶流.

一个此类情形很好说明了在"挠"元下划线而不在"寻常"元下划线带来的困难: 点 a 处的寻常 (相应地, 挠) k-向量是一个以点 a 为支集的 $n-k$ 次挠流 (相应地, 奇流). 若想保留这个规则, 我们就必须要在挠流下划线但不在寻常流下划线, 而不管给出这些流的都是一些什么东西; 因此我们不能太强迫自己过于遵循这个规则.

Dirac 流的有限线性组合在流空间内稠密; 事实上, 若 $\varphi \in \mathscr{D}$ 与所有的 Dirac 流正交, 则它为零.

例 4. 测度 流形 V^n 上的 Radon 测度 $\underline{\mu}$ 是一个 0 阶 p 次奇流, 也即属于 $\mathscr{D}'^0$. 故 $\underline{\mu}(\varphi)$ 为 φ 关于 $\underline{\mu}$ 的积分. 我们因此可注意到, 局部可积函数 (例 1, 其中 $p=0$) 与测度完全不是同一种类型的流; 它们在 $\mathbb{R}^n$ 上之所以能成为同一种类型, 这是因为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度 $\underline{dx}$ 使得我们可以将函数 f 与测度 $f(x)\,\underline{dx}$ 视为同一. 在一个流形上, 一个局部可积的 n 次奇形式是一个特殊的 Radon 测度.

例 5. 链 设 Γ 是一个 k 维的 (可微) 奇异链. 根据定义, 一个链 Γ 就是一个序偶 (W, H), 其中 W 为一阶连续可微的 k 维定向流形, 而 H 是一个从 W 到 V 的一阶连续可微逆紧映射; 奇异链 Γ 的支集就是像集 $H(W)$, 由于 H 为逆紧映射, 故这是一个闭集.

[提醒一下, 称映射 H 为逆紧映射, 若任意紧集在 H 下的逆像也为紧集. (如果同这里一样, 所涉及的都是局部紧空间), 则由此可以导出闭集在 H 下的像为闭集. 我们也将之说成是"在无穷远处连续", 以此代替逆紧这个说法. 这其实是说 W 中的一个"趋于无穷"的滤子基在 H 下的像是 V 中的一个"趋于无穷"的滤子基] 诸如 Γ 这样的链通过下述公式定义了一个 $n-k$ 次奇流:

$$\underline{\Gamma}(\varphi) = \int_\Gamma \varphi = \int_W H^*\varphi, \quad \varphi \in \overset{k}{\mathscr{D}}\text{[①]}. \tag{9.2.7}$$

由于 Γ 的维数为 k, 可见对任意 p 次流, 我们自然可以说它的维数为 $n-p$. 若 T 是

① 由于 H 为逆紧映射, 则 φ 在 H 下的逆像 $H^*\varphi$ 属于 $\overset{k}{\mathscr{D}}(W)$. 这里 $\int_W H^*\varphi$ 是一个寻常形式在一个定向流形上的积分.

一个次数为 p 的流, 也即一个维数为 $n-k$ 的流, 我们也将之记作 $\overset{p}{T}$ 或 $\underset{n-p}{T}$ 或 $\overset{p}{\underset{n-p}{T}}$. 可注意到, 一个点定义了一个维数为 0 的链, 与之相对应的 n 次奇流就是与该点相伴的 Dirac 测度.

我们刚才在上面见到的链, 就是在代数拓扑中最常用的所谓寻常链也即偶链. 它们不巧定义了一些奇流也即挠流!

我们现将一个可微流形 W 和一个从 W 到 V 的 $\mathscr{C}^1$ 类定向逆紧映射 $\widetilde{H}$ 所组成的序偶称为一个奇链或挠链 Γ. 这里不再是 W 而是 $\widetilde{H}$ 为定向的. 于是 Γ 可由下式定义一个偶流 Γ:

$$(9.2.8)\qquad \langle\Gamma,\underline{\varphi}\rangle=\int_\Gamma\underline{\varphi}=\int_W\widetilde{H}^*\underline{\varphi}\text{①}.$$

特别地, 由 V^n 与 V 的恒等映射所组成的序偶是 V 上的一个 n 维挠链; 它因此定义了一个次数为 0 的偶流, 而这正是函数 1 所定义的, 也即积分

$$\underline{\varphi}\to\int_V\underline{\varphi}\quad(\text{例 }2).$$

我们因此将之记作 $V:\underline{\varphi}\to\langle V,\underline{\varphi}\rangle$. 我们可推广这些例子而得到 de Rham 在 1936 年引入的流②. 设 Γ 是一个 p 维链, 而 ω 为 V 上的 q–形式, 则

$$\varphi\to\int_\Gamma\omega\wedge\varphi$$

是一个 $n-p+q$ 次流, 基于将在后面指出的理由 (第 3 节), 我们将之记作 $\Gamma\wedge\omega$. 当然, 我们只需在 Γ 的支集而不是在整个 V 上给出 ω.

所有的链合起来并不构成一个向量空间; 这就是为什么我们将上述类型的链的有限线性组合也称为链. 它们因此构成了流空间的一个稠密向量子空间; 事实上, 若 $\varphi\in\mathscr{D}$ 与所有的链正交, 则它等于零.

Dirac 流因此为链的极限; 但我们可以用特别简单的方式得到这个结论. 问题可归结到 $\mathbb{R}^n$, 以及在原点 O 处由 $\mathbb{R}^n$ 的基底的前 k 个向量的外积构成的 k–向量

$$e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_k$$

所定义的 $n-k$ 次 Dirac 流 X. 若 B_ε 是这 k 个向量所生成的子空间中以原点 O 为中心、体积为 ε 的球, 它到 $\mathbb{R}^n$ 中反而嵌入定义了一个链, 且当 $\varphi\in\mathscr{D}$ 时, 显然有:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left\langle\frac{1}{\varepsilon}B_\varepsilon,\varphi\right\rangle$$

等于 $\varphi(O)$ 中的 $dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_k$ 的系数, 也即等于 $\langle e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_k,\varphi(O)\rangle=\langle X,\varphi\rangle$.

① 这里是一个 k 次奇形式在一个没有定向的 k 维流形上的积分.

② DE RHAM [1], [2].

例 6. 偶极子 前面所有的流均为 0 阶流, 也即属于 $\mathscr{D}'^0$. 下面的流则不会如此. 位于 V 中的点 a 处、矩为 $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ 的偶极子是由下式定义的一阶 n 次奇流:

$$\overset{n}{\underline{T}}.\overset{0}{\varphi}=\varphi \text{ 沿 } \overrightarrow{\mathfrak{M}} \text{ 的导数} = \langle\overrightarrow{\mathfrak{M}}, d\varphi(a)\rangle . \tag{9.2.9}$$

当然, 我们不能将之与由 (9.2.6) 所定义的 0 阶 $n-1$ 次奇流 ($k=0$) 相混淆:

$$\overset{n-1}{S}.\overset{1}{\psi}=\langle\overrightarrow{\mathfrak{M}}, \psi(a)\rangle . \tag{9.2.10}$$

大家将会在后面看到, 若不计符号 $(-1)^n$, 则上述这两个流当中的第一个正是后面那一个的外微分 (参见 p.249).

例 7. 电流 我们通常在 $\mathbb{R}^n$ 上借助一个 (依赖时间的) 强度向量场 $\vec{J}$ 来定义一个分布在空间上的电流. 若 Σ 是一个 $\mathscr{C}^1$ 类 (或许带边的) 闭超曲面且被赋予了连续变换的穿越方向 (也即横截定向), 则沿给定方向穿过 Σ 的电通量由下式给出:

$$\Phi(\Sigma)=\int_\Sigma J_\nu\, dS\,, \tag{9.2.11}$$

其中 J_ν 为 $\vec{J}$ 在 Σ 的沿给定穿越方向的法向 $\vec{\nu}$ 上的投影, 而 dS 为 Σ 的面积元; 我们可以假设, 比如说 $\vec{J}$ 为连续, 则当 Σ 为紧集时, 上述积分有意义.

若将 $\mathbb{R}^n$ 换成一个 Riemann 空间, 也即被赋予了 Riemann 度量 ds^2 的流形 V^n, 则上述所有这一切依然有意义; 但 (9.2.11) 在一个任意的流形 V^n 上没有任何意义.

我们因此可将流强定义为 (依赖时间的) 连续 $n-1$ 次奇流 $\overset{n-1}{\underline{\omega}}$. 被赋予了穿越方向的闭超曲面 Σ 在 V 上定义了一个 $n-1$ 维的挠链, 这是因为它到 V 中的嵌入映射是一个定向映射 (参见 p.237): 在 Σ 的任意一点 a 处, 穿越 Σ 的方向在 Σ 与 V 在点 a 处的定向之间, 定义了一个双射. 这里如同往常一样, 我们约定, 穿越 Σ 的方向再接上 Σ 的一个定向, 就给出了 V 的相关定向. 若比如说 ω 为连续而 Σ 为紧集, 则我们可以在 Σ 上将 $\overset{n-1}{\underline{\omega}}$ 进行积分; 积分 $\int_\Sigma \overset{n-1}{\underline{\omega}}$ 也是 $\underline{\omega}$ 在从 Σ 到 V 的定向嵌入映射下的逆像在 Σ 上的积分; 也即 ω 基于穿越 Σ 的方向而在 Σ 上所诱导的 $n-1$ 次奇形式在 Σ 上的积分; 上述积分也是次数为 1 的偶流 Σ (由 $n-1$ 维挠链 Σ 来定义, 参见例 5) 在形式 $\underline{\omega}$ 上的值 $\langle\Sigma, \overset{n-1}{\underline{\omega}}\rangle$, 该值在 Σ 为紧集而 $\underline{\omega}$ 为连续时有意义.

我们可以令

$$\Phi=\int_\Sigma \underline{\omega}\,. \tag{9.2.12}$$

若 V 是一个 Riemann 空间, 则给定 ω 或 $\vec{J}$ 是等价的. 事实上, 在 V 上存在一个体积测度, 也即由 Riemann 结构所定义的 n 次奇形式 $\underline{\tau}$; 若将 $\vec{J}$ 配以 $n-1$ 次奇形式

$$\underline{\omega}=i(\vec{J})\underline{\tau}\,, \tag{9.2.13}$$

则向量场与 $n-1$ 次奇形式之间的对应 $\vec{J}\to i(\vec{J})\underline{\tau}$ 是一个双射.

若在 $\mathbb{R}^n$ 上赋予其标准基底, 定向和欧氏结构, 而 $\vec{J}$ 的分量为 $J_1, J_2, \ldots, J_n$, 则这等价于说将 $\vec{J}$ 配以形式

(9.2.14) $$\underline{\omega} = \sum_{k=1}^{n} J_k (dx_k)^{-1} \wedge \underline{dx}\,.$$

可以验证, 对于任意的超曲面 Σ, 均有:

(9.2.15) $$\int_\Sigma J_\nu \, dS = \int_\Sigma i(\vec{J})\,\underline{\tau}\,.$$

除了流以外, 一般地, 我们可以研究在 $\mathbb{R}^n$ 或 Riemann 空间上由 (依赖时间的) 连续密度 ρ, 或者在任意流形 V^n 上由 (依赖时间的) n 次奇形式 $\overset{n}{\underline{\varpi}}$ 所定义的电荷分布; 在 Riemann 空间上, 我们有 $\rho\underline{\tau} = \underline{\varpi}$; 而在 $\mathbb{R}^n$ 上, 则有 $\rho\,\underline{dx} = \underline{\varpi}$. 形式 $\underline{\omega}$ 和 $\underline{\varpi}$ 并不独立; 在它们之间存在着一个依赖每个时刻所产生的电量的关系式. 如果没有电荷产生, 则对于 V 中由 $\mathscr{C}^1$ 类超曲面 Σ 所围成的任意区域 Ω, 单位时间内在 Ω 中所增加的电荷, 也就是说 $\frac{d}{dt}\int_\Omega \underline{\varpi}$, 等于由 Σ 流入 Ω 的电通量即 $-\int_\Sigma \underline{\omega}$ (穿越 Σ 的方向为 Ω 的边界方向). 对任意的 Ω, 方程

(9.2.16) $$\frac{d}{dt}\int_\Omega \underline{\varpi} = -\int_\Sigma \underline{\omega} = -\int_\Omega d\underline{\omega}$$

等价于电荷的连续性方程或者说是守恒方程

(9.2.17) $$d\underline{\omega} + \frac{\partial \underline{\varpi}}{\partial t} = 0\,.$$

在 Riemann 空间中, 我们有

$$d\underline{\omega} = d\big(i(\vec{J})\underline{\tau}\big) = \theta(\vec{J})\underline{\tau} = (\mathrm{div}\vec{J})\underline{\tau}\,^{①},$$

而 (9.2.17) 则可写成:

(9.2.18) $$\mathrm{div}\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,.$$

刚才我们所说的与 “流体” 的电性无关; 它因此在流体动力学中也成立. 当然, 在不同的情形也有许多别的关系式 (例如 Maxwell 方程).

我们称流具有速度场 $\vec{v}$ (流形 V^n 上依赖时间的向量场), 如果

(9.2.19) $$\underline{\omega} = i(\vec{v})\underline{\varpi}\,,$$

或者在 Riemann 空间上, 我们有

(9.2.20) $$\vec{J} = \rho\vec{v}\,.$$

① 其中 $\theta(\vec{J})$ 是由 $\vec{J}$ 所定义的无穷小变换: $\theta(\vec{J}) = di(\vec{J}) + i(\vec{J})\,d$.

此时, 电荷守恒方程可写成:

$$\theta(\vec{v})\,\underline{\varpi} + \frac{\partial \underline{\varpi}}{\partial t} = 0\,. \tag{9.2.21}$$

[这是因为 $\theta(\vec{v})\,\underline{\varpi} = di(\vec{v})\,\underline{\varpi} = d\underline{\omega}$]; 而在 Riemann 空间上:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,, \tag{9.2.22}$$

这是 $\underline{\varpi}$ (或 ρ) 与 $\vec{v}$ 之间的一个关系式. 存在速度场是一个相当强的限制性条件, 大家将会见到一些不满足此条件的简单例子. 若形式 $\underline{\varpi}$ 在任意点处均不为零, 则总存在唯一的向量场 $\vec{v}$ 使得

$$\underline{\omega} = i(\vec{v})\,\underline{\varpi}.$$

若 $\underline{\varpi}$ 和 $\underline{\omega}$ 为 $\mathscr{C}^m$ 类, 则上述向量场 $\vec{v}$ 也为 $\mathscr{C}^m$ 类. 但我们没有任何理由来假设 $\underline{\varpi}$ 在任意点处均不为零; 而 $\underline{\varpi}$ 的孤立零点一般会是 $\vec{v}$ 的奇点.

更一般地, 我们可以将流形 V^n 上的电流看成是一个任意的 $n-1$ 次奇流 $\overset{n-1}{\underline{\Omega}}$, 并与之相伴一个电荷分布 $\overset{n}{\underline{\Pi}}$, 后者为 n 次奇流 (二者均依赖时间). 电荷守恒方程为

$$d\underline{\Omega} + \frac{\partial \underline{\Pi}}{\partial t} = 0$$

[我们将在后面定义流的上边缘 $\underline{\Omega}$, 见 (9.3.10)]. 当 $\underline{\Omega} = i(\vec{v})\,\underline{\Pi}$ 时 [流与向量场的内乘, 参见 (9.3.6)], 我们将会有速度场 $\vec{v}$, 而该公式仅当速度场 $\vec{v}$ 为 $\mathscr{C}^\infty$ 类时才有意义, 该条件实在太强了, 一般不可能实现; 此时电荷守恒方程为

$$\theta(\vec{v})\,\underline{\Pi} + \frac{\partial \underline{\Pi}}{\partial t} = 0$$

[无穷小变换在流上的作用, 公式 (9.3.35)]. 在 $\mathbb{R}^n$ 上, 我们将有与向量场 - 广义函数 $\vec{J}$ 和广义函数 P 相对应的公式:

$$\underline{\Pi} = P\,\underline{dx} \quad \text{以及} \quad \overset{n-1}{\underline{\Omega}} = \sum_{k=1}^{n} J_k (dx_k)^{-1} \wedge \underline{dx}\,,$$

[参见 $\mathbb{R}^n$ 上的流的表达式, 公式 (9.3.2)]. 对于

$$\overset{1}{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k\, dx_k \in \overset{1}{\mathscr{D}}\,,$$

以及 $\overset{0}{\psi} \in \overset{0}{\mathscr{D}}$, 该式可翻译成:

$$\overset{1}{\varphi}.\,\overset{n-1}{\underline{\Omega}} = \sum_{k=1}^{n} J_k(\varphi_k)\,, \quad J_k(\psi) = \overset{0}{\psi}\, dx_k.\,\overset{n-1}{\underline{\Omega}}\,. \tag{9.2.23}$$

下面是电流的一些例子.

例 7a. 线性电流 考虑比如说由一维连续可微闭子流形 Γ 表示的一条“直线”，而设 $\underline{j}$ 为流形 Γ 上的一个局部可积的实值挠函数. 它因此将 Γ 中的任意一点与一组反号的实数相对应, 后者分别与 Γ 在该点邻域内的两个可能的环绕方向相对应. 我们因此可以谈论穿过直线 Γ 的强度为 $\underline{j}$ 的电流; 依据我们给 Γ 所赋予的定向的不同, 这会给出两个符号相反的电强; 比如说, 若 Σ 是一个规定了穿越方向的曲面且横截 Γ 于一点 a, 则对于与 Σ 的穿越方向相伴的 Γ 定向, 穿过 Σ 的电通量 $\Phi(\Sigma)$ 依定义等于 $\underline{j}$ 在点 a 处的值. 首先证明, 在局部上, 我们可以将上述电流看成是同前面一样由强度向量场如下定义的电流的极限. 假设我们处于一个足够小的、能借助坐标卡在 $\mathbb{R}^n$ 的某个开子集上来表示的开集中, 使得 Γ 被 x_1 轴表示. 考虑围绕该轴的一个圆柱体以及在该圆柱体外等于零, 在其内部与 Ox_1 平行且在超平面 $x_1 = c_1$ 上的代数大小等于 $\varepsilon^{-1}j_+(c_1)$ 的向量场 $\vec{j}_\varepsilon$ [其中 $j_+(c_1)$ 为 $\underline{j}$ 关于 Γ 的定向 $\overrightarrow{Ox_1}$ 在 Γ 中的点 c_1 处的值]. 我们假设圆柱体的 $n-1$ 维底面积等于 ε. 如果 Σ 横截 Γ 于一点 a (在 Ox_1 上 $x_1 = a_1$), 则该流的通量为

$$\Phi_\varepsilon(\Sigma) = \varepsilon^{-1}\int_\Sigma j_+(x_1)\,dx_2\cdots dx_n\,, \tag{9.2.24}$$

其中 Σ 的穿越方向为 Ox_1, 而 Σ 的定向由此穿越方向以及 $\mathbb{R}^n$ 的定向导出. 让圆柱体趋于 0, 则 $\varepsilon \to 0$ 而 $\Phi_\varepsilon(\Sigma)$ 趋于 $j_+(a_1) = \Phi(\Sigma)$. 因此将所考虑的坐标卡中由 Γ 和 $\underline{j}$ 定义的电流说成是由向量场 $\vec{j}_\varepsilon$ 定义的电流的极限① 是合理的. 而 $\vec{j}_\varepsilon$ 与在圆柱体外等于 0 而在其内等于 $\varepsilon^{-1}j_+(x_1)(dx_1)^{-1}\wedge\underline{dx}$ 的 $n-1$ 次奇形式 $\overset{n-1}{\underline{\omega}_\varepsilon}$ 相伴. 作为 $n-1$ 次奇流, 该奇形式满足

$$\overset{1}{\varphi}.\underline{\omega} = \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k\,dx_k\right).\underline{\omega} = \varepsilon^{-1}\int_{\text{圆柱体}} j_+(x_1)\varphi(x_1,x_2\ldots,x_n)\,\underline{dx}\,, \tag{9.2.25}$$

上式在 $\varepsilon \to 0$ 时趋于 $\int_\Gamma \underline{j}\varphi$.

我们因此由下式来正确定义与 Γ 以及 Γ 上的挠函数 j 相伴的 $n-1$ 次奇流:

$$\overset{1}{\varphi}.\overset{n-1}{\underline{\Omega}} = \int_\Gamma \underline{j}\,\varphi\,. \tag{9.2.26}$$

若 $\underline{j}$ 在直线 Γ 上局部可积 (此时 $\underline{j}\varphi$ 是 Γ 上次数为 1 的挠形式, 故其积分有意义), 则右式有意义且定义了一个 $n-1$ 次奇流 [左式也等于 $(-1)^{n-1}\underline{\Omega}.\varphi$]. 在第 242 页的例 5 中, 该流被记作 $(-1)^{n-1}\Gamma\wedge j$.

在 $\mathbb{R}^n$ 中 (此时 Γ 为任意而不必像在前面的坐标卡中那样必须沿着 Ox_1 的方向), 我们也可以说它与广义函数 - 向量场 $\vec{J}$ 相伴, 后者的分量为广义函数 J_k:

$$J_k(\varphi) = \int_\Gamma \underline{j}\,\varphi\,dx_k\,,\quad \varphi\in\mathscr{D}\,. \tag{9.2.27}$$

① 所涉及当然是在流空间中的极限.

例 7b. 运动点粒子所定义的电流 考虑在给定时刻由位于点 a 处的速度为 $\vec{v}$ 的点电荷 e 所定义的电流, 其中 $\vec{v}$ 为 V^n 在点 a 处的切向量. 这里我们依旧将之看成是坐标卡中某一个强度向量场在 $\varepsilon \to 0$ 时的极限, 该强度向量场在以 a 为中心、体积为 ε 的区域内等于 $\varepsilon^{-1}e\vec{v}$, 而在该区域外等于 0. 可知该电流可由满足下式的 $n-1$ 次奇流 $\overset{n-1}{\underline{\Omega}}$ 来定义:

$$\overset{1}{\varphi}.\overset{n-1}{\underline{\Omega}} = e\langle\vec{v}, \overset{1}{\varphi}(a)\rangle, \tag{9.2.28}$$

而这与第 241 页例 3 ($k=1$) 给出的流至多仅相差一个符号 $(-1)^{n-1}$, 其中 $\vec{X} = e\vec{v}$. 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 它由一个向量场 - 广义函数 $\vec{J}$ 来定义, 后者的分量分别为 $ev_k\,\delta_{(a)}$, 其中 v_k 为速度的分量. 我们在前面例 6 中已经指出, 不能将公式 (9.2.6) 和 (9.2.9) 所定义的两种流混淆. 第二个是一种电荷, 偶极子, 为 n 次奇流; 而第一个则是一个由运动电荷所定义的电流强度, 它是一个 $n-1$ 次奇流.

我们这里所考虑的 $a \in V$ 以及 $e, \vec{v}$ 均固定. 但我们也可以设想点 a 在 V 上随时间运动, 而 $\vec{v}$ 为它在每一时刻的速度. 将每一时刻由 $e\delta_{(a)}$ 所定义的电荷记作 $\underline{\Pi}$, 这是一个 n 次奇流, 且可知 $\underline{\Pi}$ 和 $\underline{\Omega}$ 如第 245 页中所说的那样相联. 我们这里有一个速度场, 这是一个在点 a 处等于速度 $\vec{v}$ 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类的任意向量场. 根据后面将给出的定义, 我们留给读者来验证

$$d\underline{\Omega} + \frac{\partial\underline{\Pi}}{\partial t} = 0 \text{ 且 } \underline{\Omega} = i(\vec{v})\,\underline{\Pi},$$

其中 $\frac{\partial\underline{\Pi}}{\partial t}$ 为点 a 处矩为 $e\vec{v}$ 的偶极子. 考虑具有 $\mathscr{C}^\infty$ 类速度场 $\overrightarrow{w}$ 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式 $\overset{n-1}{\underline{\omega}}$ 以及我们刚才所见到的与在点 a 处异于 $\overrightarrow{w}(a)$ 的速度 $\vec{v}$ 相对应的流. 若取它们之和所构成的流, 则我们将得到一个不与任何连续速度场相伴的流.

我们也留给读者来证明, 当 Γ 的长度趋于 0 且函数 $\underline{j}$ 适当趋于无穷时 [在 $\mathbb{R}^n$ 中, 可取 Γ 为线段 $(a, a+\vec{v}\varepsilon)$, 而 $j = e/\varepsilon$ 沿 $\vec{v}$ 的方向], 例 7b 为例 7a 的极限情形.

例 7c. 带自旋的静止粒子所定义的电流 考虑位于 $\mathbb{R}^3$ 的原点处的点电荷 e, 它具有沿 Oz 轴方向、大小为 S 的自旋. 我们这是想说, 该电荷为平面 $z=0$ 上的惯性质量为 m 的电荷 e 在 $r \to 0$ 时的极限, 后者在以原点 O 为中心、以 r 为半径的圆上以线速度 $v = \frac{S}{mr}$ 旋转, 其运动矩沿 Oz 方向且大小为 S. 若我们假想 r 固定而速度很大 (当 r 很小时就属于此类情形), 我们可以将这个在每个时刻由一个电荷 e 构成的电流 "换成" 一个 "平均电流", 后者沿圆周 Γ_r 的正向流动, 其平均强度 j_r 等于 e 乘以每秒所转的圈数, 也即

$$j_r = \frac{ev}{2\pi r} = \frac{eS}{2\pi m r^2}\,.$$

在做了上述替换后, 与由圆周 Γ_r 以及强度 j_r 所定义的电流相对应的数学上的流, 就是由公式 (9.2.26) 所定义 $\overset{2}{\underline{\Omega}}_r$:

$$(\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dx).\,\overset{2}{\underline{\Omega}}_r = \int_{\Gamma_r} \frac{eS}{2\pi m r^2}\,(\alpha\,dx + \beta\,dy)\,. \tag{9.2.29}$$

在原点邻域内, 我们有 Taylor 公式:

$$\begin{cases}\alpha(x,y)=\alpha_{0,0}+\alpha_{1,0}x+\alpha_{0,1}y+O(r^2)\,,\\ \beta(x,y)=\beta_{0,0}+\beta_{1,0}x+\beta_{0,1}y+O(r^2)\,.\end{cases}\tag{9.2.30}$$

由于

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{\Gamma_r}dx=\int_{\Gamma_r}dy=\int_{\Gamma_r}x\,dx=\int_{\Gamma_r}y\,dy=0\,,\\ \displaystyle\int_{\Gamma_r}x\,dy=\pi r^2\,,\quad \int_{\Gamma_r}y\,dx=-\pi r^2\,,\end{cases}\tag{9.2.31}$$

我们因此有

$$(\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,dx).\overset{2}{\underline{\Omega}}_r=(-\alpha_{0,1}+\beta_{1,0})\,\frac{eS}{2m}+O(r)\,.\tag{9.2.32}$$

若让 r 趋于 0, 则可知问题可被归结为将自旋粒子与由下式定义的 2 次奇流相对应:

$$(\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,dx).\overset{2}{\underline{\Omega}}=(\beta_{1,0}-\alpha_{0,1})\,\frac{eS}{2m}=\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}(0,0,0)-\frac{\partial\alpha}{\partial y}(0,0,0)\right)\frac{eS}{2m}\,.\tag{9.2.33}$$

若要寻求相伴的向量场 - 广义函数 $\vec{J}$, 可知它的三个分量为下述 $\mathbb{R}^3$ 中的广义函数:

$$J_x(\varphi)=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0,0)\,\frac{eS}{2m}\,,\quad J_y(\varphi)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0,0)\,\frac{eS}{2m}\,,\quad J_z(\varphi)=0\,.\tag{9.2.34}$$

换句话说 J_x (相应地, J_y) 为位于 $\mathbb{R}^3$ 的原点处, 矩为 -1 (相应地, $+1$), 方向沿 Oy (相应地, Ox) 的偶极子. 所得到的流显然在关于 Oz 的任意旋转下不变. 我们可将它看成是一个向量场 - 广义函数, 它在 Oz 上的正交分量为零, 而在平面 $z=0$ 的任意方向上的正交分量均为 $\mathbb{R}^3$ 中的广义函数, 后者可由位于原点处的一个矩的大小为 $-\frac{eS}{2m}$、方向沿垂直方向的正方向的偶极子来表示.

这样的一个例子充分显示了广义函数和流给这里所带来的复杂性和多样性. 若想寻求在第 244 页中所说的与 $\underline{\Omega}$ 相联的电荷 $\underline{\Pi}$, 我们将不可避免地取 $\underline{\Pi}=e\,\underline{\delta}$. 该电荷为“静止的”, 因为它只是“绕自己转动”; 而 $\underline{\Pi}$ 不依赖时间, 故

$$\frac{\partial\underline{\Pi}}{\partial t}=0\,,$$

并且易知 $d\underline{\Omega}=0$. 不存在 $\mathscr{C}^\infty$ 类的速度场使得

$$\underline{\Omega}=i(\vec{v})\underline{\Pi}\,.$$

正是这些不同例子促使 de Rham 在广义函数出现之前引入某些流时 (见 p. 242), 给它们恰好取了“流”这个名字.

非负流 两个共轭复值流的定义是平凡的. 称 n 次奇流 $\underline{T}$ 非负, 若对任意的 $\varphi \in \overset{0}{\mathscr{D}}$, 当 $\varphi \geqslant 0$ 时, 均有 $\underline{T}(\varphi) \geqslant 0$. 我们也可以定义非负 n 次奇形式的概念: 称 n 次奇形式非负, 若 $\widetilde{V}$ 上用来定义它的那个 n 次寻常形式关于 $\widetilde{V}$ 的定向非负. 局部可积的 n 次奇形式非负当且仅当它所定义的流在上述意义下非负. 随后我们称次数为 0 的偶流 T 非负, 若对任意的 $\varphi \in \overset{n}{\mathscr{D}}$, 当 $\varphi \geqslant 0$ 时, 均有 $T(\varphi) \geqslant 0$. 比如说, 局部可积的非负函数是一个次数为 0 的非负偶流. 而非负测度则是一个次数为 n 的非负奇流. 我们可以证明 (第 1 章定理 5), 非负流的阶等于零.

定向流形上的偶流与奇流 若 V 为定向流形, 则在偶流空间和奇流空间之间存在着一个典则同构, 该同构为相应形式之间的同构的转置, 且在形式的空间上所诱导的同构与形式的空间上原来的同构相同. 同样也可得知, 如果 V 为连通且可定向, 则我们可将 V 上的一个偶流定义成分别与 V 的两个定向相联的一对反号的奇流. (我们曾将一个奇形式定义成一对反号的偶形式. 那时我们并没有打算将一个偶形式定义成与 V 的两个定向相联的一对反号的奇形式; 这在于偶形式是最为简单的概念. 当然, 我们也可以这样做. 同样, 我们这里将一个偶流定义成与 V 的两个定向相联的一对反号的奇流, 这是因为在这里奇流的概念显得最为简单. 但我们显然完全可以采用相反的方式来定义上述概念) ①.

流与广义函数 设 $\underline{\alpha}$ 为无穷可微 n 次挠形式且处处大于 0 (换句话说, 非负且在 V 的任意点处不为 0). 则 $\varphi \to \underline{\alpha}\varphi$ 为从 $\overset{0}{\mathscr{D}}$ 到 $\overset{n}{\underline{\mathscr{D}}}$ 的同构. 我们因此也可以通过转置定义一个从 $\overset{n}{\underline{\mathscr{D}}}'$ 到 $\overset{0}{\mathscr{D}}'$ 的同构, 我们将之记作 $T \to T\underline{\alpha}$: $T\underline{\alpha}(\varphi) = T(\underline{\alpha}\varphi)$ ②. 因此诸如 $\underline{\alpha}$ 这样的形式的存在使得我们可以得到一些同构. 特别地, 局部可积函数 f 是一个次数为 0 的偶流, 它可与测度 $\underline{\alpha}f$ 这个次数为 n 的奇流视为等同.

若 V 为定向流形而 $\underline{\alpha}$ 是一个如上所述的 n 次奇形式, 则在相同次数的偶形式与奇形式之间, 相同次数的偶流与奇流之间, 存在一个典则等同. 另外我们也可以

---

① 我们也可以用另外一种方式来表示流形 V 上的偶流, 将之归结成更为简单的奇流的概念. 从 $\underline{\mathscr{D}}(V)$ 到 $\mathscr{D}(\widetilde{V})$ 的映射 $\varphi \to \tilde{\varphi}$ 的转置是一个从 $\underline{\mathscr{D}}'(\widetilde{V})$ 到 $\mathscr{D}'(V)$ 的映射; 易见该映射在由 $\underline{\mathscr{D}}'(\widetilde{V})$ 中 σ-反变奇流所构成的的子空间上的限制为从该子空间到 $\mathscr{D}'(V)$ 的同构. 我们因此可以将 V 上的偶流 T 用 $\widetilde{V}$ 上的一个 σ-反变奇流 $\widetilde{\underline{T}}$ 来表示 (正如 V 上的奇形式 $\underline{\omega}$ 是 $\widetilde{V}$ 上的一个 σ-反变偶形式 $\tilde{\omega}$ 一样). 我们引入因子 $\frac{1}{2}$ 并选取对应关系使得对任意的 $T \in \mathscr{D}'(V)$ 以及 $\underline{\varphi} \in \underline{\mathscr{D}}(V)$, 均有

$$T(\underline{\varphi}) = \frac{1}{2}\widetilde{\underline{T}}(\tilde{\varphi}).$$

特别地, 若 T 由 V 上的局部可积形式 ω 定义, 则我们也有:

$$\int_V \omega \wedge \underline{\varphi} = \frac{1}{2}\int_{\widetilde{V}} (P^*\omega) \wedge \tilde{\varphi} \quad [\text{根据公式 } (9.2.4)].$$

因此 $\widetilde{\underline{T}}$ 就是由依照 $\widetilde{V}$ 的定向与偶形式 $P^*\omega$ 相联的奇形式所定义的奇流.

② 我们将在第 3 节中 (流与 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式的乘积) 解释该记号 $T\underline{\alpha}$.

将次数为 0 和 n 的流视为等同. 此时, 我们将 V 上的流称为广义函数, 而不再区分其奇偶性也不再区分它的次数是等于 0 还是等于 n. 这正是我们在 $\mathbb{R}^n$ 上所做的, 其中我们取定了 $\mathbb{R}^n$ 的典则定向, 而将 Lebesgue 测度 $\underline{dx}$ 取作 $\underline{\alpha}$. 我们在第 1 章中所给出的广义函数的定义, 更确切地说是对应于 n 次奇流的定义, 这是因为我们所取的 φ 是一些函数. 但由于我们也将一个局部可积函数 f 看成是定义了一个广义函数, 因此广义函数更恰当地说是一些次数为 0 的偶流. 事实上没必要做这些区别. 相反, 若 V 未被定向且我们没有选取诸如 $\underline{\alpha}$ 这样的基本形式, 此时广义函数这个词的意义有些含糊. 依照不同著作, 它或者表示一个次数为 0 的偶流从而使得一个函数是一个特殊的广义函数, 或者表示一个次数为 n 的奇流, 则所涉及的 φ 为函数. 我们将采用 V 上的广义函数为 0 次偶流这一约定; 这样广义函数就推广了函数. 提请大家注意, 该约定与第 1 章第 5 节第 3° 段的定义不一致, 那里的广义函数为 n 次奇流.

向量丛纤维空间的截面 – 广义函数 设 V^n 为流形, 而 E 为 V 上维数有限的 $\mathscr{C}^\infty$ 类向量丛纤维空间; 设 π 为从 E 到 V 上的投影. 在 V 中一点 x 上的纤维 $\pi^{-1}(\{x\})$ 将被记作 E_x. 我们已经知道如何定义 E 的所有 $\mathscr{C}^m$ 类截面组成的空间 $\mathscr{E}^m(V;E)$, 所有 $\mathscr{C}^\infty$ 类截面组成的空间 $\mathscr{E}^\infty(V;E)$, 以及它们的由支集为紧集的截面所组成的子空间 $\mathscr{D}^m(V;E)$, $\mathscr{D}(V;E)$; 这些空间上被赋予了读者可自行定义的显然拓扑. 另一方面, 若 E 和 F 为 V 上的两个纤维空间, 我们可以定义它们的纤维张量积 $E\otimes_V F$ 使得它在 V 中每点 x 处的纤维为 $E_x\otimes F_x$; 我们也可以定义 E 的对偶纤维空间 E' 使得在点 x 处的纤维为 E_x 的对偶 E'_x. 若 E 为 V 的所有 p–余切向量组成的纤维空间 $\overset{p}{\Omega}$, 则 $\mathscr{E}^m(V;E)$ 正是所有 m 阶连续可微 p–形式组成的空间; 若 $\overset{p}{\underline{\Omega}}$ 为所有挠 p–余切向量组成的空间 [设 $x\in V$; 它在投影 $P:\widetilde{V}\to V$ 下的逆像 $P^{-1}(\{x\})$ 是由 V 的定向覆盖 $\widetilde{V}$ 中的两点所组成的序偶; 点 x 处的一个 p 次挠余切向量则是由分别与 $P^{-1}(\{x\})$ 中两点相对应的 $\widetilde{V}$ 的两个 p–余切向量所构成的 σ–反变的向量组. 我们也可以说这是由点 x 处的两个反号 p–余切向量所组成的序偶, 这两个反号 p–余切向量分别与 V 在点 x 处的两个定向相联. 点 x 处的所有 p 次挠余切向量显然构成一个向量空间 $\overset{p}{\underline{\Omega}}_x$, 而所有 $\overset{p}{\underline{\Omega}}_x$ 的全体 $\overset{p}{\underline{\Omega}}$ 具有一个显然的 V 上纤维空间的结构], 则 $\mathscr{E}^m(V;\overset{p}{\underline{\Omega}})$ 为 V 上的所有 $\mathscr{C}^m$ 类 p 次挠形式组成的空间. 我们约定将纤维张量积空间 $E\otimes_V\overset{p}{\Omega}$ (相应地, $E\otimes_V\overset{p}{\underline{\Omega}}$) 的任意一个截面称为 V 上的 p 次寻常形式 (相应地, p 次挠形式)、纤维空间 E 的截面.

我们现在引入由所有支集为紧集的 $\mathscr{C}^\infty$ 类 $n-p$ 次形式、纤维空间 E' 的截面构成的空间 $\overset{n-p}{\mathscr{D}}(V;E')=\mathscr{D}(V,E'\otimes_V\overset{n-p}{\Omega})$; 该空间的对偶被称为由 V 上的 p 次奇流、纤维空间 E 的截面所组成的空间, 且被记作 $\overset{n-p}{\underline{\mathscr{D}}'}(V;E)$. 同样地, 空间

$$\overset{n-p}{\underline{\mathscr{D}}}(V;E')=\mathscr{D}(V,E'\otimes_V\overset{n-p}{\underline{\Omega}})$$

的对偶是由 V 上的 p 次偶流、纤维空间 E 的截面所组成的空间, 并被记作 $\overset{p}{\mathscr{D}'}(V;E)$.

设 ω 为 E 的一个局部可积的 p-形式截面. 若 $\underline{\varphi} \in \overset{n-p}{\mathscr{D}}(V;E')$, 则我们可以构造它们的外积 $\omega \wedge \underline{\varphi}$ 为 $\overset{n}{\Omega} \otimes_V E \otimes_V E'$ 的一个截面, 利用在 V 的每点 x 处由 E'_x 和 E_x 之间的对偶定义的从 $E'_x \otimes E_x$ 到 $\mathbb{C}$ 的典则线性映射, 我们可将上述截面缩并成 $\overset{n}{\Omega}$ 的一个截面, 也就是说是一个 n 次奇形式, 我们将之也记作 $\omega \wedge \underline{\varphi}$; 它为局部可积且具有紧支集, 因此可在 V 上积分. 于是

$$\underline{\varphi} \to \int_V \omega \wedge \underline{\varphi}$$

为 $\overset{n-p}{\mathscr{D}}(V;E')$ 上的连续线性型, 故为 E 的一个 p 次偶流截面. 因此 p 次偶形式、纤维空间 E 的截面 $\overset{p}{\omega}$ 定义了一个 p 次偶流、纤维空间 E 的截面; 对形式和奇流亦如此, 并且我们的定义前后一致. 若如刚才所说, 我们将次数为 0 的偶流称为 V 上的广义函数, 则 E 的广义函数 - 截面就是 E 的次数为 0 的偶流截面, 也即

$$\overset{n}{\mathscr{D}}(V;E') = \mathscr{D}(V;E' \otimes \overset{n}{\Omega})$$

的对偶空间 $\overset{0}{\mathscr{D}'}(V;E)$ 中的元素; 它们推广了 E 的局部可积的寻常截面. 在后面, 我们将不再继续这方面的研究 ①.

§3. 流上的初等运算

第一种运算: 流与 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式的外积 设 $\overset{p}{T}, \overset{q}{\alpha}$ 分别为 p 次流和 q 次 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式, 它们可以是寻常的或挠的. 我们定义外积 $T \wedge \alpha$ 和 $\alpha \wedge T$ 为 $p+q$ 次流使得当 T 为局部可积形式 ω 时, 我们可重新得到形式 $\omega \wedge \alpha$ 和 $\alpha \wedge \omega$. 为此只需依 (9.2.5) 来令:

$$\langle T \wedge \alpha, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \wedge \varphi \rangle, \tag{9.3.1}$$

而令 $\overset{q}{\alpha} \wedge \overset{p}{T} = (-1)^{pq} \overset{p}{T} \wedge \overset{q}{\alpha}$.

上述外积具有与第 5 章中的乘积以及寻常形式的外积类似的性质.

设 $\overset{p}{T}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 U 上的一个 p 次偶流或奇流. 与一个形式完全一样, 它也拥有一个唯一的分解:

$$\overset{p}{T} = \sum_I T_I \, dx_I, \tag{9.3.2}$$

其中 $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ $(i_1 < i_2 \cdots < i_p)$ 表示 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的一个 p 元子集, T_I 是一个次数为 0 的偶流或奇流, 而 dx_I 为 p-形式 $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$.

① 在 SCHWARTZ [11] 第 140 页第 2 章第 5 节的例 2 中, 大家可以看到另外一个定义纤维空间的截面 - 广义函数的方法, 该定义甚至对无限维的纤维丛也成立.

我们可以将 T_I 与 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 U 上的一个寻常广义函数 $\overset{0}{T}_I$ 视为等同. 后者定义如下: 若 $\varphi \in \mathscr{D}(U)$, 则

$$\langle \overset{0}{T}_I, \varphi \rangle = (-1)^{\rho(I,J)} \langle T_I, \varphi\, dx_J \rangle, \tag{9.3.3}$$

其中 $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-p}\}$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-p})$ 为 I 在 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 中的余集, 而 $\rho(I, J)$ 为 $(1, 2, \ldots, n)$ 的置换 $(i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_{n-p})$ 的逆序数; 事实上, 若令 (9.3.2) 成立, 并假设, 比如说 $\underline{T}$ 为挠流, 则 (9.3.1) 正好给出:

$$\begin{aligned} \langle \underline{T}, \varphi\, dx_J \rangle &= \sum_{I'} \langle \underline{T_{I'}}\, dx_{I'}, \varphi\, dx_J \rangle = \sum_{I'} \langle \underline{T_{I'}}, \varphi\, dx_{I'} \wedge dx_J \rangle \\ &= (-1)^{\rho(I,J)} \langle \underline{T_I}, \varphi\, dx \rangle = (-1)^{\rho(I,J)} \langle \overset{0}{T}_I, \varphi \rangle. \end{aligned} \tag{9.3.4}$$

这使得我们可以不通过对偶而利用某种完备性方法来在流形 V 上重新定义流. 我们这里来解释如何定义之. 为使流 $\overset{p}{S}$ 在 $\overset{p}{\mathscr{D}}'(V)$ 中趋于 0, 当且仅当对于 V 的任意开子集 Ω, 若它为 $\mathbb{R}^n$ ① 的开子集 $U = \Phi(\Omega)$ 上的坐标卡 Φ 的定义域, 则 $\overset{p}{S}$ 在 Ω 上的限制趋于 0. 为此, 当且仅当被转移后的流 $\overset{p}{T} = \Phi(\overset{p}{S})$ (通过结构转移) 在 $\mathscr{D}'^p(U)$ 中趋于 0. 但若我们在 U 上应用分解 (9.3.2), 则可知流 $\overset{p}{T}$ 趋于 0 当且仅当它们的每个分量 $\overset{0}{T}_I$ 在 U 上的广义函数空间 $\mathscr{D}'(U)$ 中趋于 0. 于是 $\overset{p}{\mathscr{D}}'(V)$ 的拓扑就归结成 $\mathbb{R}^n$ 的所有开子集 U 上的广义函数空间 $\mathscr{D}'(U)$ 的拓扑. 另外, 我们已经知道 (参见 p. 240) 空间 $\overset{p}{\mathscr{E}}(V)$ 在 $\overset{p}{\mathscr{D}}'(V)$ 中稠密, 换句话说 $\overset{p}{\mathscr{D}}'(V)$ 可被视为 $\overset{p}{\mathscr{E}}(V)$ 在由 $\overset{p}{\mathscr{D}}'(V)$ 所诱导的拓扑下的完备化. 我们因此可以直接定义 $\overset{p}{\mathscr{D}}'(V)$ 如下. 称 $\omega \in \overset{p}{\mathscr{E}}(V)$ 在流的意义下趋于 0, 若对于从 V 的开子集 Ω 到 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 U 的任意坐标卡 Φ, 所有 $\varpi = \Phi(\omega)$ 均在流的意义下趋于 0; 称

$$\varpi = \sum_I \varpi_I\, dx_I$$

在流的意义下趋于 0, 若这些 (函数或挠函数) ϖ_I 在广义函数空间 $\mathscr{D}'(U)$ 中趋于 0. 这就在 V 上的 $\mathscr{C}^\infty$ 类 p-形式所组成的空间 $\overset{p}{\mathscr{E}}(V)$ 上引入了一个拓扑; 根据定义, 该空间关于这个拓扑的完备化就是 $\overset{p}{\mathscr{D}}'(V)$. 这对于偶流或奇流都成立. 我们也可以仅限于一个图册的坐标卡而不用考虑所有的坐标卡. 这个由完备性给出的定义通常并不会比最初由对偶性给出的定义拥有任何优势. 尽管如此, 大家依然可以注意到, 许多关于流的基本运算, 可以不借助对偶和转移而通过连续延拓将寻常形式的已知性质从 $\overset{p}{\mathscr{E}}(V)$ 拓广到 $\overset{p}{\mathscr{D}}'(V)$ 来定义. 例如, 用 $\mathscr{C}^\infty$ 类 q-形式做乘积的运算 $\overset{p}{\omega} \to \overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\alpha}$ 是一个从 $\overset{p}{\mathscr{E}}(V)$ 到 $\overset{p+q}{\mathscr{E}}(V)$ 的、关于流的拓扑连续的线性运算, 而这可立刻在坐标卡上得到; 它因此可被唯一延拓成一个从 $\overset{p}{\mathscr{D}}'(V)$ 到 $\overset{p+q}{\mathscr{D}}'(V)$ 的乘积 $\overset{p}{T} \to \overset{p}{T} \wedge \overset{q}{\alpha}$, 这就不用对偶和转移给出了乘积的定义.

① 或者 $\mathbb{R}^n_-$; 我们将不再重复这点.

第二种运算: 流与 $\mathscr{C}^\infty$ 类多重向量场的内乘 我们仅满足于考虑无穷可微向量场 ξ. 设 $\overset{p}{\omega}$ 是一个局部可积的 p 次偶形式或奇形式, 而 $\overset{n-p+1}{\varphi}$ 是一个具有紧支集的、奇偶性与前者相反的 $\mathscr{C}^\infty$ 类 $n-p+1$ 次形式.

由于 $\overset{p}{\omega}\wedge\overset{n-p+1}{\varphi}$ 的次数为 $n+1$, 故它等于零. 于是:

$$\big(i(\xi)\,\omega\big)\wedge\varphi+(-1)^p\,\omega\wedge\big(i(\xi)\,\varphi\big)=i(\xi)\big(\omega\wedge\varphi\big)=0\,.$$

我们因此有

$$\int_V\big(i(\xi)\,\omega\big)\wedge\varphi=(-1)^{p-1}\int_V\omega\wedge\big(i(\xi)\,\varphi\big)\,,\tag{9.3.5}$$

上式两边均为具有紧支集的局部可积 n 次奇形式的积分.

对于任意的 p-流 $\overset{p}{T}$, 我们因此用下式来定义 $i(\xi)\,\overset{p}{T}$:

$$\big\langle i(\xi)\,\overset{p}{T},\,\varphi\big\rangle=(-1)^{p-1}\big\langle\,\overset{p}{T},\,i(\xi)\varphi\big\rangle\,.\tag{9.3.6}$$

该乘积也可通过连续延拓与形式相对应的乘积来定义, 且它具有所要的性质.

第三种运算: 流的上边缘 首先假设 V 无边. 设 $\overset{p}{\omega}$ 为 $\mathscr{C}^1$ 类的 p 次偶形式或奇形式, 而 $\overset{n-p-1}{\varphi}$ 为具有紧支集的、奇偶性与前者相反的 $\mathscr{C}^\infty$ 类 $n-p+1$ 次形式. 则有:

$$d(\omega\wedge\varphi)=d\omega\wedge\varphi+(-1)^p\,\omega\wedge\,d\varphi\,.\tag{9.3.7}$$

但由于 $\omega\wedge\varphi$ 为 $\mathscr{C}^1$ 类且具有紧支集而 V 无边, 故根据 Stokes 公式, 我们有:

$$\int_V d(\omega\wedge\varphi)=\int_{bV}\omega\wedge\varphi=0\,^{①}\,.\tag{9.3.8}$$

我们因此有:

$$\int_V d\omega\wedge\varphi=(-1)^{p-1}\int_V\omega\wedge\,d\varphi\,.\tag{9.3.9}$$

对于 p 次偶流或奇流 $\overset{p}{T}$, 我们因此令:

$$\big\langle d\overset{p}{T},\,\varphi\big\rangle=(-1)^{p-1}\big\langle\,\overset{p}{T},\,d\varphi\big\rangle\,,\tag{9.3.10}$$

从而使得当 T 为 $\mathscr{C}^1$ 类的形式 ω 时, dT 就是寻常形式 $d\omega$.

我们显然有 $ddT=0$.

另外, 若 α 为 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式, 则有我们所期待的公式:

$$d\big(\overset{p}{T}\wedge\alpha\big)=d\overset{p}{T}\wedge\alpha+(-1)^p\,\overset{p}{T}\wedge d\alpha\,.\tag{9.3.11}$$

① 译者注: 这里 bV 表示 V 的边界 (也称为边缘). 由于 V 无边, 故这里 bV 为空集.

我们将证明留给读者 [大家可沿用第 5 章定理 4 的方法; 另外, 后面我们将在 V 带边这个更为复杂的情形来证明该公式, 参见 (9.3.32)].

若 $V^n=\mathbb{R}^n$ 且 T 具有分解 (9.3.2), 则我们有常用的公式

$$d\left(\sum_I T_I\,dx_I\right)=\sum_I dT_I\wedge dx_I\,,\quad dT_I=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T_I}{\partial x_k}\,dx_k\,, \tag{9.3.12}$$

并且对任意次数的 T, 我么也有

$$dT=\sum_{k=1}^{n}dx_k\wedge\frac{\partial T}{\partial x_k},\quad \text{其中}\ \frac{\partial T}{\partial x_k}=\sum_I\frac{\partial T}{\partial x_k}\,dx_I\,. \tag{9.3.13}$$

我们也可以在一个流形上利用那个完备性方法来直接定义 dT. 正如我们可以在坐标卡上平凡地得知, 从 $\overset{p}{\mathscr{E}}(V)$ 到 $\overset{p+1}{\mathscr{E}}(V)$ 的映射 $\omega\to d\omega$ 关于流的拓扑连续; 它因此可被唯一地连续延拓成从 $\overset{p}{\mathscr{D}}{}'(V)$ 到 $\overset{p+1}{\mathscr{D}}{}'(V)$ 的映射 $T\to dT$. 由连续性可知公式 (9.3.11), (9.3.12), (9.3.13) 是显然的.

设 $\overset{p}{\mathfrak{Z}}{}'$ 为由所有 p 次闭流也上边缘为零的流组成的空间; 而 $\overset{p}{\mathscr{B}}{}'$ 为由所有 $p-1$ 次流的上边缘组成的空间; 则 $\overset{p}{\mathfrak{Z}}{}'/\overset{p}{\mathscr{B}}{}'$ 为关于流的 V 的 p 次上同调向量空间. 我们同样可定义挠上同调以及支集为紧集的上同调. 大家在后面可以看到 (定理 1, p. 261), 当 V 无边时, 流的上同调与 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式的上同调相等. 公式 (9.3.11) 表明, 不管怎样, 由不同次数的上同调空间的直和所构成的流的上同调空间, 总是平凡地为 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式的上同调代数上的模.

例 1. 具有间断点的形式 公式 (9.3.10) 显然与公式 (2.1.6) 很类似. 我们因此可以给出一些与第 2 章中的例子类似的例子.

比如说, 设 ω 是一个沿 $\mathscr{C}^1$ 类闭超曲面 Σ 有跳跃的 p–形式. 我们因此假设 ω 在 $\complement\Sigma$ 内为 $\mathscr{C}^1$ 类; 另外, 我们还假设当 $x\in\complement\Sigma$ 从 Σ 的一侧 Σ_1 趋近 $a\in\Sigma$ 时, p–余向量 $\omega(x)$ 有极限 $\omega_1(a)$, 而当 x 从另一侧 Σ_2 趋近 $a\in\Sigma$ 时 $\omega(x)$ 有极限 $\omega_2(a)$. 当我们沿着方向 $\Sigma_1\to\Sigma_2$ 穿越 Σ 时 ω 在点 a 处的跳跃为 $\omega_2(a)-\omega_1(a)$. 须注意的是, 这都是纯局部的; 在整体上我们可能无法区分 Σ 的两侧 (例: $\mathbb{R}^3$ 中的 Möbius 带).

无论如何, 我们仅将这两个函数 ω_1,ω_2 看成是局部有定义, 且它们为连续. 另外, 我们还假设 ω 的系数的一阶导数沿 Σ 也有第一类间断点. 形式 ω 因此具有可如下计算的"寻常上边缘 $\{d\omega\}$": 在 $\complement\Sigma$ 内计算 $d\omega$ 时, 这是一个在 V 上几乎处处有定义、在 V 上可测且局部有界的 $p+1$ 次形式, 它因此定义了一个 $p+1$ 次流 $\{d\omega\}$. 我们寻求推广公式 (2.3.4) 来建立 ω 的导数流 $d\omega$ 与 $\{d\omega\}$ 之间的关系. 我们将证明公式

$$d\omega=\{d\omega\}+\Sigma\wedge\sigma\,, \tag{9.3.14}$$

其中 σ 为 ω 沿 Σ 的跳跃. 首先我们来明确给出这个公式的意义. 假设 Σ 在整体上具有两个侧面 Σ_1 和 Σ_2. 在 Σ 上选取 $\Sigma_1\to\Sigma_2$ 作为穿越方向. 我们已经知道, 在 Σ 的

任意点 a 处, 该穿越方向在点 a 处的 V 的定向与点 a 处的 Σ 的定向之间定义了一个一一对应 (参见例 7, p. 243).

给定 Σ 以及从 Σ 到 V 的典则定向嵌入映射 (也即上述定向之间的对应关系) 就将 Σ 定义成 V 上的一个 $n-1$ 维数奇链, 因此也是次数为 1 的偶流 [公式 (9.2.8)]. 若 σ 为 Σ 上的形式 $\omega_2-\omega_1$, 则 $\Sigma\wedge\sigma$ 就是我们在第 242 页曾碰到过的一个 $p+1$ 次流, 它与 ω 具有相同的奇偶性, 且由下式定义:

$$\langle \Sigma\wedge\sigma, \varphi\rangle = \int_\Sigma \sigma\wedge\varphi, \tag{9.3.15}$$

其中 φ 的次数为 $n-p-1$, 其奇偶性与 ω 的相反. 公式 (9.3.14) 因此等价于

$$(-1)^{p-1}\int_V \overset{p}{\omega}\wedge\overbrace{d\varphi}^{n-p} = \int_V \{\overbrace{d\omega}^{p+1}\}\wedge\overset{n-p-1}{\varphi} + \int_\Sigma \overset{p}{\sigma}\wedge\overset{n-p-1}{\varphi}. \tag{9.3.16}$$

上述公式很容易证明. 利用单位分解, 我们只需在局部上证明之. 该公式在 $\complement\Sigma$ 的每点的邻域上是平凡的. 由此我们设 $a\in\Sigma$, 而设 Ω 为 a 的邻域使得 Σ 在 Ω 中的余集有两个连通分支, 依照 Σ 的两个侧面而分别记作 Ω_1 和 Ω_2. 设 ω_i $(i=1,2)$ 为在 Ω_i 上等于 ω 而在其它地方等于 0 的形式, 而 ψ_i 为 $n-1$ 次奇形式 $\omega_i\wedge\varphi$, 其中 φ 的支集为紧集且被包含在 Ω 中. 由 Stokes 公式可得:

$$\int_\Omega d\psi_i = \int_{\Omega_i} d\psi_i = \int_{b\Omega_i}\psi_i. \tag{9.3.17}$$

若 $i=1$, 则 $b\Omega_1$ 恰为前面所定义的、与穿越方向 $\Sigma_1\to\Sigma_2$ 相对应的 $n-1$ 维奇链 Σ; 而对于 $i=2$, 边界 $b\Omega_2$ 为上述奇链的负元 $-\Sigma$. 于是当 $\psi=\omega\wedge\varphi$ 时, 我们有

$$\int_\Omega d\psi = \sum_{i=1}^2\int_{\Omega_i} d\psi_i = \int_\Sigma(\psi_1-\psi_2) = \int_\Sigma(\omega_1-\omega_2)\wedge\varphi. \tag{9.3.18}$$

带入 $d\psi$ 的表达式, 我们得到

$$\int_V\{d\omega\}\wedge\varphi + (-1)^p\int_V\omega\wedge d\varphi = -\int_\Sigma\sigma\wedge\varphi,$$

而这正好是 (9.3.16).

显然公式 (2.2.7) 的基础是分部积分; 而这只不过是联立公式

$$\int_a^b dF = F(b)-F(a)$$

与乘积求导公式, 即 $d(FG)=(dF)\,G+F\,(dG)$; 我们这里通过 Stokes 公式以及形式的乘积的上边缘公式得到了上述公式的推广.

若改变 Σ 的穿越方向, 奇链 Σ 的符号也随之改变, 跳跃 σ 亦如此, 但 $\Sigma\wedge\sigma$ 不变. 由于 Σ 在局部上总有两个侧面, 因此我们在局部上总可以定义 $\Sigma\wedge\sigma$, 且其定义不依赖

那两个局部上的侧面的编号. 因此即使 Σ 在整体上没有两个侧面, 流 $\Sigma\wedge\sigma$ 依然会有一个内蕴的整体意义, 且公式 (9.3.14) 总成立. 另外, 我们可以对之做如下变换.

设 $a\in\Sigma$, 而 Σ' 为 Σ 在点 a 邻域内的一个面. 设 ω' 为 ω 在 Σ 上的值, 它为 ω 在 Σ' 那一个侧面上的极限. 面 Σ' 确定了从 Σ' 的反面到 Σ' 的穿越方向, 因此定义了一个 $n-1$ 维奇链, 从而是次数为 1 的偶流 Σ'; 于是 $\Sigma'\wedge\omega$ 是一个与 ω 奇偶性相同的 $p+1$ 次流. 若 Σ'' 为 Σ 在点 a 邻域内的另外一面, 我们可同样定义 $\Sigma''\wedge\omega''$. 若令

$$\Sigma_1=\Sigma',\quad \Sigma_2=\Sigma'',$$

则我们刚才所说的 Σ 就是 $\Sigma''=-\Sigma'$, 从而

$$\Sigma\wedge\sigma=\Sigma'\wedge\omega'+\Sigma''\wedge\omega''\,, \tag{9.3.19}$$

而公式 (9.3.14) 可被换成

$$d\omega=\{d\omega\}+\Sigma'\wedge\omega'+\Sigma''\wedge\omega''\,, \tag{9.3.20}$$

这里 Σ 的两个侧面所起的作用对称; 虽然 $\Sigma'\wedge\omega'$ 与 $\Sigma''\wedge\omega''$ 仅在局部上有定义, 但它们之和却在整体上有意义.

比如说, 假设 Ω 为 V 的开子集, 其边界 Σ 为 $\mathscr{C}^1$ 类超曲面, 且 Ω 在 Σ 的每点的邻域内位于 Σ 的单侧. 设 f 为 $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Sigma$ 上的 $\mathscr{C}^1$ 函数且在 $\complement\Omega$ 上为零. 作为 Ω 的边界, 曲面 Σ 具有一个穿越方向, 它因此是一个 $n-1$ 维奇链, 也即一个 1 次偶流 Σ. 于是次数为 0 的偶流 f 的上边缘为

$$df=\{df\}-f\Sigma\,. \tag{9.3.21}$$

借助上边缘, 第 2 章中的公式 (2.2.7) 可以写成:

$$df=\{df\}+\sigma_0\,\delta\,, \tag{9.3.22}$$

其中 δ 是次数为 1 的偶流, 它借助 $\mathbb{R}$ 的典则定向而与 Dirac 测度 δ 这个次数为 1 的奇流相对应.

例 2. 设 Γ 是一个 k 维偶链或奇链, 则它的次数为 $p=n-k$ (参见例 5, p. 241). 将 Stokes 公式应用于 Γ 可得:

$$\begin{aligned}\langle d\Gamma,\varphi\rangle&=(-1)^{p-1}\langle\Gamma,d\varphi\rangle=(-1)^{n-k-1}\int_\Gamma d\varphi\\&=(-1)^{n-k-1}\int_{b\Gamma}\varphi=(-1)^{n-k-1}\langle b\Gamma,\varphi\rangle\,.\end{aligned} \tag{9.3.23}$$

于是 $d\Gamma=(-1)^{n-k-1}b\Gamma=(-1)^{p-1}b\Gamma$.

这促使我们将次数为 p 或维数为 k $(p+k=n)$ 的任意流 T 的边缘 bT 定义为

$$b\overset{p}{T}=(-1)^{p-1}dT\,. \tag{9.3.24}$$

我们因此总有

$$\langle bT,\varphi\rangle=\langle T,d\varphi\rangle\,, \tag{9.3.25}$$

而"边缘"运算正好是"上边缘"运算的转置且不改变符号. 在公式 (9.3.21) 所研究的例子中, 若在 $\overline{\Omega}$ 上, 我们有 $f=1$, 则次数为 0 的偶流 f 就是由 $\overline{\Omega}$ 以及从 $\overline{\Omega}$ 到 V 中的定向自然嵌入映射所定义的 n 次奇链; 故由 (9.3.21) 可给出 $df=-\Sigma$, 而在 $p=0$ 时, 这恰好与 $bf=b\overline{\Omega}=+\Sigma$ 相对应.

例 3. Dirac 流的上边缘 (见例 3, p.241) 设 $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ 为 V 在点 a 处的一个次数 1 的切向量. 它定义了一个 $n-1$ 次奇流 $\underline{S}$ [公式 (9.2.6)]. 它的上边缘 $d\underline{S}$ 是一个 n 次奇流, 根据公式 (9.2.9), 该奇流正好等于 $(-1)^n\underline{T}$, 其中 $\underline{T}$ 是与点 a 处的矩为 $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ 的偶极子相联的流. 事实上, 这正是公式 (9.2.9) 和 (9.2.10) 所证明的:

$$\langle d\overset{n-1}{\underline{S}},\varphi\rangle=(-1)^n\langle\underline{S},d\varphi\rangle=(-1)^n\langle\underline{T},\varphi\rangle\,,$$

也即 $dS=(-1)^n\underline{T}$.

例 4. 立体角 重新在 n 维欧氏向量空间 V 中来考虑公式 (9.2.14) 和 (9.2.15). 取 $\vec{J}$ 为径向单位向量场. 对于 V 上异于原点 O 的一点 M 处的面积元 dS, 我们有

$$J_\nu dS=\cos\theta dS\,,$$

其中 θ 为径向量 $\overrightarrow{OM}$ 与法向量的夹角, 该法向量与在 S 上所选取的穿越方向一致. 若 r 为 $\overrightarrow{OM}$ 的长度, 则从原点看 dS 所形成的立体角的代数值为:

$$\frac{1}{r^{n-1}}\cos\theta\,dS=\left(\frac{\vec{J}}{r^{n-1}}\right)_\nu dS\,.$$

也即从原点 O 看一个不经过 O 但被赋予了穿越方向的超曲面 Σ 所形成的立体角为

$$\int_\Sigma\frac{J_\nu}{r^{n-1}}\,dS=\int_\Sigma\overset{n-1}{\underline{\omega}}\,,$$

其中 $\overset{n-1}{\underline{\omega}}$ 是一个 $n-1$ 次微分奇形式, 被称为"立体角".

若 $V=\mathbb{R}^n$ 且被赋予它的典则欧氏结构, 而

$$r^2=x_1^2+\cdots+x_n^2\,,$$

则 $\vec{J}$ 的分量为 $J_k=\frac{x_k}{r}$, 并且

$$\overset{n-1}{\underline{\omega}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r^{n-1}}\,\frac{x_k}{r}\,(dx_k)^{-1}\wedge\underline{dx}\,. \tag{9.3.26}$$

形式 $\underline{\omega}$ 可被看成是在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处有定义, 它为局部可积, 因此是一个流.

我们现在来在 $\mathbb{R}^n$ 中寻求其上边缘 $d\underline{\omega}$. 它为

$$d\overset{n-1}{\underline{\omega}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_k}{r^n}\right)\underline{dx}. \tag{9.3.27}$$

但我们有

$$\frac{x_k}{r^n} = -\frac{1}{n-2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)^{①},$$

于是利用 (2.3.10) 可得

$$d\overset{n-1}{\underline{\omega}} = -\frac{1}{n-2}\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\underline{dx} = S_n\overset{n}{\underline{\delta}}, \tag{9.3.28}$$

其中 S_n 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面的面积.

带边流形 V 上的流的上边缘 我们将采用同样的公式 (9.3.10) 来定义.

设 ω 为 V 上的 $\mathscr{C}^1$ 类 p–形式. 即使 ω 为 $\mathscr{C}^\infty$ 类, 它在流的意义下的上边缘 $d\omega$ 也不再等于其寻常上边缘 $\{d\omega\}$. 实际上, 由 Stokes 公式可以给出:

$$\begin{aligned}\langle d\omega, \varphi\rangle &= (-1)^{p-1}\langle \omega, d\varphi\rangle = (-1)^{p-1}\int_{\underline{V}} \omega\wedge d\varphi \\ &= \int_{\underline{V}} d\omega\wedge\varphi - \int_{\underline{V}} d(\omega\wedge\varphi) = \int_{\underline{V}} d\omega\wedge\varphi - \int_{\underline{bV}} \omega\wedge\varphi\end{aligned} \tag{9.3.29}$$

也即

$$d\omega = \{d\omega\} - bV\wedge\omega, \tag{9.3.30}$$

其中 bV 是由 $n-1$ 维奇链 bV 定义的次数为 1 的偶流. 所有一切就如同我们将流形 V 延拓到它的边界之外, 而用 0 来将 ω 延拓到 V 的边界之外: 因此 ω 沿 bV 有第一类间断且 (9.3.30) 可由 (9.3.14) 导出. 仅当 ω 在 V 上为 $\mathscr{C}^1$ 类且在 V 的边界上为 0 时, 我们才会有 $d\omega = \{d\omega\}$.

为了避免任何混淆, 用来定义上边缘 dT 的公式因此应该写成:

$$\langle d\overset{p}{T}, \varphi\rangle = (-1)^{p-1}\langle \overset{p}{T}, \{d\varphi\}\rangle. \tag{9.3.31}$$

我们总有 $ddT = 0$. 若 T 为 p–流而 α 为 $\mathscr{C}^\infty$ 类 q–形式, 则我们有:

$$\begin{aligned}\langle d(\overset{p}{T}\wedge\overset{q}{\alpha}), \varphi\rangle &= (-1)^{p+q-1}\langle T\wedge\alpha, \{d\varphi\}\rangle = (-1)^{p+q-1}\langle T, \alpha\wedge\{d\varphi\}\rangle \\ &= (-1)^{p-1}\langle T, \{d(\alpha\wedge\varphi)\}\rangle + (-1)^p\langle T, \{d\alpha\}\wedge\varphi\rangle \\ &= \langle dT, \alpha\wedge\varphi\rangle + (-1)^p\langle T, \{d\alpha\}\wedge\varphi\rangle \\ &= \langle dT\wedge\alpha, \varphi\rangle + (-1)^p\langle T\wedge\{d\alpha\}, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

① 该式在 $n\neq 2$ 时成立; 当 $n=1$ 时, 应将 $-\frac{1}{n-2}\frac{1}{r^{n-2}}$ 换成 $\log r$. 但最终的结果是一样的.

由此可得乘积的上边缘的公式:

$$d(\overset{p}{T}\wedge\alpha)=(d\overset{p}{T})\wedge\alpha+(-1)^p\,\overset{p}{T}\wedge\{d\alpha\}\,. \tag{9.3.32}$$

[可注意到不会有 $T\wedge d\alpha$, 该记号没有意义, 这是因为 $d\alpha$ 不再是一个 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式] ①.

第四种运算: 流关于无穷小变换的求导 设 ξ 为流形 V^n 上的 $\mathscr{C}^\infty$ 类向量场. 首先我们将假设 V^n 为无边流形. 设 $\overset{p}{\omega}$ 是一个 $\mathscr{C}^1$ 类的 p 次偶形式或奇形式, 而 φ 是一个奇偶性与前者相反、具有紧支集的 $\mathscr{C}^\infty$ 类 $n-p$ 次形式. 提醒一下, 作用在形式上的无穷小变换 $\theta(\xi)$ 是一个求导运算:

$$\theta(\xi)(\alpha\wedge\beta)=\big(\theta(\xi)\alpha\big)\wedge\beta+\alpha\wedge\big(\theta(\xi)\beta\big)\,,$$

且可以通过 $\theta(\xi)=d.\,i(\xi)+i(\xi).\,d$ 来表示:

$$\int_V\big(\theta(\xi)\omega\big)\wedge\varphi=\int_V\theta(\xi)(\omega\wedge\varphi)-\int_V\omega\wedge\big(\theta(\xi)\varphi\big)\,. \tag{9.3.33}$$

但我们有

$$\int_V\theta(\xi)(\omega\wedge\varphi)=\int_V d\big(i(\xi)(\omega\wedge\varphi)\big)+\int_V i(\xi)\,d(\omega\wedge\varphi)\,,$$

而上式中的最后一项为零, 这是因为 $\omega\wedge\varphi$ 的次数等于 n, 故它的上边缘为零; 又 V 为无边流形, 故由 Stokes 公式可知前面一项也为零. 由此可导出:

$$\int_V\big(\theta(\xi)\omega\big)\wedge\varphi=-\int_V\omega\wedge\big(\theta(\xi)\varphi\big)\,. \tag{9.3.34}$$

对任意的流 T 以及带边或无边流形 V, 正如我们曾在定义流的上边缘时所做的, 我们因此令:

$$\big\langle\theta(\xi)T,\varphi\big\rangle=-\big\langle T,\{\theta(\xi)\varphi\}\big\rangle\,. \tag{9.3.35}$$

我们可以给出一系列类似于我们曾给出的关于上边缘的例子的例子. 尤其值得注意的是, 若 $\overset{p}{\omega}$ 为 $\mathscr{C}^1$ 类而 V 为带边流形, 则在广义函数的意义下计算得到的 $\theta(\xi)\omega$ 与在寻常意义下计算得的 $\{\theta(\xi)\omega\}$ 不相等, 它们之间的差为支撑在 bV 上的多层:

$$\begin{aligned}\big\langle\theta(\xi)\omega,\varphi\big\rangle&=-\big\langle\omega,\{\theta(\xi)\varphi\}\big\rangle=-\int_V\omega\wedge\{\theta(\xi)\varphi\}\\&=-\int_V\{\theta(\xi)(\omega\wedge\varphi)\}+\int_V\{\theta(\xi)\omega\}\wedge\varphi\\&=-\int_V\big\{d\big(i(\xi)(\omega\wedge\varphi)\big)\big\}+\int_V\{\theta(\xi)\omega\}\wedge\varphi\\&=-\int_{bV}i(\xi)(\omega\wedge\varphi)+\int_V\{\theta(\xi)\omega\}\wedge\varphi\,.\end{aligned}$$

① 由于流的上边缘不再诱导形式的寻常上边缘, 因此形如 (9.3.32) 这样的公式不再能够通过从 $\mathscr{E}(V)$ 到 $\mathscr{D}'(V)$ 的连续延拓来证明.

利用公式 (9.3.6)[①], 可知

$$-\int_{bV} i(\xi)(\omega\wedge\varphi) = -\langle bV, i(\xi)(\omega\wedge\varphi)\rangle$$
$$= -\langle i(\xi)(bV), \omega\wedge\varphi\rangle = -\langle \big(i(\xi)(bV)\big)\wedge\omega, \varphi\rangle .$$

由此可得结论:

$$\theta(\xi)\omega = \{\theta(\xi)\omega\} - \big(i(\xi)(bV)\big)\omega . \tag{9.3.36}$$

[由于 $i(\xi)(bV)$ 是一个次数为 0 的偶流, 因此可以去掉它与 ω 之间的外积符号 $\wedge$].

假设, 比如说 V 为 $\mathbb{R}$ 中的线段 $[0,1]$. 则 $\mathbb{R}$ 的定向使得我们可以无需区分寻常流和挠流. 边界 bV 就是次数为 1 的流: $\varphi\to\varphi(1)-\varphi(0)$, 其中 $\varphi\in\mathscr{D}([0,1])$. 假设 ξ 为常值单位向量场; 则 $\theta(\xi)$ 可以写成 $\frac{d}{dx}$, 由此可将 $\theta(\xi)T$ 记作 T'. 而 $i(\xi)(bV)$ 是次数为 0 的流: $\varphi\,dx\to\langle bV,\varphi\rangle=\varphi(1)-\varphi(0)$. 于是若 f 为 $[0,1]$ 上的一个 $\mathscr{C}^1$ 类函数, 则 $\big(i(\xi)(bV)\big)f$ 就是次数为 0 的流: $\varphi\,dx\to f(1)\varphi(1)-f(0)\varphi(0)$. 记 $\delta_{(a)}$ 为点 a 处的 Dirac 测度, 借助测度 $\underline{dx}$, 我们可以不加区别地将之看成是一个次数为 0 或 1 的流, 则可知 $\big(i(\xi)(bV)\big)f$ 等于 $f(1)\delta_{(1)}-f(0)\delta_{(0)}$. 正如大家可预见的, 公式 (9.3.36) 变为:

$$f' = \{f'\} - f(1)\,\delta_{(1)} + f(0)\,\delta_{(0)} . \tag{9.3.37}$$

这里的一切也像第 258 页中那样, 就如同我们将 V 延拓成一个无边流形 (这里的无边流形就是 $\mathbb{R}$), 而用 0 来 f 延拓.

那个将 $\theta(\xi), d, i(\xi)$ 联系在一起的常用公式显然对带边或无边流形上的流成立:

$$\theta(\xi)\overset{p}{T} = d\big(i(\xi)\overset{p}{T}\big) + i(\xi)\,d\overset{p}{T} . \tag{9.3.38}$$

利用充当定义的公式 (9.3.6), (9.3.10) 和 (9.3.35), 立刻可得上述结论:

$$\begin{aligned}\langle\theta(\xi)\overset{p}{T},\overset{n-p}{\varphi}\rangle &= -\langle\overset{p}{T},\{\theta(\xi)\overset{n-p}{\varphi}\}\rangle\\ &= -\langle\overset{p}{T},\{d\big(i(\xi)\overset{n-p}{\varphi}\big)\}\rangle - \langle\overset{p}{T},\{i(\xi)(d\overset{n-p}{\varphi})\}\rangle\\ &= (-1)^p\langle d\overset{p}{T}, i(\xi)\overset{n-p}{\varphi}\rangle + (-1)^p\langle i(\xi)\overset{p}{T},\{d\overset{n-p}{\varphi}\}\rangle\\ &= \langle i(\xi)d\overset{p}{T},\overset{n-p}{\varphi}\rangle + \langle d\big(i(\xi)\overset{p}{T}\big),\overset{n-p}{\varphi}\rangle,\end{aligned}$$

由此可得所要的结论. 当 V 为无边流形时, 只需注意到该公式在 T 为 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式时成立, 而 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式在流的空间中稠密, 故只需通过连续延拓就能得到所要结论.

同样地, 若 α 为 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式, 则我们有:

$$\theta(\xi)(T\wedge\alpha) = (\theta(\xi)T)\wedge\alpha + T\wedge\{\theta(\xi)\alpha\} . \tag{9.3.39}$$

① 该公式假设 ω 为 $\mathscr{C}^\infty$ 类. 但这里我们可以通过用 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式逼近 ω 来过渡到极限, 从而使得当 ω 为 $\mathscr{C}^1$ 类时, 所有的计算依然成立.

关于上同调的 de Rham 定理 设 $\overset{p}{\mathfrak{Z}}'$ 为 V 上所有上边缘为零的 p-流 (p 次闭上链) 构成的空间; 而 $\overset{p}{\mathscr{B}}'$ 为所有 $p-1$ 次流的上边缘构成的空间; 则 $\overset{p}{\mathscr{B}}'\subset\overset{p}{\mathfrak{Z}}'$ 且 $\overset{p}{\mathfrak{Z}}'/\overset{p}{\mathscr{B}}'$ 为 V 的关于流的 p 次上同调向量空间. 我们可以针对偶流或奇流, 支集任意或具有紧支集或 Φ-支集的流引入同样的定义. 这里我们称一个流具有 Φ-支集, 若其支集属于在下述意义下饱和的闭集类 Φ:

1° 若 $A\in\Phi$ 而 $B\subset A$, 则 $B\in\Phi$;

2° Φ 中的有限多个闭集的并还是属于 Φ;

3° Φ 中的任意闭集拥有一个属于 Φ 的闭邻域.

上述上同调一般彼此均不相同.

相反, 我们可将定义中的流换成阶不大于 m 的流; 设 $\overset{p}{\mathfrak{Z}}'^m$ 为所有阶不大于 m 的上边缘为零的 p-流 (奇偶性以及支集满足前面选定的条件) 构成的空间; 而 $\overset{p}{\mathscr{B}}'^m$ 为所有阶不大于 m、且为阶不大于 m 的 $p-1$ 次流的上边缘的 p 次流 (关于奇偶性以及支集所作的假设与前面的相同) 构成的空间. 上述上同调按理应该会依赖 m; 但我们将证明它实际上并不依赖 m. 同样地, 我们也可以取局部上为 L^p 类形式的流; 这里所得到的上同调还是与前面那个一样. 最后我们取在通常意义下为 $\mathscr{C}^m$ 类形式的流 [也就是说属于 $\mathscr{E}^m(V)$]; 只要上边缘总是在流的意义下取的, 我们将总是得到同样的上同调. 我们现在来详细解释这一点, 而这需要有些当心. 设 V 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球, 其边界为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面. 我们可在 V 上研究第 238 页的意义下的 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式的上同调, 其中的上边缘为寻常上边缘. 对于次数为 0 的情形, 可知此时的上同调向量空间的维数为 1, 换句话说它的 Betti 数等于 1; 这是因为寻常上边缘为零的 $\mathscr{C}^\infty$ 类 0-形式也即 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数是一个任意的常数. 现在来研究流的上同调; 此时次数为 0 的上同调向量空间等于 $\{0\}$, 故其 Betti 数为零; 这是因为上边缘为零的 0-流只能是一个常值函数, *但该常数必为零, 否则它的上边缘会包含一个支撑在单位球面上的多层*. 因此 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式的寻常上同调与流的上同调不相等. 但若在取 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式的上同调时采用流的意义下的上边缘, 则我们会得到与流的上同调相同的上同调; 这是因为若一个 $\mathscr{C}^\infty$ 类 0-形式在流的意义下的上边缘等于零, 则该形式必等于零.

故我们应将 $\overset{p}{\mathfrak{Z}}'$ 换成所有在流的意义下的上边缘等于零的 $\mathscr{C}^m$ 类 p-形式组成的空间, 也就是说当 $m\geqslant 1$ 时, 这些 p-形式的寻常上边缘为零且它们在 V 的边界上也等于 0; 而 $\overset{p}{\mathscr{B}}$ 应被替换成所有在流的意义下等于 $\mathscr{C}^m$ 类 $p-1$ 次形式的上边缘的 $\mathscr{C}^m$ 类 p-形式组成的空间, 当 $m\geqslant 1$ 时, 它们是在 V 的边界上为零的 $\mathscr{C}^m$ 类 $p-1$ 次形式的寻常上边缘. 这就是通常所说的 "模掉了 V 的边界" 的 V 上形式的上同调.

上述这些上同调均相等, 该性质还可表述如下:

定理 1. (广义 de Rham 定理) *设 T 为 p 次偶流或奇流, 而 Φ 是由 V 中闭子集组成的一个饱和类; 假设 T 是一个闭上链, 即 $dT=0$.*

1° 若 T 具有 Φ–支集, 则存在 $\mathscr{C}^\infty$ 类 p–形式 ω 使得 $T-\omega$ 是某个具有 Φ–支集的 $p-1$ 次流的上边缘 [即 T 为 Φ–上同调于某个 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式][①].

2° 若 T 是某个具有 Φ–支集的流的上边缘且 T 的阶不大于 m (或者 T 是 $\mathscr{C}^m$ 类形式 ω[②], 亦或者是局部上为 L^p 类的形式, 等等), 则 T 等于某个阶也不大于 m 且具有 Φ–支集的流 S 的上边缘 (或者 S 是 $\mathscr{C}^m$ 类形式 ω[③], 亦或者是局部上为 L^p 类的形式, 等等).

证明 设 $\mathscr{G}'^m$ 是由具有所考虑的奇偶性, 其本身及其上边缘的阶均不大于 m 的 p– 流所组成的芽层[④]. 这是一个良层; 这是因为若 $\alpha \in \overset{0}{\mathscr{D}}$ 且 T 本身及其上边缘的阶均不大于 m, 则由公式

$$d(\alpha T) = \{d\alpha\} \wedge T + \alpha\, dT$$

可知 αT 的阶也不大于 m.

上边缘定义了一列层同态:

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{i} \overset{0}{\mathscr{G}}{}'^m \xrightarrow{d} \overset{1}{\mathscr{G}}{}'^m \xrightarrow{d} \overset{2}{\mathscr{G}}{}'^m \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \overset{p}{\mathscr{G}}{}'^m \xrightarrow{d} \overset{p+1}{\mathscr{G}}{}'^m \xrightarrow{d} \cdots, \tag{9.3.40}$$

这里 (根据所考虑的情况) $\mathscr{F}$ 是由在 V 的所有内点处为 (寻常或挠的) 常值函数的芽以及在 V 的所有边界点处为零的芽所构成的芽层; 芽层 $\mathscr{F}$ 在 V 的连通开子集上的一个截面是一个寻常或挠的常数, 并且当该开子集与 V 的边界相交时该常数为零. 另外, 若 $\overset{p}{\mathscr{G}}{}'^m$ 是由任意 p–流所构成的芽层, 而 $\overset{p}{\mathscr{G}}$ 是由其本身及其上边缘均为 $\mathscr{C}^\infty$ 类 p–形式的 p–流构成的芽层, 并且它们均具有所考虑的奇偶性, 则关于这些层, 我们有类似的、与嵌入映射 $\overset{p}{\mathscr{G}} \to \overset{p}{\mathscr{G}}{}'^m \to \overset{p}{\mathscr{G}}{}'$ 相容的同态列. 也就是说下述层同态图交换[⑤]:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
0 \to \mathscr{F} & \to & \overset{0}{\mathscr{G}} & \to & \overset{1}{\mathscr{G}} & \to & \overset{2}{\mathscr{G}} & \to & \cdots \\
\downarrow \quad \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to \mathscr{F} & \to & \overset{0}{\mathscr{G}}{}'^m & \to & \overset{1}{\mathscr{G}}{}'^m & \to & \overset{2}{\mathscr{G}}{}'^m & \to & \cdots \\
\downarrow \quad \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to \mathscr{F} & \to & \overset{0}{\mathscr{G}}{}' & \to & \overset{1}{\mathscr{G}}{}' & \to & \overset{2}{\mathscr{G}}{}' & \to & \cdots
\end{array}\right. \tag{9.3.41}$$

大家知道, 所有这一切均源于水平的层同态列为正和列; 这将可以证明 (对于所考虑的所有情形) $\overset{p}{\mathfrak{Z}}{}'/\overset{p}{\mathscr{B}}{}'$ 同构于取值于 $\mathscr{F}$ 中的 V 上的 p 次上同调 $H^p(V, \mathscr{F})$. 我们将承认层论中的这个被称为广义 de Rham 定理的定理[⑥].

---

① 这意味着 ω 为闭上链, 即在流的意义下 $d\omega = 0$; 故 $\{d\omega\} = 0$, 且 ω 在 V 的边界上等于 0.

② 这意味着当 $m \geqslant 1$ 时 ω 在 V 的边界上为零.

③ 当 $m \geqslant 1$ 时 S 在 V 的边界上为零.

④ 我们这里完全用到了层论. 关于此证明, 参见 GODEMENT [1], 第 2 章第 4 节. 关于无边流形上的流的上同调, 参见 DE RHAM [3], 第 4 章, p. 93.

⑤ 若我们将 $\mathscr{C}^\infty$ 类 p–形式所构成的芽层取作 $\overset{p}{\mathscr{G}}$, 并考虑寻常上边缘, 则该图不交换.

⑥ 参见 GODEMENT [1].

我们因此要证明, 对于 $p \geqslant 1$, 在点 a 的邻域内的上边缘为零的任意 p–流 $\overset{p}{T}$ 在点 a 的邻域内等于某个 $p-1$ 次流 $\overset{p-1}{S}$ 的上边缘, 并且当 T 的阶不大于 m 或 T 为 $\mathscr{C}^m$ 类形式时, 我们还可以选取 $\overset{p-1}{S}$ 使得它的阶不大于 m 或使之为 $\mathscr{C}^m$ 类形式. 另外, 当 $p=0$ 时, 我们已经知道, 若 0–流 $\overset{0}{T}$ 的上边缘在点 a 的邻域内为零, 则 $\overset{0}{T}$ 在点 a 的邻域内为常值函数, 并且当 a 属于 V 的边界时, 该常值函数等于 0. 不管怎样, 我们将会重新得到此结论.

我们因此将问题归结为 V 等于 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n_-$, 而点 a 为原点; 我们将寻常流和挠流视为同一. 我们将会在 $\mathbb{R}^n$ 上用到流与广义函数的卷积; 流 T 可以写成

$$T = \sum_I T_I \, dx_I \quad [\text{公式}(9.3.2)]\,,$$

此时我们将卷积 $T * S$ ($S \in \mathscr{D}'$) 理解为流

$$\sum_I (T_I * S)\, dx_I\,①.$$

当 T 的支集为紧集时, 卷积总有意义. 我们同样可以在 $\mathbb{R}^n_-$ 上对流和广义函数进行卷积, 这是因为由 $\mathbb{R}^n_-$ 在加法运算 $(\xi,\eta) \to \xi+\eta$ 下的封闭性可知定义

$$U * V.\varphi = U_\xi \otimes V_\eta.\varphi(\xi+\eta)$$

有意义. 另外, 不管怎样, 大家将会在后面看到, 我们总可以将 $\mathbb{R}^n_-$ 上的流与 $\mathbb{R}^n$ 上的、支集包含在 $\mathbb{R}^n_-$ 中的流视为等同 (定理 2′, p. 271), 从而问题可归结成 $\mathbb{R}^n$ 上的、支集包含在 $\mathbb{R}^n_-$ 中的流与广义函数的卷积. 在采取某些预防措施后, 该卷积具有通常的性质. 例如 $\delta * V = V\delta$ 以及 $D^p\delta * V = D^pV$ 等等, 依然成立. 测度与阶不大于 m 的广义函数的卷积还是给出一个阶不大于 m 的广义函数, 而对于局部上为 L^p 类的函数亦如此. 将 $\mathbb{R}^n_-$ 上的广义函数看成是 $\mathbb{R}^n$ 上的、支集包含在 $\mathbb{R}^n_-$ 中的广义函数, 由此立刻可得上述所有结论. 但 "测度 ν 与 $\mathscr{C}^m$ 类函数 α 的卷积为 $\mathscr{C}^m$ 类函数" 这一结论不成立; 该卷积甚至不一定是一个连续函数. 这在于将 $\mathbb{R}^n_-$ 上的连续函数用 0 延拓成 $\mathbb{R}^n$ 上的函数后不再为连续; 另外 $\mathbb{R}^n_-$ 上的连续函数关于 $\mathbb{R}^n_-$ 中的向量的平移也不再是 $\mathbb{R}^n_-$ 上的连续函数. 但若 Y 为单变量的 Heaviside 函数, 则 $\mathbb{R}^n_-$ 上的具有紧支集的 $\mathscr{C}^m$ 类函数 f 与 $-Y(-x_1)\otimes\delta_{x_2,\ldots,x_n}$ 的卷积可以显式地写成如下形式:

$$\int_0^{x_1} f(\xi_1, x_2, \ldots, x_n)\, d\xi_1\,,$$

它还是 $\mathbb{R}^n_-$ 上的连续函数, 而这就是所有我们将会需要的.

① 大家在 NORGUET [1], GUILLEMOT – TEISSIER Marianne [1], BRACONNIER [1] 中可以找到一些更为一般的卷积.

设 $\overset{p}{T}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n_-$ 的原点 O 的邻域上的流 [提醒大家, $\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leqslant 0\}$] 使得在 O 的某个适当邻域上 $dT = 0$ 且 T 的阶不大于 m.

设 α 为 $\overset{0}{\mathscr{D}}(\mathbb{R}^n)$ 中函数, 在原点 O 的邻域上等于 1 且其支集与原点充分接近使得在该支集的邻域上 $dT = 0$ 且 T 的阶不大于 m. 我们将沿用证明 Poincaré 定理的经典方法. 流 T 可以写成:

$$\overset{p}{T} = dx_1 \wedge \overset{p-1}{L} + \overset{p}{M}, \tag{9.3.42}$$

其中流 L 和 M 在由 (9.3.2) 给出的表达式中不含 dx_1.

"流 T 在 α 的支集的邻域内为闭上链" 这个事实可表述成:

$$-dx_1 \wedge d'L + dx_1 \wedge \frac{\partial M}{\partial x_1} + d'M = 0, \tag{9.3.43}$$

也就是说在 α 的支集的邻域内, 成立

$$d'L = \frac{\partial M}{\partial x_1}, \quad d'M = 0, \tag{9.3.44}$$

其中 d' 为关于 $x_2, \ldots, x_n$ 的偏微分运算:

$$d'U = \sum_{k=2}^{n} dx_k \wedge \frac{\partial U}{\partial x_k}.$$

我们可以确定一个 $p-1$ 次流 Λ 使得

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} = \alpha L. \tag{9.3.45}$$

为此, 只需取卷积

$$\Lambda = \big(-Y(-x_1) \otimes \delta_{x_2,\ldots,x_n}\big) * (\alpha L), \tag{9.3.46}$$

其中 Y 为单变量的 Heaviside 函数; 事实上,

$$\frac{d}{dx_1}\big(-Y(-x_1)\big) = \delta_{x_1}.$$

流 αL 在整个空间上的阶不大于 m, 而 $-Y(-x_1) \otimes \delta_{x_2,\ldots,x_n}$ 是一个测度, 故流 Λ 在整个空间 ($\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n_-$) 上的阶不大于 m. 于是 $\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} = \alpha L$ 亦同样如此; 而 $d'\Lambda$ 亦如此, 从而 $d\Lambda$ 亦如此. 事实上,

$$\begin{aligned} d'\Lambda &= \big(-Y(-x_1) \otimes \delta_{x_2,\ldots,x_n}\big) * d'(\alpha L) \\ &= \big(-Y(-x_1) \otimes \delta_{x_2,\ldots,x_n}\big) * (\{d'\alpha\} \wedge L) \\ &\quad + \big(-Y(-x_1) \otimes \delta_{x_2,\ldots,x_n}\big) * (\alpha\, d'L). \end{aligned} \tag{9.3.47}$$

右边和式中的第一项是一个测度与一个在整个空间上的阶不大于 m 的流的卷积, 故其阶不大于 m. 另外, 由于 $\alpha\, d'L = \alpha\frac{\partial M}{\partial x_1}$, 从而和式中的第二项可写成:

$$(9.3.48)\quad \big(-Y(-x_1)\otimes\delta_{x_2,\dots,x_n}\big)*\left(\alpha\frac{\partial M}{\partial x_1}\right)=\big(-Y(-x_1)\otimes\delta_{x_2,\dots,x_n}\big)*\frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha M)$$
$$+\big(-Y(-x_1)\otimes\delta_{x_2,\dots,x_n}\big)*\left(\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\right\}M\right).$$

最后那个和式当中的第二项是一个测度与阶不大于 m 的流 $\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\right\}M$ 的卷积, 故其阶不大于 m; 而第一项则等于

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\big(-Y(-x_1)\otimes\delta_{x_2,\dots,x_n}\big)\right)*(\alpha M)=\delta*(\alpha M)=\alpha M\,,$$

其阶也不大于 m. 我们可以处处将"阶不大于 m"换成"$\mathscr{C}^m$ 类形式"或"局部上为 L^p 类的形式"["$\mathscr{C}^m$ 类形式"是指"通常意义下的 $\mathscr{C}^m$ 类形式,也即属于 $\mathscr{E}^m(V)$", 但 $\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1}$ 和 $d'\Lambda$ 则是指流的意义下的].

考虑流

$$(9.3.49)\qquad S=T-d\Lambda=M-d'\Lambda\,.$$

若我们能够证明 S 在原点 O 的邻域内为某一个的流的上边缘, 并且当 T 的阶不大于 m 时, 该流的阶也不大于 m 等等之类的结论, 则 T 也将具备同样的性质. 但首先 $T-d\Lambda$ 本身在原点 O 的邻域内的阶不大于 m. 事实上, 流 M 的确如此, 而我们已经知道 $d'\Lambda$ 亦如此. 另外, 在 S 的展式中不包含 dx_1. 最后, 流 S 关于 x_1 的偏导数在原点 O 的邻域内为零. 事实上,

$$(9.3.50)\qquad \frac{\partial S}{\partial x_1}=\frac{\partial M}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_1}(d'\Lambda)=\frac{\partial M}{\partial x_1}-d'\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1}=\frac{\partial M}{\partial x_1}-d'(\alpha L)$$

在原点 O 的邻域内等于 $\frac{\partial M}{\partial x_1}-d'L$, 也就是说为 0.

当我们在 $\mathbb{R}^n$ 上讨论问题时, 这实际上是在说 S 在原点 O 的邻域内是一个形如 $1_{x_1}\otimes\widetilde{S}_{x_2,\dots,x_n}$ 的流①; 而 $dS=0$ 等价于说 $d'S=0$, 也即 $d\widetilde{S}=0$; 诸如 S 的阶不大于 m 这样的性质成立当且仅当 $\widetilde{S}$ 亦具有同样的性质.

对空间的维数运用归纳法就可证明所要的定理; 当 $n=0$ 时是显然的, 而若假设对维数 $0,1,2,\dots,n-1$ 已证明所要的结论, 则对维数 n 也可证明之.

当我们在 $\mathbb{R}^n_-$ 上讨论时, 一切会变更为简单. 由于在原点 O 的邻域内 $\frac{\partial S}{\partial x_1}=0$, 而 (在带边流形 $\mathbb{R}^n_-$ 上) $\frac{\partial 1_{x_1}}{\partial x_1}=-\delta_{x_1}$, 则 $\widetilde{S}$ 在原点 O 的邻域内必然为零, 从而证明立刻可结束. [将"$\mathbb{R}^n_-$ 上的广义函数"换成"支集包含在 $\mathbb{R}^n_-$ 中的 $\mathbb{R}^n$ 上的广义函数", 我们也可以说: $\frac{\partial S}{\partial x_1}=0$ 等价于 S 在原点 O 的邻域内关于平行于 x_1 轴的任意充分小

① 参见第 2 章定理 4.

平移不变; 由于 S 的支集包含在 $x_1 \leqslant 0$ 中, 故利用负向平移, 我们可以证明 S 实际上在原点 O 的邻域内等于零]; 这就证明了定理.

评注. 可用什么替代"阶不大于 m", "$\mathscr{C}^m$ 类形式", "局部上为 L^p 类的形式"?

设 $\overset{0}{\mathscr{G}}$ 为 $\mathbb{R}^n_-$ 上的广义函数的芽层的一个子层, 而 $\overset{p}{\mathscr{G}}$ (相应地, $\overset{p}{\underline{\mathscr{G}}}$) 则是 p 次偶流 (相应地, 奇流) 的芽层, 其中这些 p-流依公式 (9.3.2) 展开的系数可被看成是 $\overset{0}{\mathscr{G}}$ 中的广义函数. 对于 $\mathbb{R}^n_-$ 的任意开子集 U, 设 $\Gamma(\overset{p}{\mathscr{G}}, U)$ [相应地, $\Gamma(\overset{p}{\underline{\mathscr{G}}}, U)$] 为 $\overset{p}{\mathscr{G}}$ (相应地, $\overset{p}{\underline{\mathscr{G}}}$) 在 U 上的截面所组成的向量空间.

假设 $\overset{0}{\mathscr{G}}$ 具有下列性质:

1° *在微分同胚变换下的不变性.* 若 H 为从 $\mathbb{R}^n_-$ 的一个开子集 U_1 到另外一个开子集 U_2 的微分同胚, 则 H 将 $\Gamma(\overset{0}{\mathscr{G}}, U_1)$ 变为 $\Gamma(\overset{0}{\mathscr{G}}, U_2)$.

2° *在 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数乘法作用下的稳定性.* 对任意开集 U, 空间 $\Gamma(\overset{0}{\mathscr{G}}, U)$ 中的广义函数与 $\mathscr{E}(U)$ 中的函数的乘积属于 $\Gamma(\overset{0}{\mathscr{G}}, U)$. 另外, 我们还假设 $\mathscr{E}(U) \subset \Gamma(\overset{0}{\mathscr{G}}, U)$.

3° *在与测度*

$$\mu = -Y(-x_1) \otimes \delta_{x_2,\ldots,x_n}$$

做卷积运算作用下的稳定性. 若 $T \in \Gamma(\overset{0}{\mathscr{G}}, \mathbb{R}^n_-)$ 具有紧支集, 则 $\mu * T$ 属于 $\Gamma(\overset{0}{\mathscr{G}}, \mathbb{R}^n_-)$.

设 V^n 为流形. 我们记 $\Gamma(\overset{p}{\mathscr{G}}, V)$ [相应地, $\Gamma(\overset{p}{\underline{\mathscr{G}}}, V)$] 为 V 上满足下列性质的 p 次偶流 (相应地, 奇流) T 所组成的集合: 对任意一个从 V 的开子集 Ω 到 $\mathbb{R}^n_-$ 的开子集的坐标卡 H (不用考虑 $\mathbb{R}^n$ 的开子集, 这是因为 $\mathbb{R}^n$ 的任意有界开子集可被平移成 $\mathbb{R}^n_-$ 的开子集), 流 T 在 Ω 上的限制经 H 平移后均属于 $\Gamma\big(\overset{p}{\mathscr{G}}, H(\Omega)\big)$ [相应地, $\Gamma\big(\overset{p}{\underline{\mathscr{G}}}, H(\Omega)\big)$]; 由于层 $\overset{0}{\mathscr{G}}$ 在微分同胚变换下不变, 故只需对一个图册的所要坐标卡验证该性质.

[若 V 为无边流形, 此时使用 $\mathbb{R}^n_-$ 上的层就有些荒谬. 但无论如何, 对于 $\mathbb{R}^n_-$ 上满足性质 1°, 2°, 3° 的任意层, 我们可以在 $\mathbb{R}^n$ 上与之对应一个满足同样性质的层: 在 $\mathbb{R}^n$ 的任意点处的芽为给定层 $\overset{0}{\mathscr{G}}$ 在开集 $x_1 < 0$ 的一点处的芽的平移 (或任意微分同胚下的像).]

我们因此可以考虑由 $\Gamma(\overset{p}{\mathscr{G}}, V)$ [相应地, $\Gamma(\overset{p}{\underline{\mathscr{G}}}, V)$] 中具有 Φ-支集的闭流所组成的空间, 由 $\Gamma(\overset{p-1}{\mathscr{G}}, V)$ [相应地, $\Gamma(\overset{p-1}{\underline{\mathscr{G}}}, V)$] 中具有 Φ-支集的流的上边缘所组成的空间, 以及第一个关于第二个的商. 该商等于与任意流或 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式相对应的商 (采用流的意义下的上边缘; 或采用寻常上边缘但取那些在 V 的边界上等于零的 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式). 其证明与前面的一样; 需要针对无边开集进行关于 n 的数学归纳 (p. 265). 为此需要引入 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上使得 $1_{x_1} \otimes \widetilde{S}_{x_2,\ldots,x_n} \in \overset{0}{\mathscr{G}}$ 的广义函数 $\widetilde{S}_{x_2,\ldots,x_n}$ 的芽层, 该芽层也等于使得对任意 $\alpha \in \mathscr{E}_{x_1}$ 或 $\alpha \in \mathscr{D}_{x_1}$ 均有 $\alpha_{x_1} \otimes \widetilde{S}_{x_2,\ldots,x_n} \in \overset{0}{\mathscr{G}}$ 的广义函数 $\widetilde{S}_{x_2,\ldots,x_n}$ 的芽层.

§4. 流在 $\mathscr{C}^\infty$ 类映射下的直接像

在第 237 页中我们已见到形式在一个从 m 维流形 U 到 n 维流形 V 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类映射下的逆像的性质. 若 H 为逆紧映射, 则 H^* 定义了一个从流形 V 上的空间 $\overset{p}{\mathscr{D}}{}^h$ 到流形 U 上的空间 $\overset{p}{\mathscr{D}}{}^h$ 的连续线性映射 (其中 h 为有限或无穷).

设 $\underline{T}$ 为 U 上的奇流. 我们将它的直接像 $H\underline{T}$ 定义为

$$(H\underline{T})(\varphi) = \underline{T}(H^*\varphi). \tag{9.4.1}$$

当 H 为逆紧映射时, 上述公式有意义, 这是因为对任意的 $\varphi \in \mathscr{D}$, 均有 $H^*\varphi \in \mathscr{D}$; 并且该公式将 $H\underline{T}$ 定义成一个流. 若 H 不是一个逆紧映射, 我们不一定能定义 $H\underline{T}$, 但只要 H 在 $\underline{T}$ 的支集 A 上的限制为逆紧映射, 则我们总能如上定义 $H\underline{T}$.

事实上, 由上述假设可导出 $H^*\varphi$ 与 A 的交集为紧集, 因此公式 (9.4.1) 的右边有意义; 并且该公式将 $H\underline{T}$ 定义成一个流, 这是因为它是 $\mathscr{D}(V)$ 上的一个连续线性型. 当 H 为逆紧映射时, 映射 $H:\underline{T} \to H\underline{T}$ 为线性. 若 H 不为逆紧映射, 当我们限制在由支集包含在某个闭子集 A 上的流组成的空间上时, 映射 $H:\underline{T} \to H\underline{T}$ 依然为线性, 这里假设 H 在 A 上为逆紧映射. 可注意到具有紧支集的流总有直接像, 并且此时, 公式 (9.4.1) 对支集任意的 φ 均成立.

直接像不保次数但保流的维数. 为此设 $\underline{T}$ 的次数为 d. 令 $r = m-n$ 为 U 和 V 的维数差; 这是一个符号任意的整数. 若 φ 的次数为 $n-q$, 则 $H^*\varphi$ 的次数也为

$$n - q = m - (q + r),$$

从而当 $q + r \neq p$ 也即 $q \neq p - r$ 时 $\underline{T}(H^*\varphi) = 0$; 故 $H\underline{T}$ 的次数在 $p - r \geqslant 0$ 时等于 $p - r$, 而当 $p - r < 0$ 时等于零. 因此我们有

$$\dim \underline{T} = m - p = \dim H\underline{T} = n - (p - r).$$

特别地, 次数为 m 的奇流的直接像是一个次数为 n 的奇流. 若 $m = n$, 则直接像 H 保次数; 但无论如何, 它其实保的是维数. 阶不大于 h 的流的直接像的阶也不大于 h. 特别地, 次数为 m 的零阶奇流 (即测度) 的直接像是一个测度, 而这正是积分理论中所谓的像测度; 非负测度的直接像为非负测度. 对 $\varphi = 1$ 应用 (9.4.1), 则当 $\underline{T}$ 的支集为紧集时, 我们总有:

$$\int_V H\underline{T} = \langle H\underline{T}, 1\rangle = \langle \underline{T}, 1\rangle = \int_U \underline{T}. \tag{9.4.2}$$

若 $\underline{T}$ 的阶不大于 h (并且 H 在 $\underline{T}$ 的支集上为逆紧映射), 则对任意的 $\varphi \in \mathscr{D}^h$, 公式 (9.4.1) 均成立.

直接像 $H\underline{T}$ 的支集包含在 $\underline{T}$ 的支集 A 在 H 下的像集中. 为此设 φ 的支集包含在 $\complement H(A)$ 中, 则 $H^*\varphi$ 的支集包含在 $\complement A$ 中, 从而公式 (9.4.1) 的右边为零

(由于 H 在 A 上为逆紧映射, 故 $H(A)$ 总为闭集), 于是 $H\underline{T}$ 的支集包含在 $H(A)$ 中. 由此可导出, 要想在 V 的开子集 Ω 上确定 $H\underline{T}$, 只需 $\underline{T}$ 在 $H^{-1}(\Omega)$ 上已知 [这是因为若在 $H^{-1}(\Omega)$ 上, 我们有 $\underline{T_1} = \underline{T_2}$, 则 $\underline{T_1} - \underline{T_2}$ 的支集包含在 $\complement H^{-1}(\Omega)$ 中, 从而 $H(\underline{T_1}-\underline{T_2})$ 的支集包含在 $H(\complement H^{-1}(\Omega)) \subset \complement\Omega$ 中, 故在 Ω 中, 我们有 $H\underline{T_1} = H\underline{T_2}$]. 也可知, 只要 H 在 $\underline{T}$ 的支集的邻域上已知, 我们就可以确定 $H\underline{T}$, 甚至当 H 不是在整个流形 U 上而仅在 $\underline{T}$ 的支集的邻域上有定义 (且 H 同往常一样, 在该支集上的限制为逆紧映射) 时, 我们也可以定义 $H\underline{T}$.

由直接像所定义的运算自然满足传递性: 流 $\underline{T}$ 在两个映射的复合 $H_1 \circ H_2$ 下的直接像正是 $(H_1 \circ H_2)\underline{T} = H_1(H_2\underline{T})$. 这里需做如下假设: 流 $\underline{T}$ 的支集包含在 A 中, 而 H_1 在 A 上为逆紧映射使得 $H_1(A) \subset B$, 并且 H_2 在闭集 B 上也为逆紧映射, 从而 $H_1 \circ H_2$ 在 A 上也为逆紧映射, 故上述等式的两边在理论上有意义.

若 α 为 V 上的 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式, 则我们有

$$(9.4.3) \qquad (H\underline{T}) \wedge \alpha = H\big(\underline{T} \wedge (H^*\alpha)\big)\,.$$

事实上, 我们有

$$\begin{aligned}\big\langle (H\underline{T}) \wedge \alpha, \varphi\big\rangle &= \langle H\underline{T}, \alpha \wedge \varphi\rangle = \big\langle \underline{T}, H^*(\alpha \wedge \varphi)\big\rangle = \big\langle \underline{T}, (H^*\alpha) \wedge (H^*\varphi)\big\rangle \\ &= \big\langle \underline{T} \wedge (H^*\alpha), H^*\varphi\big\rangle = \big\langle H\big(\underline{T} \wedge (H^*\alpha)\big), \varphi\big\rangle\,.\end{aligned}$$

现假设 $\underline{T}$ 的次数为 p, 而 α 的次数为 q; 则 $H\underline{T}$ 的次数为 $p-r$ $(r = m-n)$, 且

$$(9.4.4) \qquad \begin{aligned}\alpha \wedge (H\underline{T}) &= (-1)^{(p-r)q}(H\underline{T}) \wedge \alpha \\ &= (-1)^{(p-r)q}\big(H(\underline{T}) \wedge (H^*\alpha)\big) = (-1)^{rq}H\big((H^*\alpha) \wedge \underline{T}\big)\,,\end{aligned}$$

也就是说

$$(9.4.5) \qquad \alpha \wedge (H\underline{T}) = (-1)^{qr}H\big(H^*\alpha \wedge \underline{T}\big)\,.$$

另外, 直接像 H 与边缘运算交换但与上边缘运算不交换:

$$(9.4.6) \qquad \langle H(b\underline{T}), \varphi\rangle = \langle b\underline{T}, H^*\varphi\rangle = \langle \underline{T}, dH^*\varphi\rangle$$

$$(9.4.7) \qquad = \langle \underline{T}, H^*d\varphi\rangle = \langle H\underline{T}, d\varphi\rangle = \langle b(H\underline{T}), \varphi\rangle\, ①,$$

也即

$$(9.4.8) \qquad H(b\underline{T}) = b(H\underline{T})\,,$$

从而对于任意的 p-流 $\underline{T}$, 我们有

$$(9.4.9) \qquad H(d\underline{T}) = (-1)^{p-1}H(b\underline{T}) = (-1)^{p-1}b(H\underline{T}) = (-1)^{p-1+p-r+1}d(HT)\,,$$

① 我们这里仅用到了转置运算: H^* 和 d 交换, 从而它们的转置 H 和 b 交换.

而这就是说

$$H(d\underline{T}) = (-1)^r d(H\underline{T}), \quad r = m - n. \tag{9.4.10}$$

最后设 ξ 为 U 上的 $\mathscr{C}^\infty$ 类向量场, 并假设 (通常并不总是如此) 在 V 上有 $\mathscr{C}^\infty$ 类向量场 η 为 ξ 在 H 下的像.

于是对任意的 $\varphi \in \mathscr{D}(V)$, 我们有

$$\theta(\xi)(H^*\varphi) = H^*\big(\theta(\eta)\varphi\big)$$

也即我们有

$$\theta(\xi) \circ H^* = H^* \circ \theta(\eta).$$

通过取转置, 我们可由此导出:

$$\big(\theta(\eta)H\big)\underline{T} = H\big(\theta(\xi)\underline{T}\big). \tag{9.4.11}$$

我们可将前面的结论合成如下定理:

定理 2. 设 H 是一个从 U^m 到 V^n 的无穷可微映射, 而 A 为 U^m 中的闭子集使得 H 在 A 上的限制为逆紧映射. 若 $\underline{T}$ 为 U 上的 p 次奇流 (即维数等于 $k = m-p$) 且其支集包含在 A 中, 则我们可以通过公式 (9.4.1) 来定义其直接像 $H\underline{T}$, 这是一个次数为 $p-r$ 的奇流 (其中 $r = m-n$), 也即其维数为 k. 若 $\underline{T}$ 的阶不大于 h, 则 $H\underline{T}$ 亦如此. 直接像 $H\underline{T}$ 的支集包含在 $\underline{T}$ 的支集在 H 下的像集中; 而要想在 V 的开子集 Ω 上确定 $H\underline{T}$, 只需 $\underline{T}$ 在 $H^{-1}(\Omega)$ 上已知. 当 $\underline{T}$ 的支集总包含在 A 中时, 映射 $\underline{T} \to H\underline{T}$ 为线性映射. 若 H' 是一个从 V 到流形 W 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类映射使得 $H(A)$ 包含于闭集 B 且 H' 在 B 上为逆紧映射, 则当 $\underline{T}$ 的支集包含在 A 中时, 成立

$$(H'H)\underline{T} = H'(H\underline{T}).$$

我们还有公式:

$$\begin{cases} (H\underline{T}) \wedge \alpha = H\big(\underline{T} \wedge (H^*\alpha)\big), \text{ 其中 } \alpha \text{ 为 } V \text{ 上的 } \mathscr{C}^\infty \text{ 形式;} \\ \overset{q}{\alpha} \wedge (H\underline{T}) = (-1)^{rq} H\big((H^*\alpha) \wedge \underline{T}\big), \ r = m - n; \\ b(H\underline{T}) = H(b\underline{T}); \\ d(H\underline{T}) = (-1)^r H(d\underline{T}); \ r = m - n. \\ \theta(\eta)H\underline{T} = H\theta(\xi)\underline{T}, \text{ 其中 } \xi \text{ 为 } U \text{ 上的 } \mathscr{C}^\infty \text{ 类向量场且它在 } H \text{ 下的像} \\ \text{为 } V \text{ 上的 } \mathscr{C}^\infty \text{ 类向量场 } \eta; \\ \displaystyle\int_V H\underline{T} = \int_U \underline{T}, \text{ 其中 } \underline{T} \text{ 的支集为紧集.} \end{cases} \tag{9.4.12}$$

对偶流以及从 U 到 V 的定向映射 $\widetilde{H}$ 也有类似的性质.

由上述定理可导出, 直接像 H 将 U 上具有紧支集的闭奇流 (上边缘为零的奇流) 变成 V 上具有相同性质的流, 同时将 U 上可表示成具有紧支集的流的上边缘的奇流变成 V 上具有相同性质的流. 因此 H 定义了一个从 U 上的具有紧支集的挠流的上同调向量空间到 V 上的类似空间的保维数的线性映射. 若 H 为逆紧映射, 则上述性质对支集任意的上同调亦成立; 若 H 为定向映射, 则对于非挠上同调上述性质同样成立. 在代数拓扑学中, 这些上同调的直接像实际上对应着由支集为紧集的奇异链所定义的同调的直接像; 而一个链事实上是一个挠流. 第 261 页中的定理 1 至少在 U 和 V 为无边流形时证明了流的上同调和 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式的上同调相等, 这使得我们可以来比较 (刚在这里定义的) 上同调上的运算 H 以及 (在第 237 页中定义的) 上同调上的运算 H^*; 而这正是我们将要在第 272 页例 6 中讨论的.

现在来给一些例子.

例 1. Dirac 测度的像 设 $\delta_{(a)}$ 为关于点 $a \in U$ 的 Dirac 测度, 这是一个次数为 m 的奇流. 我们有:

$$H\delta_{(a)} = \delta_{H(a)}\,. \tag{9.4.13}$$

更一般地, 若 X 为点 $a \in U$ 处的 k-向量, 则根据第 241 页的例 3, 它可定义一个次数为 $m-k$ 的奇流; 又 H 在点 $a \in U$ 处的线性切映射将 X 变成点 $H(a)$ 处的一个 k-向量, 该向量所定义的 $n-k$ 次奇流就是上述 $m-k$ 次奇流在 H 下的直接像. 这里显然保流的维数但不保流的次数.

例 2. 常值映射 设 H 为常值映射, 它将任意的流形 U 变成 V 中的同一点 a. 设 $\underline{T}$ 为 U 上具有紧支集的 m 次奇流. 则我们有:

$$\begin{cases} H\underline{T}(\varphi) = \underline{T}(H^*\varphi) = \underline{T}\big(\varphi(a)\big) = \varphi(a)\underline{T}(1) = \left(\displaystyle\int_U \underline{T}\right)\delta_{(a)}(\varphi)\,, \\ \text{故 } H\underline{T} = \left(\displaystyle\int_U \underline{T}\right)\delta_{(a)}\,. \end{cases} \tag{9.4.14}$$

当 T 是一个次数为 m 的无穷可导奇形式时, 上述公式亦成立, 并且该例子还表明: *由一个形式定义的流在常值映射下的直接像不一定能被某个形式定义*. 若 $\underline{T}$ 为 U 上次数小于 m 的奇流, 则它在常值映射下的直接像为零, 而公式 (9.4.14) 依然成立.

例 3. 链的像 设 Γ 为 U 中的 k 维链; 我们知道 (例 5, p. 241) 它在 U 上定义了一个次数为 $m-k$ 的奇流. 其直接像 $H\Gamma$ 可被定义为:

$$H\Gamma(\varphi) = \Gamma(H^*\varphi) = \int_\Gamma H^*\varphi = \int_{H(\Gamma)} \varphi\,. \tag{9.4.15}$$

这正是 Γ 在 H 下的像链所定义的流, 前者用于奇异链理论. 该流总有同样的维数 k, 它因此是一个次数为 $n-k$ 的奇流. 另外, 由定向流形 W 以及从 W 到 V 的映射 H

所定义的 V 上的链, 正是由 W 本身及其定向在 W 上所定义的链在 H 下的直接像, 而由 W 本身及其定向在 W 上所定义的链对应的则是次数为 0 的奇流:

$$\overset{m}{\psi} \to \int_W \overset{m}{\psi} .$$

例 4. 定义在某个闭子流形上的流的延拓 设 U^m 为 V^n 的闭子流形, 而 J 为从 U 到 V 的嵌入映射. 则 J 为逆紧映射. 若 ω 为 V 上的形式, 则其逆像 $J^*\omega$ 恰好是 ω 在 U 上所诱导的形式 ω_U. 于是, 若 T 为 U 上的奇流, 则它由 $T^V(\varphi) = T(\varphi_U)$ 所定义的直接像 $T^V = JT$ 被称为 T 在 V 上的延拓. 可知 T^V 支集包含在 U 中; 映射 $T \to T^V$ 为连续线性单射. 该映射保维数, 但一般不保次数; 它在 U 和 V 具有相同维数时保次数. 公式 (9.4.12) 在这里给出

$$\begin{cases} \underline{T}^V \wedge \alpha = (\underline{T} \wedge \alpha_U)^V , \\ \overset{q}{\alpha} \wedge \underline{T}^V = (-1)^{rq} (\alpha_U \wedge \underline{T})^V , \ r = m - n , \\ b(\underline{T}^V) = (b\underline{T})^V , \\ d(\underline{T}^V) = (-1)^r (d\underline{T})^V , \ r = m - n . \end{cases} \tag{9.4.16}$$

定理 2′. *设 V 为流形, 而 U 是 V 的一个与 V 有相同维数的闭子流形使得 U 的边界和 V 的边界没有公共点. 延拓映射 $J: T \to T^V$ 是一个从 $\underline{\mathscr{D}'}(U)$ 到 $\underline{\mathscr{D}'_U}(V)$ 上的同构, 其中 $\underline{\mathscr{D}'}(U)$ 是由 U 上的流所组成的拓扑向量空间, 而 $\underline{\mathscr{D}'_U}(V)$ 是由 V 上的、支集包含在 U 中的流所组成的拓扑向量空间; 该同构保次数和上边缘.*

证明 利用单位分解可将该定理转换成局部的, 于是问题可归结成 $U = \mathbb{R}^n_-$ 且 $V = \mathbb{R}^n$ 的情形; 我们因此可以忘掉流而只谈广义函数. 而 J 为满射可如下得出. 设 S 为 $\mathbb{R}^n$ 上的广义函数且其支集包含在 $\mathbb{R}^n_-$ 中. 对任意的函数 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n_-)$, 设 $\tilde{\varphi}$ 为 φ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个具有紧支集的 $\mathscr{C}^\infty$ 类的函数延拓; 令 $T(\varphi) = S(\tilde{\varphi})$. 这个结果不依赖 φ 的延拓 $\tilde{\varphi}$ 的选取; 这是因为若 $\tilde{\varphi}_1$ 和 $\tilde{\varphi}_2$ 是两个这样的延拓, 则 $\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2$ 本身及其各阶导数均在 $\mathbb{R}^n_-$ 上为零, 而 S 的支集包含在 $\mathbb{R}^n_-$ 中, 故由第 3 章定理 33 可知

$$S(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2) = 0 .$$

于是 $\varphi \to T(\varphi)$ 为 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n_-)$ 上的线性型. 若 φ_j 在某一个 $\mathscr{D}_K(\mathbb{R}^n_-)$ 中趋于 0, 则我们可选取 $\tilde{\varphi}_j$ 使之在 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 中趋于 0①; 故 $\varphi \to T(\varphi)$ 为连续, 从而 T 为 $\mathbb{R}^n_-$ 上的广义函数. 又我们有 $T^{\mathbb{R}^n} = S$; 而这就证明了 J 为满射. 另外 $T \to T^{\mathbb{R}^n}$ 为连续; 为证明 J 为同构, 我们必须证明, 如果 S_j 在 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中趋于 0, 则 T_j 在 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n_-)$ 中趋于 0. 这等价于说 $T_j(\varphi)$ 关于 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n_-)$ 的有界集一致趋于 0: 而这里关于 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n_-)$ 的有界集可被延拓成关于 $\tilde{\varphi} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 的有界集 ①, 由此可得所要结论, 这是因为 S_j 被假设在 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中趋于 0.

① 在第 232 页的脚注 ② 中可见如何从 φ 过渡到 $\tilde{\varphi}$. 在那里 $\tilde{\varphi}$ 被记作 Φ.

例 5. 定义在某个开子集上的流的延拓 设 U 为 V^n 的开子集. 则从 U 到 V 的自然嵌入映射 J 不为逆紧映射, 但对于 U 的每个子集 F, 当 F 在 V 中为闭集时, 映射 J 在 F 上的限制为逆紧映射. 此时我们可对支集包含在 F 中的任意奇流 $\underline{T}$ 来定义 $J\underline{T}$; 而 $J\underline{T}$ 的支集依然包含在 F 中. 并且 $J\underline{T}$ 正好是将 U 上的 $\underline{T}$ 和 $\complement F$ 上的零流 $\underline{0}$ 通过分片粘贴来定义的 $\underline{T}$ 在 V 上的自然延拓.

例 6. 拓扑度, 常值函数 1 的直接像 设 U 和 V 为具有相同维数 n 的无边紧流形, 且 V 为连通. 若 $\widetilde{H}$ 是一个从 U 到 V 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类定向映射, 则它拥有一个拓扑度 $d \in \mathbb{Z}$. 我们可以如下来确定之. 根据 Sard 定理[①], 使得导数 $H'(x)$ 的秩不等于 n 的点 x 所组成的集合在 H 下的像集 B 为 V 中的零测度集. 设 $y \in \complement_V B$. 则 $H^{-1}(\{y\})$ 为有限集. 若 p 为 $H^{-1}(\{y\})$ 中满足下述性质的点 x 的个数: 流形 U 在点 x 处的定向经 $H'(x)$ 转换后与 $\widetilde{H}(x)$ 的定向重合, 而 q 为使得上述两定向相反的点 x 的个数, 则我们有 $d = p - q$.

现在我们来证明常值函数 1 在定向映射 $\widetilde{H}$ 下的直接像 $\widetilde{H}1$ 正好就是常数 d. 首先 (9.4.12) 中的第 4 个公式表明 $\widetilde{H}1$ 的上边缘等于零; 但在连通的无边紧流形上, 上边缘为零的 0 次偶流是一个常值函数 (de Rham 的定理 1 中的第 1° 条, p. 261).

为计算这个常数 $\widetilde{H}1$, 只需在一点 $b \in \complement_V B$ 的邻域内来进行. 点 b 具有一个连通开邻域 $\mathscr{V}$ 使得 $H^{-1}(\mathscr{V})$ 只有有限多个连通分支 $H_k^{-1}(\mathscr{V})$ $(1 \leqslant k \leqslant p+q)$, 且 H 为从每一个 $H_k^{-1}(\mathscr{V})$ 到 $\mathscr{V}$ 的微分同胚. 若 p 为那些使得微分同胚 $H : H_k^{-1}(\mathscr{V}) \to \mathscr{V}$ 将定向转换成 $\widetilde{H}$ 的定向的 k 的个数, 而 q 为使得上述定向相反的 k 的个数, 则 $d = p-q$. 设 $\overset{n}{\underline{\varphi}} \in \overset{n}{\underline{\mathscr{D}}}(\mathscr{V})$. 则我们有

$$\langle \widetilde{H}1, \underline{\varphi} \rangle = \langle 1, \widetilde{H}^* \underline{\varphi} \rangle = \sum_{k=1}^{p+q} \int_{H_k^{-1}(\mathscr{V})} \widetilde{H}^* \underline{\varphi}.$$

但由于结构的转移, 积分

$$\int_{H_k^{-1}(\mathscr{V})} \widetilde{H}^* \underline{\varphi} = \pm \int_{\mathscr{V}} \underline{\varphi},$$

其中正负号按 H 是否将 $H_k^{-1}(\mathscr{V})$ 的定向变为 $\widetilde{H}$ 的定向来确定; 故 $\langle \widetilde{H}1, \underline{\varphi} \rangle = \langle d, \underline{\varphi} \rangle$, 也就是说 $\widetilde{H}1 = d$.

公式 (9.4.12) 中的第一个给出了下面的非凡结果.

设 α 为 V 上的 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式, 则我们有 $\widetilde{H}(1 \wedge (H^*\alpha)) = (\widetilde{H}1) \wedge \alpha$, 也即

$$\widetilde{H}(H^*\alpha) = d.\alpha \text{②}. \tag{9.4.17}$$

若 $d \neq 0$, 则 H^* 为上同调向量空间上的左可逆算子; 故它为单射, 并且对每个次数 p, 流形 U 的第 p 个 Betti 数至少等于 V 的第 p 个 Betti 数. 上同调向量空间上的算子 $\widetilde{H}$

① 参见 SARD [1].

② 我们不写作 $d\alpha$ 而是记作 $d.\alpha$ 以避免与 α 的上边缘产生混淆; 它是指 d 与 α 的乘积.

为右可逆, 而这可以给出关于 Betti 数的同样结果 (根据第 261 页的定理 1, $\mathscr{C}^\infty$ 类形式的上同调与流的上同调相等). 这个关于 Betti 数的结果是由 Hopf 利用纯代数拓扑的方法在一个比流形更为一般的框架下证明的老定理[①].

当然, 由连续性可知 (9.4.17) 甚至对仅为连续的形式 α 也成立; 若在第 278 页中给出的定理 3 中的条件 C 被满足, 则我们可以将 α 换成 V 上的任意流.

定向流形的情形 若 U 和 V 为定向流形, 则从 U 到 V 的任意映射 H 也定义了一个如下的定向映射 $\widetilde{H}$.

设 $\widetilde{U}_+$ 和 $\widetilde{U}_-$ 为由 U 的定向所定义的 $\widetilde{U}$ 的两个分支; 设 $P_{\widetilde{U}}$ 为从 $\widetilde{U}$ 到 U 的投影, 而 $P_{\widetilde{U}_+}$ 和 $P_{\widetilde{U}_-}$ 分别为 $P_{\widetilde{U}}$ 在 $\widetilde{U}_+$ 和 $\widetilde{U}_-$ 上的限制; 第一个为保定向的同构, 而第二个为改变定向的同构. 对 V 也可做同样的定义. 令:

$$\widetilde{H} = \begin{cases} (P_{\widetilde{V}_+})^{-1} \circ H \circ P_{\widetilde{U}_+} & \text{在 } \widetilde{U}_+ \text{上}, \\ (P_{\widetilde{V}_-})^{-1} \circ H \circ P_{\widetilde{U}_-} & \text{在 } \widetilde{U}_- \text{上}. \end{cases}$$

[可注意到所得到的定向映射不是任意的, 这是因为它必然会将 $\widetilde{U}_+$ 映到 $\widetilde{V}_+$ 并且将 $\widetilde{U}_-$ 映到 $\widetilde{V}_-$]. 由此可见, 从 H 出发, 利用 H 或 $\widetilde{H}$, 我们既可以定义偶流的直接像也可以定义奇流的直接像. 另外, 借助偶流和奇流之间由 U 和 V 的定向所定义的对应关系, 我们可以从一个过渡到另外一个. 当然, 若改变两个流形当中一个的定向而让另外一个不变, 则偶流的直接像改变符号. 这表明当 $m = n$ 时, 一个次数为 0 的非负偶流 (比如说是一个非负函数) 的直接像不一定是一个次数为 0 的非负偶流.

微分同胚的情形. 结构转移 现在假设 H 是一个从 U^n 到 V^n 的微分同胚. 借助简单的结构转移, 它因此定义了一个从 $\widetilde{U}$ 到 $\widetilde{V}$ 的微分同胚, 该微分同胚保定向, 因而是一个定向映射 $\widetilde{H}$. 正如前面一样, 它因此使得我们不仅可以得到偶流的直接像而且还可以得到奇流的直接像. 另外, 这些直接像正是那些通过 H 的结构转移而得到的直接像, 这使得我们可以处处将之记作 H 而不是根据不同情况来将之记作 H 或 $\widetilde{H}$. 另外, 在这个特殊情形, 结构转移使得我们也可以定义偶形式和奇形式的直接像, 并且还保持将偶形式和奇形式与同型的流相对应的那个对应. 我们所称的 H^* 此时也可被记作 H^{-1}, 且可以通过 H^{-1} 的结构转移而得到. 另一方面, 若 f 为 U 上的函数, 而 $x \in U$ 且 $y \in V$, 则我们有公式:

$$Hf(y) = f\big(H^{-1}(y)\big), \quad Hf\big(H(x)\big) = f(x). \tag{9.4.18}$$

这就是为什么, 当 T 是一个次数为 0 的偶流, 有时甚或是任意流时, 我们可用 $T_{H^{-1}(x)}$ 来表示流 T_x 在 H 下的直接像. 另外, 对于 $\varphi \in \mathscr{D}(V)$, $\psi \in \mathscr{D}(U)$, $\underline{T} \in \underline{\mathscr{D}'}(U)$, 我们有

$$H\underline{T}(\varphi) = \underline{T}\big(H^{-1}(\varphi)\big), \quad H\underline{T}(H\psi) = \underline{T}(\psi). \tag{9.4.19}$$

① 参见 Hopf [1].

若 $\underline{T} \in \overset{n}{\mathscr{D}'}(U)$ 而 $\varphi \in \overset{0}{\mathscr{D}}(V)$, 则 (9.4.19) 中的第一个公式也可以写成:

$$HT(\varphi) = (\underline{T})_x\big(\varphi(H(x))\big)\,, \tag{9.4.20}$$

也即

$$\underline{T}_{H^{-1}(y)}\big(\varphi(y)\big) = (\underline{T})_x\big(\varphi(H(x))\big)\,.$$

若一方面 H 为从 U^n 到 V^n 的微分同胚, 而另一方面 U 和 V 为定向流形, 则由前面两种方法所定义的映射 $\widetilde{H}$ 不一定是一样的. 注意到这点是有益的. 仅当 H 为定向流形 U 和 V 的结构同构, 也即 H 将 U 的定向转换成 V 的定向时, 它们才会相同. 也可注意到, 若 H 为微分同胚, 而 $\underline{\alpha}$ 为无穷可微的 n 次奇形式且在 U 上处处大于 0, 则 $H\underline{\alpha}$ 是 V 上的一个具有类似性质的形式. 由 $\underline{\alpha}$ 所定义的次数为 0 的偶流和次数为 n 的奇流之间的对应, 经 H 转换成由 $H\underline{\alpha}$ 所定义的次数为 0 的偶流和次数为 n 的奇流之间的对应.

特别地, 若 V^n 为无穷可微定向流形且被赋予了一个无穷可微的 n-形式 $\underline{\alpha} > 0$, 而 H 为保持该结构的自同构, 也即从 V 到它本身的保定向和形式 $\underline{\alpha}$ 的自同构, 则 H 保持由定向所定义的偶流和奇流之间的对应, 也保持由定向以及 $\underline{\alpha}$ 所定义的次数为 0 的流和次数为 n 的流之间的对应. 我们因此可谈论 V 上的广义函数在 H 下的直接像. 这正是将会发生的, 比如说当 $V = G$ 是一个被赋予了左不变定向和左不变 Haar 测度 $\underline{\alpha} = \underline{dx}$ 的李群. 由于这里 $H(x)$ 也可以写成 ax (或 $a + x$, 若 G 为交换群且其上的运算被记作加法), 则对任意的流 T, 我们可将 HT 记作 $T_{a^{-1}x}$ 或 T_{x-a}.

作为另外一个重要的例子, 考虑实数域上的 n 维向量空间 V^n, 而设 H 为从 V 到它本身的线性映射. 这是一个无穷可微映射, 故一般性的结论对之均成立. 映射 H 为微分同胚当且仅当 $\det H \neq 0$. 若 $\underline{dx}$ 是 V 上的一个 Lebesgue 测度, 它在 H 下的直接像为 $|\det H|^{-1}\,\underline{dx}$. 事实上, 我们有:

$$\begin{aligned} H(\underline{dx}).\,\varphi = \underline{dx}.\,(H^{-1}\varphi) &= \int_V \varphi\big(H(x)\big)\,dx \\ &= \int_V \varphi(y)|\det H^{-1}|\,dy = \frac{\underline{dx}.\,\varphi}{|\det H|}\,. \end{aligned} \tag{9.4.21}$$

故 H 保 Lebesgue 测度当且仅当 $\det H = \pm 1$. 最后 H 保定向当且仅当 $\det H > 0$.

于是若 H 的行列式等于 $+1$ 且我们已选取 Lebesgue 测度 $\underline{dx}$ 以及 V 的定向, 则 H 保持该结构, 从而保持相同次数的偶流与奇流之间的等同关系, 因而也保持次数为 0 的流与次数为 n 的流之间的等同关系. 此时我们可以讨论 V 上的广义函数以及 V 上的广义函数在 H 下的直接像.

相反, 当 $\det H \neq 1$ 时, 仅当对“广义函数”这个词赋予了明确的意义 (比如说我们在第 250 页所说的次数为 0 的偶流) 之后, 我们才可以这样做. 例如, 取 $V = \mathbb{R}^n$ 并考虑广义函数 δ 以及从 V 到 V 的线性映射 H. 若将 δ 看成是一个 n 次奇流 $\overset{n}{\underline{\delta}}$,

则我们有 $H\overset{n}{\underline{\delta}}=\overset{n}{\underline{\delta}}$. 若将之看成是一个 n 次偶流 $\overset{n}{\delta}$, 按理说 $H\overset{n}{\delta}$ 应该没有意义, 这是因为 H 不是一个定向映射. 但当 $\det H\neq 0$ 时, 映射 H 是一个微分同胚, 则我们总可以通过结构转移来定义 $H\delta$. 如果 $\det H>0$, 则 H 为定向流形 $\mathbb{R}^n$ 的结构自同构, 故 $H\overset{n}{\delta}=\overset{n}{\delta}$; 如果 $\det H<0$, 则 H 改变定向, 故除了相差一个符号外, 它保持由定向所定义的偶流和奇流之间的对应, 从而 $H\overset{n}{\delta}=-\overset{n}{\delta}$ ①.

若将 δ 看成是次数为 0 的奇流 $\overset{0}{\delta}$, 则它在 $\overset{n}{\mathscr{D}}$ 上定义了线性型

$$\overset{0}{\underline{\delta}}\,(\varphi\overbrace{dx}^{n})=\varphi(0)\,,$$

其中 $\overbrace{dx}^{n}$ 表示微分形式 $dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$, 从而我们将有

$$\begin{aligned}(9.4.22)\qquad H\overset{0}{\underline{\delta}}\,(\varphi\overbrace{dx}^{n})&=\overset{0}{\underline{\delta}}\,(H^*(\varphi\overbrace{dx}^{n}))\\&=\overset{0}{\underline{\delta}}\,\Big(\varphi(Hx)\,(\det H)\,dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n\Big)\\&=\varphi(0)(\det H)=(\det H)\,\overset{0}{\underline{\delta}}\,(\varphi\overbrace{dx}^{n})\,,\end{aligned}$$

故 $H\overset{0}{\underline{\delta}}=(\det H)\overset{0}{\underline{\delta}}$. 最后将 δ 看成是次数为 0 的偶流 $\overset{0}{\delta}$, 则仅当 $\det H\neq 0$ 时 $H\overset{0}{\delta}$ 才会有意义; 从而借助同前面一样的推理, 我们将有 $H\overset{0}{\delta}=|\det H|\overset{0}{\delta}$.

前面的结论可概述如下:

$$(9.4.23)\qquad \begin{cases}H\overset{n}{\underline{\delta}}=\overset{n}{\underline{\delta}},\ H\overset{0}{\underline{\delta}}=|\det H|\overset{0}{\delta},\\ H\overset{n}{\delta}=\big(\operatorname{sgn}\det H\big)\overset{n}{\delta},\ H\overset{0}{\underline{\delta}}=(\det H)\overset{0}{\delta},\ \text{若}\ \det H\neq 0\,.\end{cases}$$

§5. 变量替换. 流的逆像 ②

变量替换 设 H 为从 U^m 到 V^n 的无穷可微映射. 将 U 中的点记作 x 而将 V 中的点记作 y. 则映射 H 可写成 $x\to y=H(x)$. 对 V 上的函数 f 施行坐标变换 $y=H(x)$, 就是在 $f(y)$ 中将 y 换成 $H(x)$. 我们因此得到 $f\big(H(x)\big)$, 而这就在 U 上定义了函数 $f\circ H$. 所得到的正好是 f 在 H 下的逆像, 也记作 H^*f: $(H^*f)(x)=f\big(H(x)\big)$. 对于流, 是否存在这样的变量替换, 也就是说一个简单的运算, 将 V 上的每个流 T 与逆像 H^*T 相对应, 而后者为 U 上的流? 若将 T 记作 T_y, 其逆像将被记作 $T_{H(x)}$.

① 但若记 $\widetilde{H}$ 为由 $\mathbb{R}^n$ 的定向所定义的与 H 相伴的定向映射, 则 $\widetilde{H}\overset{n}{\delta}$ 总有意义 (但当 $\det H\leqslant 0$ 时, 它不能通过结构转移来定义). 于是对任意的 H, 我们总有 $\widetilde{H}\overset{n}{\underline{\delta}}=\overset{n}{\underline{\delta}}$; 参见第 274 页.

② 广义函数中的许多变量替换都曾经应用在物理学中. ALBERTONI – CUGIANI [1] 似乎是关于这一方面的第一篇数学论文.

无穷可微奇形式的直接像 大家将会看到, 在某些条件下, 对于偶流, 这样的逆像存在. 设 $\underline{S}$ 为 U 上具有紧支集的 p 次奇流. 它有一个直接像 $H\underline{S}$, 这是 V 上的一个具有紧支集的 $p-r$ 次奇流, 其中 $r=m-n$. 若 $\underline{S}$ 是一个奇微分形式 $\underline{\omega}$, 即便它为无穷可微, 我们知道 (例 2, p. 270), 直接像 $H\underline{\omega}$ 本身也不一定是一个形式. *但我们将假设由一个具有紧支集的无穷可微奇形式 $\underline{\omega}$ 所定义的奇流的直接像 $H\underline{\omega}$ 总是一个无穷可微奇形式, 我们将之记作 $H\underline{\mathscr{D}}\subset\underline{\mathscr{D}}$.* 则由此定义的从 $\underline{\mathscr{D}}_K$ 到 $\underline{\mathscr{D}}_{H(K)}$ 的映射 H 为连续, 其中 K 为 U 的紧子集.

为此, 只需应用闭图像定理. 从 $\underline{\mathscr{E}}'_K(U)$ 到 $\underline{\mathscr{E}}'_{H(K)}(V)$ 的直接像映射 $H:\underline{T}\to H\underline{T}$ 为连续, 故其图像为 $\underline{\mathscr{E}}'_K(U)\times\underline{\mathscr{E}}'_{H(K)}(V)$ 中的闭集; 它与子空间 $\underline{\mathscr{D}}_K(U)\times\underline{\mathscr{D}}_{H(K)}(V)$ 的交集因此更是关于这个子空间的拓扑的闭集, 因为该拓扑比诱导拓扑更细.

由于 $\underline{\mathscr{D}}_K$ 和 $\underline{\mathscr{D}}_{H(K)}$ 为 Fréchet 空间, 由此可导出 H 为连续[①], 故它也是从 $\underline{\mathscr{D}}(U)$ 到 $\underline{\mathscr{D}}(V)$ 的连续映射. 仅当 $m\geqslant n$ 也即 $r\geqslant 0$ 时, 这些才会发生; 事实上, 若 $m<n$, 则 $H(U)$ 为 V 中的零测度集 (这就是 Sard 定理, 参见 SARD [1]), 并且当 $\underline{\varphi}\in\underline{\mathscr{D}}(U)$ 时, 直接像 $H\underline{\varphi}$ 的支集是一个没有内点的紧集, 故 $H\underline{\varphi}$ 不可能是一个不恒为零的 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式; 但由此会有 $H(\underline{\mathscr{D}})$ 等于零, 进而通过取极限可知 $H(\underline{\mathscr{D}}')$ 等于零, 而这是荒谬的, 因为对任意的 $a\in U$, 我们有 $H\overset{m}{\delta}_{(a)}=\overset{n}{\delta}_{(H(a))}$.

偶流的逆像 对于 V 上的 p 次偶流 $\overset{p}{T}$ 以及任意的 $\overset{m-p}{\underline{\varphi}}\in\overset{m-p}{\underline{\mathscr{D}}}(U)$, 令:

$$(H^*\overset{p}{T}).\overset{m-p}{\underline{\varphi}}=(-1)^{pr}\overset{p}{T}.\left(H\overset{m-p}{\underline{\varphi}}\right), \tag{9.5.1}$$

也即 $\underline{\varphi}.(H^*T)=(H\underline{\varphi}).T$[②].

由此我们定义了一个与 T 的次数一样, 同为 p 次的偶流 H^*T. 若现在当 $\underline{\varphi}$ 具有紧支集且仅为 k 次连续可微时, 偶流 $H\underline{\varphi}$ 也如此, 也就是说 $H\underline{\mathscr{D}}^k\subset\underline{\mathscr{D}}^k$, 则 H 也是一个从 $\underline{\mathscr{D}}_K^k$ 到 $\underline{\mathscr{D}}_{H(K)}^k$ 的连续映射. 从而当 T 的阶不大于 k 时, 偶流 H^*T 也会如此, 并且公式 (9.5.1) 对 $\underline{\varphi}\in\underline{\mathscr{D}}^k$ 也成立.

当前面的条件满足时, 映射 H^* 是一个从 $\mathscr{D}'(V)$ 到 $\mathscr{D}'(U)$ 的线性映射, 并且在前面所指出的那个极为特殊的情形, 它是一个从 $\mathscr{D}'^k(V)$ 到 $\mathscr{D}'^k(U)$ 的线性映射; 该映射也为连续, 这是因为它是从 $\underline{\mathscr{D}}(U)$ 到 $\underline{\mathscr{D}}(V)$ [相应地, 从 $\underline{\mathscr{D}}^k(U)$ 到 $\underline{\mathscr{D}}^k(V)$] 的连续映射 $\underline{\varphi}\to H\underline{\varphi}$ 的转置. 我们因此可以通过将从 $\mathscr{E}(V)$ 到 $\mathscr{E}(U)$ 的运算 H^* 进行连续延拓来得到所要的结论. 若 T 是一个连续的微分形式 ω, 则 $H^*\omega$ 与 T 的通常意义下的逆像重合, 后者也被记作 $H^*\omega$. 为证明之, 只需注意到对任意的 $\underline{\varphi}\in\underline{\mathscr{D}}(U)$, 均有 $(H\underline{\varphi}).\omega=\underline{\varphi}.(H^*\omega)$, 其中 $H^*\omega$ 为通常意义下的逆像.

① 参见 BOURBAKI [6], 第 15 分册第 1 章第 3 节第 3° 段, 定理 1 的推论 5, p. 37.

② 为使公式更漂亮, 可见应将 H 放在点积左边而得 $(H\underline{\varphi}).T$, 同时将 H^* 放在右边而得 $\underline{\varphi}.(H^*T)$.

为此虑用另外记号来表述公式 (9.5.1): 在该式中将 T 换成 φ 而将 $\underline{\varphi}$ 换成 ω. 当 $\underline{\varphi} \in \mathscr{D}'(U), \omega \in \mathscr{D}(V)$ 且 H 在 $\underline{\varphi}$ 的支集上为逆紧映射时, 该公式已成立. 但我们曾经见到过, 当 $\underline{\varphi}$ 具有紧支集时, 我们可以允许 ω 的支集为任意集合 (p. 267); 而对于次数为 0 的 $\underline{\varphi} \in \mathscr{D}'^0$, 我们可以取 ω 为连续; 这就在我们这里所处的条件下恰好给出了所要找的公式 $(H\underline{\varphi}).\omega = \underline{\varphi}.(H^*\omega)$ ①.

逆像的基本性质: 传递性, 支集, 乘法, 上边缘 "逆像"运算自然具有传递性. 若 H_1 和 H_2 分别是从 U 到 V 和从 V 到 W 的可定义逆像的映射, 则对于 $H_2 \circ H_1$ 也可定义逆像, 且逆像 $(H_2 \circ H_1)^*$ 可由逆像的复合而得到: $(H_2 \circ H_1)^* = H_1^* \circ H_2^*$.

逆像 H^*T 的支集包含在 T 的支集 A 的逆像 $H^{-1}(A)$ 中. 事实上, 若 $\underline{\varphi}$ 的支集包含在 $\complement H^{-1}(A)$ 中, 则 $H\underline{\varphi}$ 的支集包含于 $H(\complement H^{-1}(A)) \subset \complement A$; 从而 $H\underline{\varphi}.T = 0$, 于是我们有 $\underline{\varphi}.(H^*T) = 0$. 由此可知, 若 T 在 V 的某个开子集 Ω 上已知, 则我们可以在 $H^{-1}(\Omega)$ 上确定 H^*T. 事实上, 若 T_1 和 T_2 为 V 上的两个流且在 Ω 上重合, 则 $T_1 - T_2$ 的支集包含在 $\complement\Omega$ 中. 故 $H^*(T_1 - T_2)$ 的支集包含于 $H^{-1}(\complement\Omega) = \complement H^{-1}(\Omega)$, 进而在 $H^{-1}(\Omega)$ 上成立 $H^*T_1 = H^*T_2$.

条件 $H\underline{\mathscr{D}} \subset \mathscr{D}$ 使得我们可以断言逆像的存在性是 U 上的纯局部性质. 若 U 的开覆盖 $(\Omega_i)_{i\in I}$ 使得 H 在每个 Ω_i 上的限制均具有逆像, 则 H 本身亦具有逆像.

[事实上, 利用从属于开覆盖 $(\Omega_i)_{i\in I}$ 的单位分解可将 $\varphi \in \underline{\mathscr{D}}$ 表示成有限和

$$\sum_i \underline{\varphi}_i,$$

其中 $\underline{\varphi}_i$ 的支集包含在 Ω_i 中. 由假设, 流 $H\underline{\varphi}_i$ 是 V 上的一个无穷可微形式, 从而流 $H\underline{\varphi} = \sum_i H\underline{\varphi}_i$ 亦如此.] 另外, 此时 H^*T 在 V 上局部地有定义: H^*T 在 Ω_i 上就是 T 在从 Ω_i 到 V 的映射 H 下的逆像; 故 H^*T 在 U 中可由这些定义在 Ω_i 上的部分通过粘贴而得到. 特别地, 由此可知, 即便 H 作为从 U 到 V 的映射不满足所要求的条件, 但只要 T 的支集包含在 V 的闭子集 A 中且在 U 中存在 $H^{-1}(A)$ 的开邻域 U_1 使得 H 在 U_1 上的限制满足所要的条件, 我们就可以定义 H^*T. 事实上, 我们可以针对 H 在 U_1 上的这个限制 H_1 来计算 H_1^*T, 所得到的 H_1^*T 的支集包含在 U 的闭子集 $H^{-1}(A)$ 中; 于是 H_1^*T 可典则延拓成 U 上的一个在 $\complement H^{-1}A$ 上为零的流, 我们依旧将之记作 H^*T. 该流显然不依赖邻域 U_1 的选择; 另外, 我们依然会有有 (9.5.1), 其中 $\langle H\underline{\varphi}, T\rangle$ 作为奇异支集不相交的两个流的点积有意义 [这里 T 的奇异支集包含在它的支集 A 中; 而 $H\underline{\varphi}$ 的奇异支集包含在 $\complement U_1$ 中].

我们因此有下列命题:

① 大家可思考当 ω 为几乎处处有定义的局部可积形式时会是怎样. 我们认为似乎不太可能仅由条件 $H\underline{\mathscr{D}} \subset \underline{\mathscr{D}}$ 导出局部可积形式在通常意义下的逆像也为局部可积且满足 $(H\underline{\varphi}).\omega = \underline{\varphi}.(H^*\omega)$.

定理 3. 设 H 为从无穷可微流形 U^m 到另外的无穷可微流形 V^n 的无穷可微映射. 假设 H 满足条件 C (相应地, 条件 C_k): 由无穷可微 (相应地, k 阶连续可微) 奇微分形式所定义的支集为紧集的奇流在 H 下的像还是一个无穷可微 (相应地, k 阶连续可微) 奇微分形式. 则对于 V 上的任意 p 次偶流 T (相应地, 阶不大于 k 的 p 次偶流 T), 我们可以通过 (9.5.1) 来定义逆像 H^*T, 这是一个 p 次偶流 (相应地, 阶不大于 k 的 p 次偶流). 由此定义的映射 H^* 为线性映射. 逆像 H^*T 的支集包含在 T 的支集在 H 下的逆像 $H^{-1}(A)$ 中. 若 T 在 V 的开子集 Ω 上已知, 则我们可以在 $H^{-1}(\Omega)$ 上确定 H^*T. 若 H 是一个从 U^m 到 V^n 的微分同胚, 则运算 H^* 总存在且与 H^{-1} 定义的结构转移运算相等.

若 α 为无穷可微偶形式 (相应地, α 为 k 阶无穷可微且 T 的阶不大于 k), 而 ξ 为 U^m 上的无穷可微向量场且以无穷可微向量场 η 作为其直接像, 则我们有公式:

$$(9.5.2)\qquad \begin{cases} H^*(T\wedge\alpha) = (H^*T)\wedge(H^*\alpha)\,, \\ H^*(\alpha\wedge T) = (H^*\alpha)\wedge(H^*T)\,, \\ H^*(dT) = d(H^*T) \text{ (若 } T \text{ 的阶不大于 } k-1)\,, \\ H^*\big(\theta(\eta)T\big) = \theta(\xi)(H^*T) \text{ (若 } T \text{ 的阶不大于 } k-1)\,, \end{cases}$$

其中在最后两个公式中假设 U 和 V 为无边流形[①].

若 U^m 和 V^n 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 (其变量分别记作 x_i, y_j), 而 $\overset{0}{T}$ 是一个次数为 0 的偶流, 而 H 由函数

$$y_j = H_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ (1 \leqslant j \leqslant n)$$

来定义, 则我们有“复合函数求导运算”公式:

$$(9.5.3)\qquad \frac{\partial \overset{0}{T}_{H(x)}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H_j}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \overset{0}{T}}{\partial y_j}\right)_{H(x)}.$$

对于定向映射 $\widetilde{H}$ 和奇流也有类似结论.

除 (9.5.2) 和 (9.5.3) 外, 其它所有结论均已被证明. 而 (9.5.2) 和 (9.5.3) 对 $\mathscr{C}^\infty$ 类形式成立, 故由连续延拓可知对流亦成立.

现在还需知道定理 3 中指出的条件 C 能被满足的情形.

---

① 由于所涉及的均为 U 上的局部性质, 故只需 U 无边且 $H(U)$ 与 V 的边界不相交. 下面是 U 为带边流形时的一个反例: 设 V 无边, $U = \mathbb{R}_- \times V$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$, 而 $H: \mathbb{R}_- \times V \to V$ 为自然投影. 设 $\overset{0}{T} = 1$; 则 $dT = 0$, 从而 $H^*(dT) = 0$, 而 $H^*T = 1 = $ 链U, 故

$$d(H^*T) = -b(\text{链}U) = -\text{链}(bU) = -\text{链}(\{0\}\times V) \neq 0\,.$$

映射 H 为局部微分同胚的情形 假设 U 为 V 的开子集. 我们知道 V 上的任意流 T 可在 U 上诱导一个流. 该流正是与从 U 到 V 的自然嵌入映射 H 相对应的逆像 H^*T. 事实上, 映射 $\underline{\varphi} \to H\underline{\varphi}$ 不是别的正是从 $\mathscr{D}(U)$ 到从 $\mathscr{D}(V)$ 的自然嵌入映射. 将该例子与微分同胚的例子以及对 H 所要求的条件的局部特性结合起来, 我们可立刻给出一个更为有趣的例子: 若 H 是一个从 U 到 V 的局部微分同胚, 则我们可以定义偶流的逆像. 回忆一下, 称 H 为局部微分同胚, 若对任意的点 $a \in U$, 均存在邻域 U_a 使得 $H(U_a)$ 为 V 中开子集且 H 在 U_a 上的限制 H_a 是一个从 U_a 到 $H(U_a)$ 的微分同胚; 则从 U_a 到 V 的映射 H_a 就是从 U_a 到 $H(U_a)$ 上的微分同胚 H_a 与从 $H(U_a)$ 到 V 的自然嵌入映射的复合, 且对这两个映射当中的任何一个, 逆像均存在; 故对于从 U_a 到 V 的映射 H_a, 逆像也存在, 再由局部性质可知, 对于从 U 到 V 的映射 H, 逆像存在. 另外, 对于 V 上的任意流, 可知如何具体地表示 H^*T; 在 U_a 上, 逆像 H^*T 就是 T 在 $H(U_a)$ 上的限制在 H_a^{-1} 下的转移; 而在 U 上, 逆像 H^*T 由这些定义在 U_a 上的部分通过粘贴而得到. 也可注意到, 由一个局部微分同胚可典则地定义一个定向映射. 这是因为 H_a 可定义一个从 U_a 到 V 的定向映射 $\widetilde{H}_a$ (参见 p.273), 而我们则可以通过粘贴 $\widetilde{H}_a$ 来定义 $\widetilde{H}$. 我们因此也可以定义奇流的逆像.

例子: 一维变量替换 我们将马上推出关于与从实直线 $\mathbb{R}$ 到它本身的映射 $y = H(x)$ 相对应的最简单的例子的公式. 虽然这里 $U = V = \mathbb{R}$, 但我们依旧分别用 x 和 y 来表示目标空间和像空间的变量以示区别. 设 T_y 为 $\mathbb{R}$ 上的流, 其支集为 A, 并假设导函数 H' 在逆像 $H^{-1}(A)$ 的任意点处不为零. 则也存在 $H^{-1}(A)$ 的邻域 Ω 使得 H' 在它上面处处不为零. 故 H 是一个从 Ω 到 $\mathbb{R}$ 的局部微分同胚, 进而可知 H^*T 存在. 我们将给出这个逆像的显示表示.

1° 首先设 $\overset{1}{\underline{\varphi}} \in \overset{1}{\mathscr{D}}_x$ 是一个次数为 1 的奇形式. 我们可以将之写作 $\psi\, \underline{dx}$, 其中 $\underline{dx}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度, 它被看成是次数为 1 的奇流. 若 Ω_i 为 Ω 的开子集使得 H 在 Ω_i 上的限制 H_i 是一个从 Ω_i 到 Ω 的微分同胚, 而 ψ 的支集包含在 Ω_i 中, 则通过结构转移, 我们有:

$$H\big(\psi(x)\, \underline{dx}\big) = \psi\big(H_i^{-1}(y)\big) H(\underline{dx}) = \frac{\psi\big(H_i^{-1}(y)\big)\, \underline{dy}}{\big|H_i'\big(H_i^{-1}(y)\big)\big|}. \tag{9.5.4}$$

若现在 ψ 的支集包含在 Ω 中, 而 $(\Omega_i)_{i\in I}$ 是由上述类型的开集所构成的 Ω 的一个开覆盖, 并且 $(\alpha_i)_{i\in I}$ 为从属于该覆盖的单位分解, 则可知:

$$H\big(\psi(x)\, \underline{dx}\big) = \sum_i \frac{\alpha_i\big(H_i^{-1}(y)\big)\psi\big(H_i^{-1}(y)\big)\, \underline{dy}}{\big|H_i'\big(H_i^{-1}(y)\big)\big|} = \theta(y)\, \underline{dy}. \tag{9.5.5}$$

其中函数 θ 被定义为:

$$\theta(y) = \sum_{H(x)=y} \frac{\psi(x)}{|H'(x)|}, \tag{9.5.6}$$

根据对 H 所做的假设, 这里的和式 Σ 表示一个总是只有有限多项的求和 [1]. 这表明次数为 0 的偶流 $\overset{0}{T}$ 的逆像的定义为:

$$\overset{0}{T}_{H(x)}\cdot\big(\psi(x)\,\underline{dx}\big)=\overset{0}{T}\cdot\big(H\big(\psi(x)\,\underline{dx}\big)\big)=\overset{0}{T}\cdot\big(\theta(y)\,\underline{dy}\big)\ [2]\,. \tag{9.5.7}$$

2° 现在设 $\overset{1}{\varphi}\in\overset{1}{\mathscr{D}}_x$ 是一个可被次数为 1 的偶形式来表示的流. (将 H 换成与局部微分同胚 H 典则相伴的定向映射 $\widetilde{H}$ 后) 可做类似计算. 这次 $\overset{1}{\varphi}=\psi\,dx$, 其中 dx 应被看成是一个次数为 1 的寻常微分形式而不是奇形式. 我们因此应在 (9.5.5), (9.5.6) 和 (9.5.7) 中将 $|H'|$ 换成 H', 而做了这个修正后, 对于次数为 0 的奇流 $\overset{0}{\underline{T}}$, 我们将有一个同样的最终公式.

3° 现在设 $\overset{0}{\varphi}\in\overset{0}{\mathscr{D}}_x$ 为寻常函数. 若 φ 的支集包含在 Ω_i 中, 则它的由结构转移所定义的直接像为:

$$(H_i\varphi)(y)=\varphi\big(H_i^{-1}(y)\big)\,. \tag{9.5.8}$$

于是我们最终有:

$$(H\varphi)(y)=\sum_i\alpha_i\big(H_i^{-1}(y)\big)\varphi\big(H_i^{-1}(y)\big)=\theta(y)\,,\quad \text{其中 }\theta(y)=\sum_{H(x)=y}\varphi(x)\,, \tag{9.5.9}$$

从而次数为 1 的奇流 $\overset{1}{\underline{T}}_y$ 的逆像 $H^*\overset{1}{\underline{T}}_y$ 可由下式给出:

$$(\overset{1}{\underline{T}}_{H(x)}\cdot\varphi=\overset{1}{\underline{T}}_y\cdot\theta(y)\,,\quad \overset{1}{\underline{T}}_y\in\overset{1}{\underline{\mathscr{D}}}{}'_y\,. \tag{9.5.10}$$

4° 最后设 $\overset{0}{\underline{\varphi}}\in\overset{0}{\underline{\mathscr{D}}}_x$ 为挠函数, 我们可将之写成 $\overset{0}{\underline{\varphi}}=\underline{\varepsilon}\,\overset{0}{\psi}$, 其中 $\overset{0}{\psi}$ 为寻常函数, 而 $\underline{\varepsilon}$ 为挠函数, 它将 $\mathbb{R}$ 的典则定向对应于常数 $+1$ 并将与 $\mathbb{R}$ 的典则定向相反的定向对应于常数 -1. 在结构转移运算 H_i 中我们必须要非常小心, 且易知 $H_i\underline{\varphi}$ 由下式定义:

$$H_i\big(\underline{\varepsilon}\,\psi(x)\big)=\pm\,\underline{\varepsilon}\,\psi\big(H_i^{-1}(y)\big)\,. \tag{9.5.11}$$

在该公式中, 当 $H'\big(H_i^{-1}(y)\big)>0$ 时, 符号 $\pm$ 取为 $+$, 而当 $H'\big(H_i^{-1}(y)\big)<0$ 时, 则取为 $-$. 在这些条件下, 我们将有:

$$\begin{cases} H\big(\underline{\varepsilon}\,\psi(x)\big)=\underline{\varepsilon}\displaystyle\sum_i \operatorname{sgn}\big(H'\big(H_i^{-1}(y)\big)\big)\alpha_i\big(H_i^{-1}(y)\big)\psi\big(H_i^{-1}(y)\big)=\underline{\varepsilon}\,\theta(y)\,,\\[2ex] \text{其中 }\theta(y)=\displaystyle\sum_{H(x)=y}\operatorname{sgn}\big(H'(x)\big)\psi(x)\,. \end{cases} \tag{9.5.12}$$

---

[1] 对于 $\mathbb{R}$ 上给定的 y, 逆像 $H^{-1}(\{y\})$ 可能是无限集, 但该集合仅包含 ψ 的支集中的有限多个点, 这是因为该支集可被有限多个 Ω_i 覆盖, 而在每个 Ω_i 上 $H=H_i$ 为双射.

[2] 由于 T 的次数为 0, 我们可以在 (9.5.1) 中交换点积中的各项而不改变符号.

最后, 对于次数为 1 的偶流 $\underline{\overset{1}{T}}$, 我们有:

(9.5.13) $$\underline{\overset{1}{T}}_{H(x)}\cdot\underline{\varepsilon}\,\psi(x)=\underline{\overset{1}{T}}_{y}\cdot\underline{\varepsilon}\,\theta(y)\,.$$

这四个公式表明所得到的结果本质上依赖所考虑的流的性质: 奇偶性, 次数为 0 还是 1. 故我们不能讨论广义函数的逆像或变量替换而不具体指出"广义函数"这个词的具体含义; 这是因为函数 H 不是一个微分同胚, 并且即便它是一个微分同胚, 它也不会因此是被赋予了典则定向和典则 Lebesgue 测度的实直线上的自同构. 若 T 是一个在 $\mathbb{R}$ 上给出的广义函数, 则它代表四个分别是次数为 0 或 1 的偶流或奇流. 若前面所考虑的关于 H 的条件均满足 [在 $H^{-1}(A)$ 的任意点处 $H'(x)\neq 0$], 则这四个流的逆像是 $\mathbb{R}$ 上的具有不同性质的流. 由于 $\mathbb{R}$ 被赋予了典则定向和典则 Lebesgue 测度, 于是与这些流当中的每一个均相伴一个广义函数, 但这四个广义函数一般不相同. 比如说, 现在从 $\mathbb{R}$ 上的广义函数 δ_y 出发. 对 H 所要求的条件如下: 对任意的点 a, 若 $H(a)=0$, 则 $H'(a)\neq 0$. 在这些条件下, 若将与该广义函数相伴的四个流记为 $\overset{0}{\delta}$, $\underline{\overset{0}{\delta}}$, $\overset{1}{\delta}$, $\underline{\overset{1}{\delta}}$, 则这四个流在 H 下的逆像如下:

(9.5.14) $$\begin{cases}\overset{0}{\delta}_{H(x)}=\displaystyle\sum_{H(a)=0}\frac{\overset{0}{\delta}_{x-a}}{|H'(a)|}\,,\\[2mm] \underline{\overset{0}{\delta}}_{H(x)}=\displaystyle\sum_{H(a)=0}\frac{\underline{\overset{0}{\delta}}_{x-a}}{H'(a)}\,,\\[2mm] \overset{1}{\delta}_{H(x)}=\displaystyle\sum_{H(a)=0}\operatorname{sgn}\big(H'(a)\big)\,\overset{1}{\delta}_{x-a}\,,\\[2mm] \underline{\overset{1}{\delta}}_{H(x)}=\displaystyle\sum_{H(a)=0}\underline{\overset{1}{\delta}}_{x-a}\,,\end{cases}$$

例如, 我们将有下述公式:

(9.5.15) $$\overset{0}{\delta}_{x^2-a^2}=\frac{1}{2|a|}\Big(\overset{0}{\delta}_{x+a}+\overset{0}{\delta}_{x-a}\Big),\quad \text{其中 } a\neq 0\text{[①]}\,.$$

因此若不具体指出所涉及的 δ 是什么, 此时讨论 δ 在 H 下的逆像也即 $\delta_{H(x)}$ 没有意义. 我们在第 250 页所指出的"广义函数"意味着"次数为 0 的偶流". 但对于 δ, 这有些混淆不清, 因为这个在任意流形上都有意义的 δ 为 Dirac 测度, 它是 n 次奇流 $\overset{n}{\delta}_{(a)}$ $(a\in V)$; 而物理工作者则将 $\delta_{H(a)}$ 看成是直线 $\mathbb{R}$ 上的 0 次偶流 $\overset{0}{\delta}$ 的逆像.

如果不是从 δ 而是从函数 f 所定义的广义函数出发, 则与之对应的那四个流显然是由形式 $f\big(H(x)\big)$, $\operatorname{sgn}\big(H'(x)\big)\,\underline{\varepsilon}\,f\big(H(x)\big)$, $f\big(H(x)\big)H'(x)\,dx$, $f\big(H(x)\big)|H'(x)|\,\underline{dx}$ 所定义的流.

① 这里 $\overset{0}{\delta}_{x^2}$ 没有意义.

我们已在第 279 页以及随后的几页中见到 f 为连续函数时的情形. 但这对局部可积的函数 f 也成立, 这是因为 H 在每点 $a \in \mathbb{R}$ 的邻域上的限制为 H_a 为微分同胚, 而 H^* 在该邻域上等于 H_a^{-1} 定义的结构转移运算, 而这正是寻常逆像 H^*. 与这四个流相伴的广义函数依然互不相同:

$$f\big(H(x)\big)\,,\ \pm f\big(H(x)\big)\,,\ f\big(H(x)\big)H'(x)\,,\ f\big(H(x)\big)|H'(x)|\,.$$

再给一个有趣的例子. 考虑 $\mathbb{R}$ 上的次数为 1 的偶流

$$\overset{1}{T}_y = \mathrm{Pf.}\, Y(y)\frac{dy}{y}\,.$$

现在我们来作变量替换 $y = H(x)$, 其中 H 是一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类微分同胚. 出于简化, 假设 $H' > 0$; 则 H 保 $\mathbb{R}$ 的定向, 且我们可以不用区别偶流和奇流. 同样地, 假设 $H(0) = 0$. 公式 (9.5.13) 给出

$$\begin{aligned}(9.5.16)\qquad \big\langle \overset{1}{T}_{H(x)}, \psi(x)\big\rangle &= \mathrm{Pf.}\int_0^{+\infty} \psi\big(H^{-1}(y)\big)\frac{dy}{y}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^{+\infty}\psi\big(H^{-1}(y)\big)\frac{dy}{y} - \psi(0)\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{H^{-1}(\varepsilon)}^{+\infty}\psi(x)\frac{H'(x)}{H(x)}\,dx - \psi(0)\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\\ &= \lim_{H^{-1}(\varepsilon)\to 0}\left(\int_{H^{-1}(\varepsilon)}^{+\infty}\psi(x)\frac{H'(x)}{H(x)}\,dx\right.\\ &\qquad \left. -\psi(0)\log\frac{1}{H^{-1}(\varepsilon)} + \psi(0)\log H'(0)\right).\end{aligned}$$

我们因此有:

$$(9.5.17)\qquad \left(\mathrm{Pf.}\, Y(y)\frac{dy}{y}\right)_{y=H(x)} = \mathrm{Pf.}\, Y\big(H(x)\big)\frac{H'(x)}{H(x)}\,dx + \big(\log H'(0)\big)\,\delta\,.$$

正如在 (2.2.25) 中曾指出, 这等价于说有限部分积分方法在变量替换下不是不变的.

同样地, 我们也有:

$$(9.5.18)\qquad \left(\mathrm{Pf.}\, Y(-y)\frac{dy}{y}\right)_{y=H(x)} = \mathrm{Pf.}\, Y\big(-H(x)\big)\frac{H'(x)\,dx}{H(x)} - \big(\log H'(0)\big)\,\delta\,.$$

然而:

$$(9.5.19)\qquad \left(\mathrm{vp.}\,\frac{dy}{y}\right)_{y=H(x)} = \mathrm{vp.}\,\frac{H'(x)\,dx}{H(x)}\,.$$

当然, 即便不假设 $H' > 0$ 以及 $H(0) = 0$, 上述这些结论依旧成立.

在作变量替换时, "Cauchy 主值" 广义函数如所对应的函数那样变换.

纤维空间: 微分形式在纤维上的偏积分, 纤维空间上形式的直接像, 基流的逆像

前面研究的局部微分同胚的情形非常特殊. 下面是逆像存在的更一般的情形:

设 W^r 和 V^n 是两个无穷可微流形, 而 H 为从 $U = W \times V$ 到 V 的自然投影. 为使 U 能成为一个流形, 我们将假设 W 或 V 为无边流形. 我们将证明此时若 φ 为 m 阶连续可微微分形式, 则其直接像 $H\varphi$ 亦如此. 作为开始, 我们将假设 W 为定向流形. 因此我们没有必要区分偶流和奇流.

首先我们来给出微分形式的一个新解释. 设 ω 为流形 U 上的一个微分形式, 而 W 为点 $a \in U$ 处的多重切向量. 则 X 与多重余向量 $\omega(a)$ 的点积 $\langle X, \omega(a)\rangle$ 是一个复数. 若让 X 变, 则可知 ω 定义了一个函数 $X \to \langle X, \omega(a)\rangle$, 也就是说在 U 上的多重切向量纤维空间 $\mathscr{U}$ 上定义了一个函数.

该函数在由点 $a \in U$ 处的多重切向量所组成的向量子空间上的限制为线性函数; 反过来, 空间 $\mathscr{U}$ 上的任意一个在每个上述向量子空间上的限制为线性的函数可以被 U 上的某个微分形式来定义. 微分形式 ω 为 m 阶连续可微当且仅当它在 $\mathscr{U}$ 上所定义的那个函数为 m 阶连续可微. 现在设 $\overset{p}{\omega}$ 是积流形 $W \times V$ 上的一个次数为 p 的连续微分形式. 我们知道 $W \times V$ 在其上的一点 (a, b) 处的切向量空间典则同构于 W 在点 a 处的切向量空间与 V 在点 b 处的切向量空间的直和. 因此如果 X 为 W 在点 a 处的 r-切向量, 则对任意的 $b \in V$, 它典则定义了一个 $W \times V$ 在 (a, b) 处的 r-切向量. 同样地, 若 Y 为 V 在点 b 处的 $(p-r)$-切向量, 则对任意的 $a \in W$, 它典则定义了一个 $W \times V$ 在点 (a, b) 处的 $(p-r)$-切向量. 利用一个不太恰当但不会令人不舒服的记号, 我们因此可以将 $X \times Y$ 说成是 $W \times V$ 在点 (a, b) 处的一个 p-切向量. 形式 $\overset{p}{\omega}$ 因而在积空间 $\mathscr{W} \times \mathscr{V}$ 上定义了一个函数 $(X, Y) \to \langle X \wedge Y, \omega(a, b)\rangle$, 其中 $\mathscr{W}$ 是由 W 上的 r-切向量所构成的纤维空间 $\mathscr{W}$, 而 $\mathscr{V}$ 是由 V 上的 $(p-r)$-切向量所构成的纤维空间. 当 X 属于 W 在 a 处的多重切向量空间而 Y 属于 V 在点 b 处的多重切向量空间时, 上述函数为双线性映射; 另外, 如果 ω 为 k 阶连续可微, 则该函数在 $\mathscr{W} \times \mathscr{V}$ 上为 k 阶连续可微.

固定多重向量 Y. 前面的函数因此在 $\mathscr{W}$ 上定义了一个连续函数, 该函数在由 W 在一点 $a \in W$ 处的多重切向量所组成的向量子空间上的限制是一个线性映射, 也就说是 W 上的连续微分形式, 我们将之记作 ω_y. 它可被定义如下:

$$\langle X, \omega_y(a)\rangle = \langle X \times Y, \omega(a, b)\rangle . \tag{9.5.20}$$

若 ω 为 k 次连续可微或连续且有紧支集, 则 ω_y 亦如此. 在最后那个假设条件下, 我们可以在定向流形 W 上对 ω_y 进行积分, 并令

$$J(Y) = \int_W \omega_y .$$

由此定义的函数 $J : Y \to J(Y)$ 为 $\mathscr{V}$ 上的函数. 它显然在由 V 在一点 $b \in V$ 处的多重切向量所组成的向量子空间上为线性. 现在来证明 J 在 $\mathscr{V}$ 上为连续. 由于 ω 为连续,

则 ω 在 X 固定时关于 Y 连续并且当 X 属于 $\mathscr{W}$ 的一个紧集时一致连续. 这意味着, 若 Y 在 $\mathscr{V}$ 上趋于 Y_0, 则 ω_y 在 W 的任意紧子集上一致趋于 ω_{y_0}, 从而在 $\overset{0}{\mathscr{D}}_K$ 中亦如此, 其中 K 为 ω 的紧支集在 W 上的投影; 故 $\int_W \omega_y$ 趋于 $\int_W \omega_{y_0}$, 这证明了 J 的连续性. 故 J 是 V 上的次数为 $p-r$ 的连续微分形式. 我们也将 J 记作 $\int_W \omega$.

现在来给出我们刚才所定义的运算的某些性质.

1° 若 $\omega = \alpha \wedge \beta$, 其中 α 为 W 上的形式, 而 β 为 V 上的形式①, 则我们有:

$$\int_W \alpha \wedge \beta = \left(\int_W \alpha\right)\beta . \tag{9.5.21}$$

事实上:

$$\langle \alpha \wedge \beta, X \wedge Y\rangle = \big\langle \alpha(a), X\big\rangle\big\langle \beta(b), Y\big\rangle , \tag{9.5.22}$$

于是我们有

$$\omega_Y(X) = \big\langle \alpha(a), X\big\rangle\big\langle \beta(b), Y\big\rangle , \quad \omega_Y = \big\langle \beta(b), Y\big\rangle\, \alpha , \tag{9.5.23}$$

而这就给出:

$$J(Y) = \int_W \omega_Y = \langle \beta(b), Y\rangle \int_W \alpha \text{, 也即 } \int_W \omega = \left(\int_W \alpha\right)\beta . \tag{9.5.24}$$

2° 若 W 和 V 分别为 $\mathbb{R}^r$ 和 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 (其中 $\mathbb{R}^r$ 被赋予了它的典则定向), 则 ω 可被表示成:

$$\omega = \sum_{I,J} \omega_{I,J}(w,v)\, dw_I \wedge dv_J , \tag{9.5.25}$$

其中 I 和 J 分别为集合 $\{1,2,\ldots,r\}$ 和 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的子集.

易见:

$$\int_W \omega = \sum_{I,\,J} \left(\int_W \omega_{I,\,J}(w,v)\, dw_I\right) dv_J. \tag{9.5.26}$$

3° 若现在 W 和 V 为任意流形, 则借助单位分解总可将 ω 分解成有限求和 $\sum \omega_\nu$, 其中每个 ω_ν 的支集包含在两个开集的乘积中, 而这两个开集分别与 $\mathbb{R}^r$ 和 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集微分同胚. 运算 $\int_W$ 的线性性使得我们可以将计算 $\int_W \omega$ 归结为公式 (9.5.26).

4° 设 ω 为 k 阶连续可微, 则 $\int_W \omega$ 亦如此. 正如在 3° 中所说的, 我们可以通过将问题归结为 $\mathbb{R}^r$ 和 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集来得到所要的结论.

① 如同记号 $X \wedge Y$ 一样, 记号 $\alpha \wedge \beta$ 也不太恰当. 若 L 和 M 分别是从 $W \times V$ 到 W 和 V 的自然投影, 则我们应将之记作 $(L^*\alpha) \wedge (M^*\beta)$.

5° 设 β 为 V 上的连续微分形式. 若将之与它在 $W\times V$ 上所定义的那个微分形式视为同一 (后者正是它在从 $W\times V$ 到 V 的自然投影 H 下的逆像), 则我们有:

$$\int_W(\omega\wedge\beta)=\left(\int_W\alpha\right)\wedge\beta \quad \text{也即} \quad \int_W(\omega\wedge(H^*\beta))=\left(\int_W\alpha\right)\wedge\beta. \tag{9.5.27}$$

利用那个将 4° 归结为 2° 的同样方法可得所要结论.

6° 设 V 也为定向流形且在 $W\times V$ 上赋予积流形的典则定向. 则 ω 在 $W\times V$ 上的积分可通过两个逐次积分进行, 而这也可通过归结为 2° 并由基本 Fubini 定理而得:

$$\int_{W\times V}\omega=\int_V\left(\int_W\omega\right)^{①}. \tag{9.5.28}$$

7° 若 ω 的次数为 r, 则 $\int_W\omega$ 是一个次数为 0 的形式, 也就是说是一个函数. 它在 V 中一点 b 处的值正是由 ω 在 $W\times\{b\}$ 上所诱导的形式的积分.

8° 我们拟计算 $\int_W d\omega$. 通过局部化并利用 (9.5.25) 的记号, 我们有

$$d\omega=d_W\omega+(-1)^{\mathrm{Card}I}\,d_V\omega.$$

但 W 上的积分时仅会涉及分量 $\omega_{I,J}\,dw_I\wedge dv_J$, 其中 $\mathrm{Card}I=r$. 另外, 若 W 为无边流形, 则由 Stokes 公式可知

$$\int_W d_W\omega=0,$$

而 d_V 与 $\int_W$ 可交换; 因此:

$$\int_W d\omega=(-1)^r d\int_W\omega. \tag{9.5.29}$$

当 W 有边界 bW 时, 该公式不再成立; 尽管如此, 只有我们能像前面那样应用 Stokes 公式, 也就是说若 ω 在 $(bW)\times V$ 上为零, 则该公式依然成立. 事实上, 正如我们将在 (9.5.31) 中所看到的, 只需在流的意义下讨论就可以保证上述公式总成立.

① 当然, 若是 V 为定向流形, 我们也可以定义具有类似性质的运算 $\int_V$. 令:

$$\omega_X(Y)=\langle X\wedge Y,\omega(a,b)\rangle \quad K(X)=\int_V\omega_X,$$

由此可得 $\int_V\omega$. 我们将有:

$$\int_V(\alpha\wedge\beta)=\left(\int_V\beta\right)\alpha, \quad \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{I,J}\omega_{I,J}\,dw_I\wedge dv_J=\sum_{I,J}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\omega_{I,J}\,dv_J\right)dw_I,$$

而当 W 也为定向时, 我们有

$$\int_{W\times V}\omega=\int_W\left(\int_V\omega\right).$$

在上述两种情形, 我们均研究了积流形 $W\times V$, 其中我们将 W 放在了 V 的前面. 若施行典则对称变换 $W\times V\to V\times W$, 则定向会发生改变, 因而 ω 在该积流形上的积分会改变; 进而 W 和 V 上的偏积分的定义也会因此发生改变.

现在设 $\underline{\omega}$ 为 $W\times V$ 上的奇形式. 由于 W 为定向流形, 因此它在 V 的局部定向与 $W\times V$ 的局部定向之间定义了一个双射, 从而在 $\widetilde{W\times V}$ 和 $W\times\widetilde{V}$ 之间定义了一个同构. 于是 $\underline{\omega}$ 在 $W\times\widetilde{V}$ 上定义了一个关于 $\widetilde{V}$ 的对称变换 σ 反变的寻常形式 $\tilde{\omega}$. (该形式因此依赖 W 的定向, 且随之而改变符号). 故 $\int_W\tilde{\omega}$ 为 $\widetilde{V}$ 上的 σ–反变寻常形式, 也即 V 上的奇形式, 我们将之记作 $\int_W\underline{\omega}$. 但若改变 W 的定向, 则 $\tilde{\omega}$ 改变符号, 从而它在 W 上的积分也改变符号, 故 $\int_W\underline{\omega}$ 不变. 这个作用在奇形式上的运算与作用在偶形式上的那个同样的运算具有类似的性质; 在 (9.5.21) 中, 我们可取 $\underline{\beta}$ 为奇形式, 在 (9.5.25) 中, 那些 $\underline{dv_J}$ 为奇形式, 在 (9.5.27) 中 $\underline{\beta}$ 为奇形式, 在 (9.5.28) 中 V 和 W 没有定向而 $\underline{\omega}$ 为奇形式.

我们将考虑从 $W\times V$ 到 V 的自然投影映射 H, 以及从 $\widetilde{W\times V}=W\times\widetilde{V}$ 到 $\widetilde{V}$ 的自然投影映射 $\widetilde{H}$, 由此给出一个从 $W\times V$ 到 V 的定向映射, 依旧记作 $\widetilde{H}$. 我们因此可以讨论 $W\times V$ 上的偶形式或奇形式在 V 上的投影. 现在我们来证明

$$\int_W \omega=\widetilde{H}\omega\,,\quad \int_W \underline{\omega}=H\underline{\omega}\,.$$

只需证明一个, 例如第一个; 对任意 $\varphi\in\mathscr{D}$, 由 (9.5.1), (9.5.27) 和 (9.5.28) 可得:

$$\begin{aligned}(9.5.30)\qquad \widetilde{H}\omega.\,\underline{\varphi}=\omega.\,(\widetilde{H}^*\,\underline{\varphi})&=\int_{W\times V}\omega\wedge(\widetilde{H}^*\,\underline{\varphi})\\&=\int_V\left(\int_W\omega\wedge\widetilde{H}^*\,\underline{\varphi}\right)=\int_V\left[\left(\int_W\omega\right)\wedge\underline{\varphi}\right]=\left(\int_W\omega\right).\,\underline{\varphi}\,.\end{aligned}$$

于是正如我们想要证明的, 我们有 $\widetilde{H}\omega=\int_W\omega$.

我们已经看到 $\int_W\omega$ 依赖 W 的定向 (以及 W 在 U 的乘积表达式 $W\times V$ 中被放在 V 的前面这一事实). 我们在 $\widetilde{H}\omega$ 上可以再次看到这点, 这是因为由 H 出发所定义的 $\widetilde{H}$ 也依赖同样的东西. 但我们已经知道, 若 $\underline{\omega}$ 为奇形式, 则 $\int_W\underline{\omega}$ 不再依赖 W 的定向; 它的由 $H\underline{\omega}$ 给出的表达式正好说明了这点. 由此可以导出, 即使 W 不可定向, 我们也可以在 $U=W\times V$ 上局部地定义奇形式 $\underline{\omega}$ 的积分 $\int_W\underline{\omega}=H\underline{\omega}$. 从今以后, 我们将仅考虑 $\int_W\underline{\omega}$ 和 $H\underline{\omega}$.

现在设 U^{r+n} 为 V^n 上的 $\mathscr{C}^\infty$ 类纤维空间 $(r\geqslant 0)$. 我们将假设 V 为无边或者所有的纤维为无边 (从而使得 U 的确是一个或许还会带边的流形).

设 V_i 为 V 的任意开子集使得 U 在其上同构于某个积空间 $W\times V_i$. 借助坐标卡, 我们可以定义奇形式 $\underline{\omega}$ 在纤维上的积分, 而所得的结果不依赖坐标卡, 这正是 $\underline{\omega}$ 在 H 下的直接像; 利用单位分解, 我们可过渡到整个 U 上: 若 $\overset{0}{\underline{\omega}}$ 是一个具有紧支集、次数为 p 的连续奇形式, 则它在纤维上的积分是 V 上的一个次数为 $p-r$ 的连续奇形式; 若 $\underline{\omega}$ 为 $\mathscr{C}^k$ 类, 则该积分也为 $\mathscr{C}^k$ 类; 并且该积分正好是 $H\underline{\omega}$, 其中 H 为从 U 到 V 的自然投影. 若 $\underline{T}$ 为 U 上具有紧支集的 p 次奇流, 则其投影 $H\underline{T}$ 是一个次数为 $p-r$ 的奇流, 该奇流也可被称为 $\underline{T}$ 在纤维上的积分 (这是第 241 页例 2 的推广).

应用定理 3 所需的条件均满足, 因此 V 上的任意偶流 $\overset{p}{T}$ 均有逆像 $H^*\overset{p}{T}$; 后者是 U 上一个具有相同次数 p 的流, 且当 T 的阶不大于 k 时, 该流的阶也不大于 k.

这个纤维上的积分在向量丛纤维空间理论中起着一个非常重要的作用. 设 E 是一个无边流形上具有有限维数 r 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类向量丛纤维空间. 假设在纤维 E_x 上已选取随 $x \in V$ 而变的欧氏结构, 且该欧氏结构关于 x 为 $\mathscr{C}^\infty$ 类. 设 U 是由纤维 E_x 中的单位球 B_x 所组成的纤维空间. 则 U 为 V 的球纤维空间. 假设 $\underline{\omega}$ 是 U 上的一个次数为 p 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类奇形式且在 U 的边界上为零 (该边界为 V 上的球面纤维空间). 我们因此可以应用公式 (9.5.29). 则 $\int_{\text{纤维}} \underline{\omega}$ 是 V 上的一个次数为 $p-r$ 的奇形式, 并且当 $\underline{\omega}$ 为闭形式时也为闭形式. 由此我们可以导出一个从 U 的模掉了其边界的 p 次挠实上同调向量空间到 V 的 $p-r$ 次挠实上同调向量空间的线性映射, 该映射被称为 Thom-Gysin 同态.

由于所有的结论在 U 上都是局部的, 我们因此甚至完全不需要假设 U 为 V 上的纤维空间: 设 H 是一个从流形 U^{n+r} 到流形 V^n 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类映射使得 U 为 V 上的局部纤维流形, 也就是说在 U 的任意点处均有某个邻域 U_i 与 $W_i \times V_i$ 微分同胚 (其中 W_i 为 $\mathscr{C}^\infty$ 类流形, V_i 为 V 的开子集而 W_i 或 V_i 为无边), 并且该微分同胚将 H 变成从 $W_i \times V_i$ 到 V_i 的自然投影. 此时所有上述结论均成立. *而这至少在 U^{n+r} 和 V^n 为无边流形的情形只是意味着 $H: U^{n+r} \to V^n$ 的秩等于常数 n.*

虽然 H 并不在整体上使得 U 为 V 上的纤维空间, 但我们依然约定将点 $y \in V$ 在 H 下的逆像 $H^{-1}(\{y\})$ 称为纤维; 这是一些流形, 且当 U 和 V 无边时也无边.

可将 (9.5.21)-(9.5.28) 合起来而得到下述结论, 它们就是我们曾见过的 (9.4.12).

在一个从 U^m 到 V^n、秩为 n 的映射下的流的逆像

定理 4. *设 U^m, V^n 为 $\mathscr{C}^\infty$ 类流形, 而 H 是一个从 U 到 V 的 $\mathscr{C}^\infty$ 映射使得 U 为 V 上的局部纤维流形 (比如说, 当 U, V 为无边流形时 H 在每点的秩均为 n).*

对于 U 上具有紧支集的任意 p 次奇流 $\underline{T}$, 其直接像 $H\underline{T}$ 是 V 上的一个次数为 $p-r$ 的奇流 ($r = m-n$), 也称为 $\underline{T}$ 在纤维上的积分, 记作 $\int_{\text{纤维}} \underline{T}$. 若我们约定将 V 上的偶形式 ω 的逆像 $H^*\omega$ 记作 $\omega_{H(x)}$, 则我们有下列公式:

$$
(9.5.31) \qquad \begin{cases}
\int_{\text{纤维}} \left(\underline{T} \wedge \alpha_{H(x)}\right) = \left(\int_{\text{纤维}} \underline{T}\right) \wedge \alpha, \text{ 其中 } \alpha \text{ 为 } V \text{ 上的 } \mathscr{C}^\infty \text{ 类形式}, \\
\int_{\text{纤维}} \left(\overset{q}{\alpha}_{H(x)} \wedge \underline{T}\right) = (-1)^{rq} \alpha \wedge \left(\int_{\text{纤维}} \underline{T}\right), \\
b \int_{\text{纤维}} \underline{T} = \int_{\text{纤维}} b\underline{T}, \\
d \int_{\text{纤维}} \overset{p}{\underline{T}} = (-1)^r \int_{\text{纤维}} \underline{T}, \\
\int_V \int_{\text{纤维}} \underline{T} = \int_U \underline{T}.
\end{cases}
$$

若 $\underline{T}$ 的阶不大于 k, 则 $\int_{\text{纤维}} \underline{T}$ 亦如此.

若 $\underline{T}$ 为 (通常意义下的) $\mathscr{C}^k$ 类 p 次奇形式, 则 $\int_{\text{纤维}} \underline{T}$ 为 $\mathscr{C}^k$ 类 $p-r$ 次奇形式.

对于 V 上的偶流 T, 均存在逆像 $(H^*T)_x = T_{H(x)}$. 若 T 为 p 次偶流, 则 $T_{H(x)}$ 亦如此; 若 T 的阶不大于 k 或 T 为 $\mathscr{C}^k$ 类形式, 则 $T_{H(x)}$ 亦如此. 我们有下述公式:

$$
(9.5.32)\qquad \begin{cases} (T\wedge\alpha)_{H(x)} = T_{H(x)}\wedge\alpha_{H(x)}\,, \text{ 其中 } \alpha \text{为 } V \text{ 上的 } \mathscr{C}^\infty \text{ 类形式}, \\ (\alpha\wedge T)_{H(x)} = \alpha_{H(x)}\wedge T_{H(x)}\,, \\ (dT)_{H(x)} = d(T_{H(x)})\,, \text{ 若 } U \text{ 为无边流形 ①}. \end{cases}
$$

前面给出的 H 为局部微分同胚的例子是这里与 $m=n$, $r=0$ 对应的特殊情形. 定理 3 或许也可以在比定理 4 稍微更一般的条件下使用, 但不会广的太多.

应用与例子

例 1. 李群 G 上次数为 0 的偶流 T 的逆像 $T_{\xi^{-1}x}$ 的定义 设 G 为李群. 我们将从 $G\times G$ 到 G 的映射 $(x,\xi)\to\xi^{-1}x$ 取为映射 H; 设 $\overset{0}{T}\in\overset{0}{\mathscr{D}}{}'(G)$. 我们首先考虑由下式定义的从 $G_x\times G_\xi$ 到 $G_w\times G_v$ 的同构 J:

$$
(9.5.33)\qquad w=x,\ v=\xi^{-1}x;\quad x=w\,,\ \xi=wv^{-1}\,.
$$

则 H 正好是 J 与从 $G_w\times G_v$ 到 G_v 的投影 $(w,v)\to v$ 的复合. 关于这两个映射当中的每个均存在逆像, 故关于 H 也存在逆像. 设 $\overset{2n}{\varphi}$ 是 $G_x\times G_\xi$ 上的一个具有紧支集、次数为 $2n$ 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类奇形式, 它因此可写成 $\psi(x,\xi)\,\underline{dx}\,\underline{d\xi}$, 其中 $\underline{dx}$ 表示 G 上的一个特殊的 (左不变) Haar 测度. 我们拟寻求它的直接像 $H\overset{2n}{\underline{\varphi}}$. 设 $\overset{0}{\theta}\in\mathscr{D}_v$. 我们有:

$$
\begin{aligned}
(9.5.34)\qquad (H\underline{\varphi}).\,\theta = \varphi.\,(H^*\theta) &= \int_{G\times G}\theta(\xi^{-1}x)\,\psi(x,\xi)\,\underline{dx\,d\xi} \\
&= \int_G \underline{dw}\int_G \theta(\xi^{-1}w)\,\psi(w,\xi)\,\underline{d\xi} \\
&= \int_G \underline{dw}\int \theta(\eta^{-1})\,\psi(w,w\eta)\,\underline{d\eta}\ ② \\
&= \int_G \underline{dw}\int_G \theta(v)\,\psi(w,wv^{-1})\big(\Delta(v)\big)^{-1}\,\underline{dv}\ ③ \\
&= \int_G \theta(v)\big(\Delta(v)\big)^{-1}\,\underline{dv}\int_G \psi(w,wv^{-1})\,\underline{dw}\ ④\,,
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
(9.5.35)\qquad H\big(\psi(x,\xi)\,\underline{dx\,d\xi}\big) = \left[\big(\Delta(v)\big)^{-1}\int_G \psi(w,wv^{-1})\,\underline{dw}\right]\underline{dv}\,.
$$

① 第 278 页脚注 ① 给出了 U 为带边流形时的一个反例. 若 U 为无边流形, 由于它为 V 上的局部纤维空间, 则 $H(U)$ 与 V 的边界不相交.

② 对于固定的 w, 令 $\xi^{-1}w=\eta^{-1}$, 也即 $\xi=w\eta$. 由于 $d\xi$ 为左不变 Haar 测度, 则 $\underline{d\xi}=\underline{d\eta}$.

③ 令 $\eta=v^{-1}$. 这里 $\Delta(v)$ 为 G 的模 (参见 A. WEIL [1], p. 40).

④ 由于 $(\Delta(v))^{-1}\theta(v)\psi(w,wv^{-1})$ 为连续且具有紧支集, 因此我们可以交换积分次序.

大家可以很轻易地验证 (在积分号 $\int$ 下求导) 上式右边为 G_v 上的无穷可微形式. 从而逆像 $H^* \overset{0}{T}$ 可由下式定义:

$$\overset{0}{T}_{\xi^{-1}x} \cdot \psi(x,\xi)\,\underline{dx\,d\xi} = \overset{0}{T}_v \cdot \left[(\Delta(v))^{-1} \int_G \psi(w, wv^{-1})\,\underline{dw} \right] \underline{dv}\,. \tag{9.5.36}$$

特别地, 我们将一劳永逸地假设在 G 上固定了一个左不变 Haar 测度 $\underline{dx}$. 记 $\overset{0}{\delta}$ 为通过 Haar 测度与原点处的 Dirac 广义函数 $\overset{n}{\delta}$ 相伴的 0 次偶流: $\overset{n}{\underline{\delta}} = \overset{0}{\delta}\,\underline{dx}$. 换句话说, 我们有 $\overset{0}{\delta} . \psi(x)\,\underline{dx} = \psi(0)$. 它的逆像因此可由下式定义:

$$\overset{0}{\delta}_{\xi^{-1}x} \cdot \psi(x,\xi)\,\underline{dx\,d\xi} = \int_G \psi(w,w)\,dw\,. \tag{9.5.37}$$

若 G 被一劳永逸地赋予了一个左不变的 Haar 测度以及一个左不变的定向, 此时我们可以谈论 G 上的广义函数而不会产生任何含糊. 对于 G 上的广义函数 T, 我们将与次数为 0 的偶流 $\overset{0}{T}_{\xi^{-1}x}$ 相伴的广义函数泛泛地记作 $T_{\xi^{-1}x}$, 前者是从次数为 0 的偶流 $\overset{0}{T}$ 出发而得到. 更为特殊地, 若 V 是一个被赋予了 Lebesgue 测度和定向的向量空间, 而 T 为 V 上的广义函数, 则我们将广义函数 $T_{\xi^{-1}x}$ 定义为:

$$T_{x-\xi} \cdot \psi(x,\xi) = T_v \cdot \int_V \psi(w, w-v)\,dw\,. \tag{9.5.38}$$

特别地, 我们有:

$$\delta_{x-\xi} \cdot \psi(x,\xi) = \int_V \psi(w,w)\,dw\,^{①}\,. \tag{9.5.39}$$

流 $T_{\xi^{-1}x}$ 在李群上的流的卷积理论中起着非常重要的作用; 参见 Norguet [1], Guillemot-Teissier Marianne [1], Braconnier [1].

例 2. 与有限维向量空间上的二次型相联的流 设 V 为 $\mathbb{R}$ 上的有限 m 维向量空间, 而 Q 为 V 上的二次型. 则 Q 是一个从 V 到 $\mathbb{R}$ 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类映射; 这里 $r = m-1$. 对于 V 上具有紧支集的任意 p 次奇流 $\overset{p}{\underline{T}}$, 存在直接像 $Q\underline{T}$, 该直接像是 $\mathbb{R}$ 上的一个次数为 $p-m+1$ 的奇流; 而 $p = m-1$ 和 $p = m$ 事实上是唯一的非平凡的情形. 若 Q 为正定, 则 V 关于 Q 为欧氏空间而 $Q: V \to \mathbb{R}$ 为逆紧映射; 因此我们甚至可以假设 $\underline{T}$ 的支集为任意的集合, 并且我们有, 比如说:

$$\begin{cases} Q\overset{m}{\underline{\delta}} = \overset{1}{\underline{\delta}}\,, \\ Q\,\overset{m}{\overbrace{\underline{dx}}} = \frac{S_m}{2}\, t^{\frac{m-2}{2}}\, \overset{1}{\overbrace{\underline{dt}}}\,, \end{cases} \tag{9.5.40}$$

其中 S_m 为 V 中的单位球面的面积, 也即 $(2\pi^{\frac{m}{2}})/\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)$.

① 大家可以在 Schwartz [11] 第 105 页的公式 (1,4;21) 中找到这些公式的一个证明.

事实上, 若 $\varphi \in \overset{0}{\mathscr{D}}(\mathbb{R})$, 且若我们也将函数 $\sqrt{Q}$ 记作 s, 则我们有:

$$(9.5.41)\qquad \begin{aligned}\langle Q(\underline{dx}),\varphi\rangle &= \langle \underline{dx},\varphi\circ Q\rangle \\ &= \int_V \varphi(s^2)\,\underline{dx} = \int_0^{+\infty}\varphi(s^2)S_m s^{m-1}\,ds \\ &= \int_0^{+\infty}\varphi(t)S_m t^{\frac{m-1}{2}}\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \left\langle \frac{S_m}{2}t^{\frac{m-2}{2}},\varphi\right\rangle .\end{aligned}$$

这些公式在 SCHWARTZ [13] 的报告 7, 8, 9 中被系统用于研究在 V 上关于 Q 的正交算子下不变的广义函数. 若将这些广义函数构成的空间记作 $\mathscr{D}'(V;Q)$, 则该空间可与 $\overset{m}{\underline{\mathscr{D}'}}(V;Q)$ 视为等同, 若将 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ 与 $\overset{1}{\underline{\mathscr{D}'}}(\mathbb{R}_+)$ 看成相等, 则可以证明 $Q:\underline{T}\to Q\underline{T}$ 是一个从 $\mathscr{D}'(V;Q)$ 到 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ 的同构.

现在回到 Q 具有任意的符号差但它非退化这个一般的情形. 映射 $Q:V\to\mathbb{R}$ 在不同于原点 O 的任意点处的秩为 1, 而在原点的秩为 0. 因此我们可以应用定理 4; 若 T 为 $\mathbb{R}$ 上的偶流, 则 $T_{Q(x)}$ 为 $V\setminus\{O\}$ 上次数相同的偶流, 它显然在 V 关于 Q 的正交群下不变. 流 T_Q 的性质在 DE RHAM [4], METHÉE [1], BRAGA Carmen Lys [1] 中曾得到过研究. 可以证明, 如果将 $\mathbb{R}$ 和 $V\setminus\{O\}$ 上的广义函数与次数为 0 的偶流视为同一, 则当 Q 既不为正定也不为负定时, 运算 $Q^*:T\to T_Q$ 是一个从 $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 到 $\mathscr{D}'(V\setminus\{O\})$ 的同构①.

可注意到, 若 Q 为正定或负定, 我们可通过 0 维奇流的直接像来研究 $\mathscr{D}'(V;Q)$; 若 Q 既不为正定也不为负定, 则我们仅能研究 $\mathscr{D}'(V\setminus\{O\};Q)$, 而这次我们可借助次数为 0 的偶流的逆像.

现在我们来应用比如说公式 (9.5.3). 设 $V=\mathbb{R}^n$ 而

$$Q(x_1,\dots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n_1}^2-x_n^2 .$$

设 T 是 $\mathbb{R}$ 上的一个次数为 0 的偶流, 而 T',T'' 为它的前两阶导数. 则

$$(9.5.42)\qquad \frac{\partial}{\partial x_i}T_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n_1}^2-x_n^2}=\pm 2x_i T'_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n_1}^2-x_n^2},$$

其中当 $1\leqslant i\leqslant n-1$ 时 $\pm$ 意味着 $+$, 而当 $i=n$ 时为 $-$. 从而

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}T_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n_1}^2-x_n^2}=4x_i^2T''_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n_1}^2-x_n^2}\pm 2T'_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n_1}^2-x_n^2}.$$

令

$$\widetilde{\square}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\ (\text{d'Alembert 算子}).$$

① 若 Q 为正定或负定, 则这是一个从 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+\setminus\{O\})$ 到 $\mathscr{D}'(V\setminus\{O\};Q)$ 的同构.

则我们有

$$(9.5.43)\quad \widetilde{\Box}T_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n_1}^2-x_n^2} = 4(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n_1}^2-x_n^2)\,T''_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n_1}^2-x_n^2} + 2nT'_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n_1}^2-x_n^2} = S_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n_1}^2-x_n^2}\,,$$

这里 S 就是 $\mathbb{R}$ 上的次数为 0 的偶流 $4T''_t+2nT'_t$. 则 $T_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n_1}^2-x_n^2}$ 在 d'Alembert 算子作用下为零当且仅当 T 在 $\mathbb{R}$ 上满足微分方程

$$4tT''+2nT'=0\,.$$

例 3. 设 H 是一个从 U^m 到 $\mathbb{R}$ 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类映射; 假设在 U 的任意点处 $H'\neq 0$. 则 H 的秩为 1, 从而当 U 为无边时我们可以应用定理 4.

设 $a\in\mathbb{R}$, 则 $H^{-1}(\{a\})$ 为 U 中的超曲面 Σ_a. 它可被典则地赋予一个穿越方向, 即 H 递增的方向 (横截 Σ_a 的曲线在 Σ_a 的一点处的正向为 H 递增的方向). 它因此定义了一个 $n-1$ 维的挠链, 即次数为 1 的偶流, 我们依旧记之为 Σ_a (第 242 页例 7). 在定义这个挠链时, 我们利用了从 Σ_a 到 U 的定向嵌入映射; 为了定义上述定向嵌入映射, 提醒大家在 Σ_a 一点处, 正的横截定向 (即 H 的递增方向) 再加上 Σ_a 的定向, 给出了 U 的相应定向, 这就等于定义了上述定向嵌入映射; 又 H 局部地定义了 U 的纤维化, 也就是说将 U 表示成 $\mathbb{R}$ 与 Σ_a 之积; 在乘积中我们将 $\mathbb{R}$ 放在第一个: $\mathbb{R}\times\Sigma_a$. 若 $\overset{n-1}{\underline{\omega}}$ 是 U 上的一个连续的 $n-1$ 次奇形式, 则它在 Σ_a 上诱导了一个 $n-1$ 次奇形式, 并且 $\langle\Sigma_a,\underline{\omega}\rangle$ 就是该形式在 Σ_a 上的积分.

另外, 直接像 $H\underline{\omega}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个次数为 0 的奇形式, 它是 $\underline{\omega}$ 在纤维上的积分

$$\int_{\text{纤维}}\underline{\omega}\,.$$

该积分可沿用第 283 页以及随后几页中所指出的方法来计算. 但在那里, 我们应该在由 H 给出的 U 的局部纤维化也即在 U 的局部乘积表达式中, 将之写成 $\Sigma_a\times\mathbb{R}$ 而不是 $\mathbb{R}\times\Sigma_a$ (第 285 页脚注 ①). 因此

$$\int_{\text{纤维}}\overset{n-1}{\underline{\omega}}=H\overset{n-1}{\underline{\omega}}$$

就是 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$x\to(-1)^{n-1}\int_{\Sigma_x}\overset{n-1}{\underline{\omega}}=(-1)^{n-1}\langle\Sigma_x,\underline{\omega}\rangle=\langle\underline{\omega},\Sigma_x\rangle\,.$$

于是 $\mathbb{R}$ 上次数为 1 的偶流 $\overset{1}{T}$ 的逆像 $H^*\overset{1}{T}$ 就是由下式给出的次数为 1 的偶流:

$$(9.5.44)\qquad \left\langle\overset{n-1}{\underline{\varphi}},H^*\overset{1}{T}\right\rangle=\langle H\underline{\varphi},T\rangle=\left\langle\left\langle\overset{n-1}{\underline{\varphi}},\Sigma_x\right\rangle,T_x\right\rangle=(-1)^{n-1}\left\langle\int_{\Sigma_x}\overset{n-1}{\underline{\varphi}},T_x\right\rangle,$$

由此我们可以导出:

$$\langle H^* \overset{1}{T}, \overset{n-1}{\underline{\varphi}} \rangle = \left\langle T_x, \int_{\Sigma_x} \overset{n-1}{\underline{\varphi}} \right\rangle . \tag{9.5.45}$$

特别地, 我们有:

$$\langle H^* \overset{1}{\delta}_{(a)}, \overset{n-1}{\underline{\varphi}} \rangle = \int_{\Sigma_a} \overset{n-1}{\underline{\varphi}}, \tag{9.5.46}$$

也即

$$H^* \overset{1}{\delta}_{(a)} = \Sigma_a , \tag{9.5.47}$$

其中我们用 $\overset{1}{\delta}_{(a)}$ 来表示依 $\mathbb{R}$ 的定向与 $\overset{1}{\underline{\delta}}_{(a)}$ 相伴的次数为 1 的偶流.

设 Y 为 $\mathbb{R}$ 上的 Heaviside 函数; 则 $dY = \delta$ (偶流). 由 H^* 与 d 的交换性给出:

$$d(Y \circ H) = \Sigma_0 , \tag{9.5.48}$$

而这正是 Stokes 公式, 也即 (9.3.21).

§6. 有限维向量空间上的缓增流的 Fourier 变换①

设 V^n 为 $\mathbb{R}$ 上的有限 n 维向量空间. 对任意 p, 我们平凡地定义由其本身及其各阶导数均为速降的 $\mathscr{C}^\infty$ 类 p–形式所组成的空间 $\overset{p}{\mathscr{S}}(V) = \overset{p}{\mathscr{S}}$, 以及 p 次挠形式的类似空间 $\overset{p}{\underline{\mathscr{S}}}(V) = \overset{p}{\underline{\mathscr{S}}}$. 空间 $\overset{n-p}{\underline{\mathscr{S}}}$ 的对偶为缓增 p 次偶流的空间 $\overset{p}{\mathscr{S}}{}'$, 而 $\overset{n-p}{\mathscr{S}}$ 的对偶为缓增 p 次挠流的空间 $\overset{p}{\underline{\mathscr{S}}}{}'$. 一个流为缓增当且仅当在选定 V 的基底后, 它由 (9.3.2) 所给出的表达式中的系数为缓增广义函数.

任意 $\overset{n}{\underline{\varphi}} \in \overset{p}{\underline{\mathscr{S}}}(V)$ 的 Fourier 变换 $\mathscr{F}\overset{n}{\underline{\varphi}}$ 是一个由下式定义的函数 $\psi \in \overset{0}{\mathscr{S}}(V')$:

$$\psi(y) = \int_V \exp(-2i\pi x.y)\overset{n}{\underline{\varphi}}, \tag{9.6.1}$$

其中 V' 为 V 的对偶, $x.y$ 为 $x \in V$ 和 $y \in V'$ 的点积. 因此 $\mathscr{F}$ 将 $\overset{p}{\underline{\mathscr{S}}}(V)$ 映到 $\overset{0}{\mathscr{S}}(V')$, 同样也将 $\overset{p}{\underline{\mathscr{S}}}(V')$ 映到 $\overset{0}{\mathscr{S}}(V)$.

另外, 通过选定 V 的基底可知 $\mathscr{F}$ 是一个同构; 并且 $\overline{\mathscr{F}}$ 也有同样的性质.

由转置, 我们有

$$\langle \mathscr{F}\overset{n}{\underline{T}}, \overset{n}{\underline{\varphi}} \rangle = \langle \overset{n}{\underline{T}}, \mathscr{F}\overset{n}{\underline{\varphi}} \rangle , \tag{9.6.2}$$

则 $\mathscr{F}$ 为从 V 上缓增 n 次奇流的空间 $\overset{n}{\underline{\mathscr{S}}}{}'(V)$ 到 V' 上缓增 0 次偶流的空间 $\overset{0}{\mathscr{S}}{}'(V)$ 的同构; 交换 V 和 V' 的作用也成立, 对 $\overline{\mathscr{F}}$ 也有同样的结论. 借助与 $\mathbb{C}$ 上的有限维向量空间 E 的张量积, 变换 $\mathscr{F}$ 和 $\overline{\mathscr{F}}$ 成为从 $\overset{n}{\underline{\mathscr{S}}}{}'(V) \otimes E$ 到 $\overset{0}{\mathscr{S}}{}'(V) \otimes E$ 的同构.

① 该研究要归功于 SCARFIELLO [1].

我们现在定义任意型的缓增流的 Fourier 变换. 设 $\overset{k}{\omega}_V$ 为从 V 到 $\overset{k}{\wedge}(V)$ 的"恒等" k-形式, 它将 V 中的每个 k-向量与这个 k-向量自己相对应. 于是若 $\overset{p}{\underline{T}}\in\overset{p}{\mathscr{L}}'(V)$, 则 $\overset{p}{\underline{T}}\wedge\overset{n-p}{\omega_V}$ 为取值 $\overset{n-p}{\wedge}(V)$ 中的 n 次奇流, 也就是说为 $\overset{n}{\mathscr{L}}'(V)\otimes\overset{n-p}{\wedge}(V)$ 中的元素. 我们因此可以通过上述与 $E=\overset{n-p}{\wedge}(V)$ 的张量积来定义其 Fourier 变换. 于是 $\mathscr{F}(\overset{p}{\underline{T}}\wedge\overset{n-p}{\omega_V})$ 为在 $\overset{n-p}{\wedge}(V)$ 中取值的 V' 上的 0 次缓增偶流. 但 $\overset{0}{\mathscr{S}}'(V')\otimes\overset{n-p}{\wedge}(V)$ 与 $\overset{n-p}{\mathscr{S}}'(V')$ 自然同构; 事实上, 在 $\overset{n-p}{\wedge}(V)$ 中取值的 V' 上的函数恰好是 V' 上的一个 $n-p$ 次余向量场, 也就是说是 V' 上的 $n-p$ 次形式, 并且这种等同关系可延拓到缓增流上 (另外, 可参见第 250 页中的向量从纤维空间的截面 - 广义函数). 因此 $\overset{p}{\underline{T}}\to\mathscr{F}(\overset{p}{\underline{T}}\wedge\overset{n-p}{\omega_V})$ 是一个从 $\overset{p}{\mathscr{L}}'(V)$ 到 $\overset{n-p}{\mathscr{S}}'(V)$ 的连续线性映射. 我们将之记作 $\overset{p\to n-p}{\mathscr{F}_\omega}$; 而运算 $\overset{p\to n-p}{{}_\omega\mathscr{F}}$ 则将由 $\mathscr{F}(\overset{n-p}{\omega_V}\wedge\overset{p}{\underline{T}})$ 来定义. 我们同样可定义 $\overset{p\to n-p}{\overline{\mathscr{F}}_\omega}$ 和 $\overset{p\to n-p}{{}_\omega\overline{\mathscr{F}}}$. 若现在记 $\overset{k}{\underline{\omega_V}}$ 为从 V 到 $\overset{k}{\underline{\wedge}}(V)$ 的"恒等" k 次挠形式, 它将 V 中的每个 k 次挠向量与其本身相对应, 则我们可以定义从 $\overset{p}{\mathscr{S}}'(V)$ 到 $\overset{n-p}{\mathscr{L}}'(V')$ 的映射 $\overset{p\to n-p}{\mathscr{F}_{\underline{\omega}}}:\overset{p}{T}\to\mathscr{F}(\overset{p}{T}\wedge\overset{n-p}{\underline{\omega_V}})$; 我们同样也可以定义与 ${}_{\underline{\omega}}\mathscr{F}$ 和 $\overline{\mathscr{F}}$ 相应的其它映射.

这就是关于缓增的偶流和奇流的 Fourier 变换的机制. 我们可以很容易地由此导出其主要性质. 首先, 这是一个同构且 Fourier 变换的互反公式为:

$$\overset{p\to n-p}{{}_{\omega_{V'}}\overline{\mathscr{F}}}\circ\overset{p\to n-p}{\mathscr{F}_{\omega_V}}=\text{恒等映射}, \tag{9.6.3}$$

另外还有 7 个类似公式. 换句话说, 为得到 Fourier 变换的逆变换, 需交换 $\mathscr{F}$ 和 $\overline{\mathscr{F}}$, 以及 ω 和 $\underline{\omega}$, 并将 ω 关于 $\mathscr{F}$ 的位置左右互换.

现证明该公式. 为此选定 V 的基底使 $V=V'=\mathbb{R}^n$. 但正如实际上在第 7 章中到处所做的, 我们将坚持认为 V 和 V' 不一样; 记 $\vec{e}_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 为 $V=\mathbb{R}^n$ 的基底, 而 $\vec{f}_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 为 V' 的对偶基; 记 x_i 为 V 上的坐标函数, 而 y_i 为 V' 上的坐标函数. 空间 $\mathbb{R}^n$ 的定向使得可以将偶流和奇流视为同一, 而这正是我们要做的.

于是我们有

$$\overset{p}{T}=\sum_I T_I\,dx_,, \tag{9.6.4}$$

其中 I 为 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的 p 元有序子集; 我们也有

$$\overset{n-p}{\omega_V}=\sum_J \vec{e}_j\,dx_J\,, \tag{9.6.5}$$

这里 J 为 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的 $n-p$ 元有序子集, 其中

$$J=\{j_1,j_2,\ldots,j_{n-p}\}\,,\ j_1<j_2<\ldots<j_{n-p}\,,\ \vec{e}_J=\vec{e}_{j_1}\wedge\vec{e}_{j_2}\wedge\cdots\wedge\vec{e}_{j_{n-p}}\in\overset{n-p}{\wedge}(V)\,,$$

$$\overset{p}{T}\wedge\overset{n-p}{\omega_V}=\sum_{J=\complement I}T_I\,\vec{e}_J\,dx_I\wedge dx_J=\sum_{J=\complement I}T_I\,\vec{e}_J(-1)^{\rho(I,J)}\,dx\,, \tag{9.6.6}$$

其中 $\rho(I,J)$ 为 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的置换 $\{I,J\}$ 的符号, 而 dx 为 Lebesgue 测度; 于是

$$S=\mathscr{F}\big(\overset{p}{T}\wedge\overset{n-p}{\omega_V}\big)=\sum_{J=\complement I}\mathscr{F}(T_I)\vec{e}_J(-1)^{\rho(I,J)}, \tag{9.6.7}$$

其中 T_I 为借助 $\mathbb{R}^n$ 的 Lebesgue 测度与 $T_I\,dx$ 相伴的广义函数, 而 $\mathscr{F}(T_I)$ 为第 7 章中定义的 T_I 的 Fourier 变换, 它被看成是 $\mathbb{R}^n=V'$ 上的次数为 0 的流; 通过将 $\vec{e}_i$ 看成是 $V'=\mathbb{R}^n$ 上的坐标函数的微分, 我们可将 S 看成是 V' 上的次数为 $n-p$ 的流, 于是将 $\vec{e}_J$ 换成 dy_J 可得:

$$\overset{n-p}{S}=\textstyle\sum_{J=\complement I}(\mathscr{F}T_I)_y(-1)^{\rho(I,J)}\,dy_J\,, \tag{9.6.8}$$

$$\overset{p}{\omega}_{V'}=\textstyle\sum_K \vec{f}_K\,dy_K\,, \tag{9.6.9}$$

其中 K 为 $\{1,2,\ldots,n\}$ 中 p 元有序子集; 从而我们有

$$\overset{p}{\omega}_{V'}\wedge\overset{n-p}{S}=\textstyle\sum_{J=\complement I}\mathscr{F}(T_I)(-1)^{\rho(I,J)}\vec{f}_I\,dy_I\wedge dy_J=\sum_I\mathscr{F}(T_I)\vec{f}_I\,dy\,, \tag{9.6.10}$$

$$\overline{\mathscr{F}}\big(\overset{p}{\omega}_{V'}\wedge\overset{n-p}{S}\big)=\textstyle\sum_I T_I\vec{f}_I=\sum_I T_I\,dx_I\,, \tag{9.6.11}$$

这就证明了公式 (9.6.3).

所讨论的整个理论在保结构的自同构映射 (也即 V 的可逆线性算子) 下不变. 因此若 H 为这样的算子, 而 $\check{H}$ 为其逆步算子 [借助结构转移所得到的 V' 上的算子, 也即 $\check{H}=({}^tH)^{-1}$], 则对任意的 p 和任意的 $\overset{p}{T}\in\overset{p}{\mathscr{S}}(V)$, 我们必然有:

$$\overset{p\to n-p}{\mathscr{F}_{\omega_V}}(H\overset{p}{\underline{T}})=\check{H}\big(\overset{p\to n-p}{\mathscr{F}_{\omega_V}}\overset{p}{\underline{T}}\big),$$

以及其它类似的公式.

特别地, 若取 $V=\mathbb{R}^n=V'$ 以及 $p=n$, 并将次数为 0 和 n 的偶流或奇流看成是广义函数, 其间大家会看到, 上式左边中的 $H\overset{p}{\underline{T}}$ 是一个次数为 n 的奇流的直接像, 而上式的右边 $\check{H}\big(\overset{p\to n-p}{\mathscr{F}_{\omega_V}}\overset{p}{\underline{T}}\big)$ 是一个次数为 0 的偶流的直接像, 从而我们又不可避免地遇到曾在第 274 页中指出的困难. 对于 $\overset{n}{T}$, 直接像 $H\overset{n}{T}$ 就是第 1 章公式 (1.5.6) 中所定义的; 若 $\mathscr{F}T$ 是一个连续函数 f, 则我们有

$$(\check{H}f)(y)=f(\check{H}^{-1}y)=f({}^tHy)\,,$$

这样我们就重新得到了公式 (7.6.10), 我们曾指出该公式可被推广.

参考文献

ALBERTONI – CUGIANI

[1] *Sul problema del cambiamento di variabili nelle teoria delle distribuzioni.* Nuovo Cimento **8** (1951), 874 – 888; **10** (1953), 157 – 173.

ARENS

[1] *Duality in linear spaces.* Duke Math. J. **14** (1947), 787 – 794.

ARSAC

[1] *Transformation de Fourier et théorie des distributions.* Dunod, Paris, 1961.

AUTHIER

[1] *Sur une classe d'ensembles convexes liés à la transformation de Laplace.* 即将发表在 J. Anal. Math. ①

BANACH

[1] *Théorie des opérations linéaires.* Monografje Matematyczne I, Subwencji funduszu kultury narodowej (Warsawa – Lwow), 1932.

BANACH – STEINHAUS

[1] *Sur le principe de la condensation de singularités.* Fund. Math. **9** (1927), 50 – 61.

① 译者注: 该论文似乎未曾发表.

BARROS – NETO

[1] *Analytic distribution kernels.* Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 425 – 438.

BARROS NETO – BROWDER

[1] *The analyticity of kernels.* Canad. J. Math. **13** (1961), 645 – 649.

BERNSTEIN (S.)

[1] *Leçon sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle.* Gauthier – Villars, Paris, 1926.

[2] *Sur l'analyticité des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques.* Teubner, Leipzig, 1904.

BESICOVITCH

[1] *Almost periodic functions.* Cambridge University Press, 1932.

BEURLING

[1] *Sur les spectres des fonctions.* Analyse Harmonique. Colloques Internationaux du CNRS, no. **15**. CNRS, Paris, 1949, 9 – 29.

BOAS

[1] *Functions with positive derivatives.* Duke Math. J. **8** (1941), 163 – 172.

[2] *Poisson's summation formula in L^2.* J. London Math. Soc. **21** (1946), 102 – 105.

BOCHNER

[1] *Vorlesungen über Fouriersche integrale.* Leipzig, 1932.

[2] *Linear partial differential equations, with constant coefficients.* Ann. of Math. **47** (1946), 202 – 212.

[3] *Several complex variables.* Princeton University Press, 1948.

[4] *Bounded analytic functions in several variables and multiple Laplace integrals.* Amer. J. Math. **59** (1937), 732 – 738.

BORGEN

[1] *Note on Poisson's formula.* J. Lond. Math. Soc. **19** (1944), 213 – 219.

BOURBAKI

[1] *Topologie générale. Structures topologiques et structures uniformes.* Fascicule II, quatrième édition corrigée, Hermann, Paris, 1964.

[2] *Topologie générale. Utilisation des nombres réels en topologie générale.* Fascicule VIII, deuxième édition, Hermann, Paris, 1958.

[3] *Sur les espaces de Banach.* C. R. Acad. Sci. Paris **206** (1938), 1701 – 1704.

[4] *Topologie générale. Groupes topologiques. Nombres réels.* Fascicule III, troisième édition, Hermann, Paris, 1961.

[5] *Sur certains espaces vectoriels topologiques.* Ann. Inst. Fourier Grenoble **2** (1950), 5 – 16.

[6] *Espaces vectoriels topologiques.* Fascicule XV et XVIII, deuxièmes éditions. Hermann, Paris (1966, 1964).

[7] *Intégration.* Fascicule XIII, deuxième édition corrigée. Hermann, Paris, 1965.

[8] *Topologie générale : Espaces fonctionnels. Dictionnaire.* Fascicule X, deuxième édition, Hermann, Paris, 1961.

[9] *Algèbre multilinéaire.* Hermann, Paris, 1958.

BRACONNIER

[1] *La convolution des courants.* C. R. Acad. Sci. Paris **252** (1961), 60 – 62.

BRAGA Carmen Lys

[1] *Transformation de Fourier des distributions invariantes.* Département de Physique de la Faculté des Sciences de São Paulo, 1960.

BRELOT

[1] *Étude de l'equation de la chaleur $\Delta u = cu$, $c \geqslant 0$, au voisinage d'un point singulier du coefficient.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **48** (1931), 153 – 246.

[2] *Étude des fonctions sous – harmoniques au voisinage d'un point.* Hermann, Paris, 1934.

[3] *Fonctions sous – harmoniques, presque sous – harmoniques ou sous – médianes.* Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys. **21** (1945), 75 – 90.

BROWDER – DE BARROS NETO

参见 DE BARROS NETO – BROWDER [1]

BRUHAT

[1] *Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes $\wp$-adiques.* Bull. Soc. Math. France **89** (1961), 43 – 75.

[2] *Sur les représentations induites des groupes de Lie.* Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 97 – 205.

BUREAU

[1] *Les solutions élémentaires des équations linéaires aux dérivées partielles totalement hyperboliques d'ordre plus grand que deux et à un nombre impair de variables indépendantes.* C. R. Acad. Sci. Paris **225** (1947), 852 – 854.

[2] *Les solutions élémentaires des équations linéaires aux dérivées partielles totalement hyperboliques d'ordre plus grand que deux et à quatre variables indépendantes.* C. R. Acad. Sci. Paris **226** (1948), 150 – 152.

[3] *Essai sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles.* Acad. Roy. Belgique. Cl. Sci. Mém. **15** (1936), 1 – 115.

[4] *Les solutions élémentaires des équations linéaires aux dérivées partielles.* Acad. Roy. Belgique. Cl. Sci. Mém. **15** (1936), 1 – 37.

CARLEMAN

[1] *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent.* Publ. Sci. Inst. Mittag – Leffler **1**. Uppsala, 1944.

CARSON

[1] *The Heaviside operational calculus.* Bull. Amer. Math. Soc. **32** (1926), 43 – 68.

CARTAN – SCHWARTZ

[1] *Théorème d'Artiyah – Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique.* (Séminaire Cartan 1963 – 64), École Norm. Sup., Paris, 1964.

CHEVALLEY

[1] *Theory of Lie groups.* Princeton University Press, 1946.

CHOQUET

[1] *Différences d'ordre supérieur.* Intermédiaire des recherches mathématiques **1** (1945), 31.

CHOQUET – DENY

[1] *Sur quelques propriétés de moyenne caractéristiques des fonctions harmoniques et polyharmoniques.* Bull. Soc. Math. France **72** (1944), 118 – 140.

COURANT – HILBERT

[1] *Methoden der Mathematischen Physik.* Springer, Berlin, 1937.

CRUM

[1] *On the resultant of two functions.* Q. J. Math. **12** (1941), 108 – 111.

CUGIANI – ALBERTONI

参见 ALBERTONI – CUGIANI [1]

DENY

[1] *Les potentiels d'énergie finie.* Acta Math. **82** (1950), 107 – 183.

DENY – CHOQUET

参见 CHOQUET – DENY [1]

DIEUDONNÉ

[1] *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **59** (1942), 107 – 139.

[2] *Une généralisation des espaces compacts.* J. Math. Pures Appl. **23** (1944), 65 – 76.

[3] *Dérivées et différences de fonctions de variables réelles.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **61** (1944), 231 – 248.

[4] *Sur les fonctions continues numériques definies dans un produit de deux espaces compacts.* C. R. Acad. Sci. Paris **205** (1937), 593 – 595.

DIEUDONNÉ – SCHWARTZ

[1] *La dualité dans les espaces $\mathscr{F}$ et $\mathscr{L}\mathscr{F}$.* Ann. Inst. Fourier Grenoble **1** (1949), 61 – 101.

DIRAC

[1] *The physical interpretation of the quantum dynamics.* Proc. R. Soc. Lond. Ser. A **113** (1926 – 1927), 621 – 641.

DÆTSCH

[1] *Theorie und Anwendung der Laplace – Transformation.* Springer, Berlin, 1937.

DOLBEAULT

[1] *Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe.* Ann. of Math. **64** (1956), 83 – 130; **65** (1957), 282 – 330.

DUFRESNOY

[1] *Sur le produit de composition de deux fonctions.* C. R. Acad. Sci. Paris **225** (1947), 857 – 859.

EDWARDS

[1] *Functional analysis: Theory and applications.* Holt, Rinehart and Winston, Chicago, 1965.

EHRENPREIS

[1] *Solution of some problems of division. I. Division by a polynomial of derivation.* Amer. J. Math. **76** (1954), 883 – 903.

[2] *The division problem for distributions.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **41** (1955), 756 – 758.

[3] *Completely inversible operators.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **41** (1955), 945 – 946.

FANTAPPIÉ

[1] *Theoria de los functionales analyticos y sus applicationes.* Barcelone, 1943.

FREDHOLM

[1] *Sur l'intégrale fondamentale d'une équation différentielle elliptique à coefficients constants.* Rend. Circ. Mat. Palermo **25** (1908), 346 – 351.

FRIEDRICHS

[1] *On Differential Operators in Hilbert Spaces.* Amer. J. Math. **61** (1939), 523 – 544.

[2] *On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations.* Comm. Pure Appl. Math. **6** (1953), 299 – 326.

FROSTMAN

[1] *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions.* Meddelanden Mat. Sem. Univ. Lund **3** (1935), 1 – 115.

GÅRDING

[1] *Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients.* Acta Math. **85** (1951), 1 – 62.

GARNIR

[1] *Sur la formulation des problèmes aux limites dans la théorie des distributions.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **20** (1951), 497 – 513.

[2] *Sur la formulation des problèmes aux limites dans la théorie des distributions.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **20** (1951), 639 – 649.

[3] *Sur deux équations de la théorie des distributions.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20 (1951), 650 – 666.

[4] *Sur les distributions résolvantes des opérateurs de la physique mathématiques.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20 (1951), 174 – 194, 271 – 296.

[5] *Sur la transformation de Laplace des distributions.* C. R. Acad. Sci. Paris **234** (1952), 583 – 585.

GEL'FAND – SHILOV ①

[1] *Fourier transforms of rapidly increasing functions and questions of uniqueness of the solution of Cauchy's problem.* Uspehi Matem. Nauk **8** (1953), 3 – 54.

GEL'FAND, SHILOV, GRAEV, VILENKIN

5 tomes actuellement parus de *Obobchennie Funktsii* ou *Fonctions généraliśees.* Éditions physico – mathématiques, Moscou, 自 1959 起陆续出版. 现已有法语版, 英语版, 德语版. ②

GILLIS

[1] *Sur les formes différentielles et la formule de Stokes.* Acad. Roy. Belgique. Cl. Sci. Mém. **20** (1943), 1 – 95.

GODEMENT

[1] *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Deuxième édition. Hermann, Paris, 1965.

GROTHENDIECK

[1] *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955), 1 – 140.

[2] *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires.* Ann. Inst. Fourier Grenoble **4** (1952), 73 – 112.

[3] *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles.* J. Analyse Math. **2** (1953), 243 – 280.

[4] *Sur les espaces $\mathscr{F}$ et $\mathscr{DF}$.* Summa Brasil. Math. **3** (1954), 57 – 123.

[5] *Espaces vectoriels topologiques.* Soc. Math. de São Paulo, Brésil, 1958.

GUILLEMOT – TEISSIER Marianne

[1] *Convolution des courants sur un groupe de Lie.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **79** (1962), 321 – 352.

① 译者注: Shilov 通常被拼写成 Šilov.
② 译者注: 这就是著名的 5 卷本专著《广义函数》, 中译本由科学出版社出版.

HADAMARD

[1] *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* Hermann, Paris, 1932 (nouvelle édition).

HALPERIN

[1] *Introduction to the theory of distributions.* University of Toronto Press, Toronto, 1952

HEAVISIDE

[1] *On operators in physical mathematics.* Proc. R. Soc. Lond. **52** (1892/1893), 504 – 529; **54** (1893), 105 – 143.

HELGASON

[1] *Differential geometry and symmetric spaces.* Academic Press, New – York, 1962.

HERGLOTZ

[1] *Über die Integration linearer, partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.* Berichte Leipzig **78** (1926), 93 – 126, 287 – 318.

HILBERT

[1] *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Gött. Nachr. (1910), 355 – 419.

HILBERT – COURANT

参见 COURANT – HILBERT [1]

HOPF

[1] *Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten.* J. Reine Angew. Math. **163** (1930), 71 – 88.

HÖRMANDER

[1] *On the theory of general partial differential operators.* Acta Math. **94** (1955), 161 – 248.

[2] *On the division of distributions by polynomials.* Ark. Mat. **3** (1958), 555 – 568.

[3] *Linear partial differential operators.* Springer – Verlag, Berlin, 1963.

HORVATH

[1] *Topological vector spaces.* University of Maryland, 1963.

HOVE (VAN)

[1] *Un prolongement de l'espace fonctionnel de Hilbert.* Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci. **34** (1948), 604 – 616.

JOHN

[1] *General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations.* Proceedings of the symposium on spectral theory and differential problems, 113 – 175. Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Okla., 1951.

KODAIRA

[1] *Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory).* Ann. of Math. **50** (1949), 587 – 665.

[2] *The theorem of Riemann – Roch on compact analytic surfaces.* Amer. J. Math. **73** (1951), 813 – 875.

KODAIRA – DE RHAM

[1] *Harmonic Integrals.* Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., 1950.

KÖNIG

[1] *Neue Begründung der Theorie der "Distributionen" von L. Schwartz.* Math. Nachr. **9** (1953), 129 – 148.

[2] *Multiplikation von Distributionen.* Math. Ann. **128** (1955), 420 – 452.

KOREVAAR

[1] *Distributions defined by fundamental sequences.* Indag. Math. **17** (1955), 368 – 378, 379 – 389, 483 – 493, 494 – 503, 663 – 674.

KÖTHE

[1] *Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume.* Math. Z. **51** (1948), 317 – 345.

[2] *Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume.* Math. Z. **52** (1950), 627 – 630.

KRYLOFF

[1] *Sur l'existence des dérivées généralisées des fonctions sommables.* C. R. Acad. Sci. URSS **55** (1947), 375 – 378.

LAVOINE

[1] *Transformation de Fourier des pseudo - fonctions avec tables de nouvelles transformées.* Éditions du CNRS, Paris, 1963.

[2] *Calcul symbolique: distributions et pseudo - fonctions, avec une table de nouvelles transformées de Laplace.* CNRS, Paris, 1959.

LAX

[1] *On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations.* Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955), 615 - 633.

LERAY

[1] *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace.* Acta Math. **63** (1934), 193 - 248.

[2] *Hyperbolic differential equations.* Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., 1953.

[3] Conférence au Séminaire Bourbaki, ou cours à l'Institute for Advanced Study, Princeton, 1951. ①

LEVI (E. - E.)

[1] *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali.* Rend. Circ. Mat. Palermo **24** (1907), 275 - 317.

LIGHTHILL

[1] *Introduction to Fourier analysis and generalised functions.* Cambridge University Press, New York, 1958.

LIONS

[1] *Problèmes aux limites en théorie des distributions.* Acta Math. **94** (1955), 13 - 153.

[2] *Supports dans la transformation de Laplace.* J. Analyse Math. **2** (1953), 369 - 380.

LIONS - SCHWARTZ

[1] *Problèmes aux limites sur des espaces fibrés.* Acta Math. **94** (1955), 155 - 159.

LOJASIEWICZ

[1] *Division d'une distribution par une fonction analytique de variables réelles.* C. R. Acad. Sci. Paris **246** (1958), 683 - 686.

[2] *Sur le problème de la division.* Studia Math. **18** (1959), 87 - 136.

① 译文: 参见 1951 年 Leray 在 Bourbaki 讨论班上的报告或在普林斯顿高等研究所的讲义.

MACKEY

[1] *On infinite-dimensional linear spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945), 155 – 207.

[2] *On convex topological linear spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **60** (1946), 519 – 537.

[3] *The Laplace transform for locally compact Abelian groups.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **34** (1948), 156 – 162.

MALGRANGE

[1] *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution.* Ann. Inst. Fourier Grenoble **6** (1955 – 1956), 271 – 355.

[2] *Équations aux dérivées partielles à coefficients constants. Solution élémentaire.* C. R. Acad. Sci. Paris **237** (1953), 1620 – 1622.

[3] *Équations aux dérivées partielles à coefficients constants. Équations avec second membre.* C. R. Acad. Sci. Paris **238** (1954), 196 – 198.

[4] *Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques.* Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 283 – 306.

MARTINEAU

[1] *Sur les fonctionnnelles analytiques et la transformation de Fourier – Borel.* J. Analyse Math. **11** (1963), 1 – 164.

METHÉE

[1] *Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz.* Comment. Math. Helv. **28** (1954), 225 – 269.

[2] *Transformées de Fourier de distributions invariantes liées à la résolution de l'équation des ondes.* La théorie des équations aux dérivées partielles (Nancy, 9 – 15 avril 1956). Colloques Internat. Centre Nat. Rech. Sci. **71** (1956), 145 – 163.

[3] *Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions.* Comment. Math. Helv. **33** (1959), 38 – 46.

MIKUSINSKI

[1] *Sur la méthode de généralisation de M. Laurent Schwartz et sur la convergence faible.* Fund. Math. **35** (1948), 235 – 239.

[2] *Sur les fondements du calcul opératoire.* Studia Math. **11** (1949), 41 – 70.

[3] *L'anneau algébrique et ses aplications dans l'analyse fonctionelle.* Ann. Univ. Mariae Curie – Skłodowska. Sect. A. **2** (1947), 1 – 48; **3** (1949), 1 – 84.

[4] *Une définition de distribution.* Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III. **3** (1955), 589 – 591.

[5] *Une introduction élémentaire à la théorie des distributions de plusieurs variables.* C. I. M. E., Institut Math. Univ., Rome (1962).

[6] *Operational calculus.* International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, Vol. **8**. Pergamon Press, New York (1959).

[7] *Une simple démonstration du théorème de Titchmarsh sur la convolution.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. **7** (1959), 715 – 717.

MIZOHATA

[1] *Hypoellipticité des opérateurs différentiels elliptiques.* La théorie des équations aux dérivées partielles (Nancy, 9 – 15 avril 1956). Colloques Internat. Centre Nat. Rech. Sci. **71** (1956), 165 – 177.

NIRENBERG

[1] *Remarks on strongly elliptic partial differential equations.* Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955), 649 – 675.

NORGUET

[1] *Problèmes sur les formes différentielles et les courants.* Ann. Inst. Fourier Grenoble **11** (1961), 1 – 82.

ORNSTEIN

[1] *A non-equality for differential operators in the L^1-norm.* Arch. Rational Mech. Anal. **11** (1962), 40 – 49.

PALAIS

[1] *Seminar on the Atiyah – Singer index theorem.* Princeton University Press, 1965.

PALEY – WIENER

[1] *Fourier transforms in the complex domain.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **19**. Amer. Math. Soc., New York, 1934.

PALLU DE LA BARRIÈRE

[1] *Sur les formules de transformation des intégrales multiples.* Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim **21** (1948), 28 – 31.

[2] *Sur une généralisation des formes différentielles extérieures.* Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim **21** (1948), 35 – 37.

PETROWSKY

[1] *Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles.* Rec. Math. Moscou **5** (1939), 3 – 70.

[2] *Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen.* Rec. Math. Moscou **2** (1937), 815 – 868.

PLANCHEREL – PÓLYA

[1] *Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples.* Comment. Math. Helv. **9** (1936), 224 – 248.

VAN DER POL – NIESSEN

[1] *Symbolic calculus.* Philos. Mag. (7) **13** (1932), 537 – 577.

PÓLYA – PLANCHEREL

参见 PLANCHEREL – PÓLYA [1]

POPOVICIU

[1] *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles.* Mathematica **8** (1934), 1 – 85.

RADO

[1] *Subharmonic functions.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **5**. Springer – Verlag, Berlin, 1937.

DE RHAM

[1] *Über mehrfache Integrale.* Abh. Math. Semin. Hansische Univ. **12** (1938), 313 – 339.

[2] *Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples.* Enseign. Math. **35** (1936), 213 – 228.

[3] *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques.* Hermann, Paris, 1955.

[4] *Solutions élémentaires d'équations aux dérivées partielles du second ordre à coefficients constants.* Colloque Henri Poincaré, CNRS, Paris, 1955.

DE RHAM – KODAIRA

参见 KODAIRA – DE RHAM [1]

RIESZ (Fr.)

[1] *Sur les opérations fonctionnelles linéaires.* C. R. **149** (1910), 974 – 977.

[2] *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel.* Acta Math. **48** (1926), 329 – 343; **54** (1930), 321 – 360.

RIESZ (M.)

[1] *L'intégrale de Riemann – Liouville et le problème de Cauchy pour l'équation des ondes.* Bull. Soc. Math. France Suppl. **67** (1939), 153 – 170.

[2] *L'intégrale de Riemann – Liouville et le problème de Cauchy.* Acta Math. **81** (1949), 1 – 223.

[3] *Sur les fonctions conjuguées.* Math. Z. **27** (1927), 218 – 244.

[4] *Intégrales de Riemann – Liouville et potentiels.* Acta Litt. Sci. Szeged **9** (1938), 1 – 42.

RISS

[1] *Éléments de calcul différentiel et théorie des distributions sur les groupes abéliens localement compacts.* Acta Math. **89** (1953), 45 – 105.

HENRIQUES DE BRITO, ELIANA ROCHA

[1] *Separação de espaço e tempo nas distribuções invariantes da solucão da equação das ondas.* Tese apresentada à Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil. No concurso para docente livre da Cadeira de Cálculo Infinitesimal Dissertation, Rio de Janeiro, 1964.

ROUMIEU

[1] *Sur quelques extensions de la notion de distribution.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **77** (1960), 41 – 121.

SARD

[1] *The measure of the critical values of differentiable maps.* Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942), 883 – 890.

SATO

[1] *Theory of hyperfunctions.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I **8** (1959), 139 – 193; **8** (1960), 387 – 437.

SCARFIELLO

[1] *Sur le changement de variables dans les distributions et leurs transformées de Fourier.* Nuovo Cimento **12** (1954), 471 – 482.

SCHWARTZ

[1] *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques.* Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys. **21** (1945), 57 – 74.

[2] *Généralisation de la notion de fonction et de dérivation. Théorie des distributions.* Ann. Télécommun. **3** (1948), 135 – 140.

[3] *Théorie des distributions et transformation de Fourier.* Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys. **23** (1948), 7 – 24.

[4] *Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques.* Ann. of Math. **48** (1947), 857 – 929.

[5] *Sur certaines familles non fondamentales de fonctions continues.* Bull. Soc. Math. France **72** (1944), 141 – 145.

[6] *Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions.* C. R. Acad. Sci. Paris **239** (1954), 847 – 848.

[7] *Théorie des noyaux.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. **1**, 220 – 230. Amer. Math. Soc., 1952.

[7′] *Transformation de Laplace des distributions.* Comm. Sém. Math. Univ. Lund **1952** (1952). Tome Supplementaire, 196 – 206. ①

[8] *Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe.* Géométrie différentielle. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 1953, 185 – 195. CNRS, Paris, 1953

[9] *Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles.* J. Analyse Math. **4** (1954/55), 88 – 148.

[10] *Théorie des distributions à valeurs vectorielles.* Ann. Inst. Fourier Grenoble **7** (1957), 1 – 141; **8** (1958), 1 – 209.

[11] *Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications.* Séminaire, Institut Henri Poincaré, Paris, 1954.

[12] *Équations aux dérivées partielles.* Séminaire, Institut Henri Poincaré, Paris, 1955.

[13] *Division par une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe.* Summa Brasil. Math. **3** (1955), 181 – 209.

[14] *Cours de méthodes mathématiques de la physique.* C. D. U., Paris, 1955; *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Hermann, Paris, 1965.

[15] *Analyse et synthèse harmoniques dans les espaces de distributions.* Canadian J. Math. **3** (1951), 503 – 512.

① 译者注: 作者遗漏了此文献, 并在引论中应该引用此文的地方错误地引用了文献 [7].

[16] Séminaire 1959 – 60, Institut Henri Poincaré, Paris, 1960.

[16′] *Ecuaciones Diferenciales Parciales Elipticas.* Univ. Nac. de Colombia, Bogotá, 1956.

[17] *Application of distributions to the study of elementary particles in relativistic quantum mechanics.* Gordon – Breach, New – York, 1968.

[18] *Functional Analysis.* New York University, 1964.

[19] *Convergence de distributions dont les dérivées convergent.* Studies in math. analysis and related topics. Stanford Univ. Press, Calif., 1962, 364 – 372.

SCHWARTZ – LIONS

参见 LIONS – SCHWARTZ [1]

SCHWARTZ – DIEUDONNÉ

参见 DIEUDONNÉ – SCHWARTZ [1]

SEBASTIÃO E SILVA

[1] *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions.* Univ. Lisboa. Revista Fac. Ci. A. **4** (1955), 79 – 186; **5** (1956), 169 – 170.

[2] *Sur l'axiomatique des distributions et ses modèles possibles.* C. I. M. E., Inst. Math. Uni., Rome, 1962.

[3] *Les fonctions analytiques comme ultra – distributions dans le calcul opérationnel.* Math. Ann. **136** (1958), 58 – 96.

[4] *Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite.* Portugal. Math. **17** (1958), 1 – 17. Errata **18** (1958), 154 – 155.

SEELEY

[1] *Extension of $\mathscr{C}^\infty$ functions defined in a half space.* Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 625 – 626.

[2] *Regularization of singular integral operators on compact manifolds.* Amer. J. Math. **83** (1961), 265 – 275.

SHILOV – GEL'FAND

参见 GEL'FAND – SHILOV [1]

SOBOLEFF ①

[1] *Sur quelques évaluations concernant les familles de fonctions ayant des dérivées à carré intégrable.* C. R. Acad. Sci. URSS **1** (1936), 279 – 282.

① 译者注: 通常也拼写成 Sobolev.

[2] *Sur un théorème d'analyse fonctionnelle.* Rec. Math. Moscou **4** (1938), 471–497.

[3] *Sur un théorème de l'analyse fonctionnelle.* C. R. Acad. Sci. URSS **20** (1938), 5–9.

[4] *Méthode nouvelle à resoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales.* Rec. Math. Moscou **1** (1936), 39–71.

STEINHAUS – BANACH

参见 BANACH – STEINHAUS [1]

TEMPLE

[1] *Theory of generalized functions.* Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. **228** (1955), 175–190.

TITCHMARSH

[1] *Introduction to the theory of Fourier integrals.* Oxford, 1937.

TREVES

[1] *Lectures in functional analysis.* ① Academic Press, New York, 1966.

WATSON

[1] *A treatise on the theory of Bessel functions.* Cambridge University Press, 1944.

WEIL (A.)

[1] *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Hermann, Paris, 1940.

WEYL (H.)

[1] *The method of orthogonal projection in potential theory.* Duke Math. J. **7** (1940), 411–444.

WHITNEY

[1] *Differentiable manifolds.* Ann. of Math. **37** (1936), 645–680.

[2] *Derivatives, difference quotients, and Taylor's formula.* Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), 89–94; Ann. of Math. **35** (1934), 476–481.

[3] *Functions differentiable on the boundaries of regions.* Ann. of Math. **35** (1934), 482–485.

[4] *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets.* Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 63–89.

① 译者注: 似乎查不到此书.

WIDDER

[1] *The Laplace transform.* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.

WIENER

[1] *The Fourier integral and certain of its applications.* Cambridge University Press, 1933.

WIENER – PALEY

参见 PALEY – WIENER [1]

WIGHTMAN ①

[1] *PCT, spin and statistics, and all that.* W. A. Benjamin, Inc., New York, 1964.

YOSIDA

[1] *Functional analysis.* Springer – Verlag, Berlin, 1965.

YOUNG (L. – C.)

[1] *Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations.* C. R. Soc. Sci. Varsovie **30** (1937), 212 – 234.

ZEILON

[1] *Das Fundamentalintegral der allgemeinen partiellen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.* Ark. f. Mat., Astr. och Fys. **6** (1911), 1 – 32.

[2] *Sur les intégrales fondamentales des équations à caractéristique réelle de la physique mathématique.* Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. **9** (1913), 1 – 70.

ZYGMUND

[1] *Trigonometrical series.* Dover Publications, New York, 1955.

① 译者注: 该书还有一个作者为 Streater.

法中专业术语对照

Absolument continue (fonction, mesure)	绝对连续 (函数, 测度)
Borélien (ensemble), borélienne (fonction)	Borel (集), Borel (函数)
Borné (ensemble de distribution)	(广义函数的) 有界 (集)
Bornée sur $\mathbb{R}^n$ (distribution)	在 $\mathbb{R}^n$ 上有界的 (广义函数)
Cauchy (problème de)	Cauchy (问题)
Cauchy (valeur principale de)	Cauchy (主值)
Chaînes	链
Chaleur (équation de la)	热 (传导方程)
Champ de vecteurs, de dérivation	向量场, 求导场
Cobord	上边缘
Cohomologie	上同调
Complètement inversible (distribution)	完全可逆 (广义函数)
Covolution des fonctions (produit de)	函数的卷积
Convolution des distributions (produit de)	广义函数的卷积
Convolution (équation de)	卷积 (方程)
Convolution (inéquation de)	卷积 (不等方程)
Continue (forme linéaire)	连续 (线性型)
Convergence de distributions	广义函数的收敛性
Convergente (suite ... de distributions)	收敛的 (广义函数序列)
Convergeant vers 0 à l'infini (distribution)	在无穷远处趋于 0 的 (广义函数)
Couche multiple	多层

Courants (usuels, tordus, pairs, impairs)	(寻常, 挠, 偶, 奇) 流
Croissance lente (distribution à)	缓增 (广义函数)
Croissance lente	缓增
(fonction indéfiniment dérivable à)	(无穷可导函数)
Décomposition de Riesz	Riesz 分解
Décroissance rapide (distribution à)	速降 (广义函数)
Décroissance rapide	速降
(fonction indéfiniment dérivable à)	(无穷可导函数)
Degré topologiqe	拓扑度
Dérivation (polynôme de)	(多项式) 求导算子
Dérivée d'ordre non entier	非整数阶求导
Dérivée d'une distribution	广义函数的导数
Dérivées partielles (equation aux)	偏微分 (方程)
Différentielle (équation)	常微分 (方程)
Dirac (courants de)	Dirac (流)
Distribution	广义函数
Doublet	偶极子
Dirac (mesure de)	Dirac (测度)
Directe (image ... d'une distribution)	(广义函数的) 直接 (像)
Division (problème de la)	除法 (问题)
Dual (d'un espace vectoriel topologique)	(拓扑向量空间的) 对偶
Élémentaire (noyau)	基本 (核)
Élémentaire (solution)	基本 (解)
Elliptique (opérateur différentiel, équation)	椭圆 (微分算子, 方程)
Équation intégrale	积分方程
Exponentielle, exponentielle–polynôme	指数函数, 指数 – 多项式函数
Extension d'une distribution	广义函数的延拓
Filtres	滤子
Finie (partie)	有限 (部分)
Forme différentielle	(寻常, 挠, 偶, 奇) 微分形式
(usuelle, tordue, paire, imppaire)	
Fourier (intégrale de ... usuelle)	(通常的) Fourier (积分)
Fourier (série de)	Fourier (级数)
Fourier (transformation de)	Fourier (变换)
Harmoniqe (fonction)	调和 (函数)

Français	中文
Heaviside (fonction d')	Heaviside (函数)
Hermite (polynôme d')	Hermite (多项式)
Holomorphe (fonction)	全纯 (函数)
Homogène (équation)	齐次 (方程)
Hypocontinuité, Hypocontinue (application bilinéaire)	亚连续性, 亚连续 (双线性映射)
Hypoelliptique	亚椭圆
Hyperbolique (équation ... aux dérivées partielles)	双曲 (偏微分方程)
Image directe d'un courant	流的直接像
Image réciproque d'un courant	流的逆像
Image réciproque d'une forme	形式的逆像
Indépendante de x_1 (distribution)	不依赖 x_1 的 (广义函数)
Intégrale dépendant d'un paramètre	含参积分
Intégrale d'un courant	流的积分
Intégrale d'une distribution	广义函数的积分
Intégrale partielle d'une forme différentielle sur les fibres	微分形式在纤维上的偏积分
Inversible (distribution)	可逆 (广义函数)
Laplace (équation de), Laplacien	Laplace (方程), Laplacian
Laplace (transformation de)	Laplace (变换)
Limité à gauche (support)	左有界的 (支集)
Local, principe de localisation	局部的, 局部化原理
Méromorphe (fonction)	亚纯 (函数)
Mesure	测度
Multiplication des distributions	广义函数的乘法
Ondes (équation des)	波动 (方程)
Ordre (d'une dérivée)	(导数的) 阶
Ordre (d'une distribution)	(广义函数的) 阶
Parabolique (équation ... aux dérivées partielles)	抛物 (偏微分方程)
Paramétrix	拟基本解
Parseval (formule de)	Parseval (公式)
Partition de l'unité	单位分解
Périodique (distribution)	周期 (广义函数)

Poisson (formule de)	Poisson (公式)
Polyharmonique (fonction)	多重调和 (函数)
Positif (distribution de type)	非负 (型广义函数)
Positive (distribution, mesure)	非负 (广义函数, 测度)
Potentiel	势
Presque–périodique (distribution)	概周期 (广义函数)
Presque–surharmonique (fonction)	概上调和 (函数)
Primitive d'une distribution	广义函数的原函数
Pseudo–fonction	赝函数
Rang d'une dérivée	导数的秩
Recollement des morceaux	分片粘贴
Réflexivité	自反性
Régularisation, régulariser	正则化
Régulier (support)	正则 (支集)
Régulier (système différentiel)	正则 (常微分方程组)
Restriction d'une fonction	函数的限制
Section – distribution d'un espace fibré à fibre vectorielle	向量丛纤维空间的截面 – 广义函数
Sommable (fonction)	可积 (函数)
Sommable sur $\mathbb{R}^n$ (distribution)	在 $\mathbb{R}^n$ 上可积的 (广义函数)
Spectre d'une distribution	广义函数的谱
Sphérique (distribution)	球面上的 (广义函数)
Support (d'une fonction, d'une distribution)	(函数的, 广义函数的) 支集
Surharmonique (distribution)	上调和 (广义函数)
Symbolique (calcul)	符号 (计算)
Symétrie (opération)	对称 (运算)
Tempérée (distribution)	缓增 (广义函数)
Tensoriel (produit)	张量 (积)
Topologie	拓扑
Tore	环面
Trace	迹
Transformation infinitésimale	无穷小变换
Translation d'une distribution	广义函数的平移
Transposée (image ... d'une fonction)	(函数的) 转置 (像)
Variété indéfiniment différentiable	无穷可微流形
Vectorielle (distribution)	向量值 (广义函数)

索引

记号索引

函数空间与广义函数空间索引

这些空间之间的包含关系

每个记号 $E \subset F$ 或 $\overset{E}{\underset{F}{\cap}}$ 表示 E 包含于 F, 并且 E 上的拓扑要比 F 所诱导的拓扑更细:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & p & \leqslant & q & & & & & & & & \\
(\mathscr{D}) & \subset & (\mathscr{S}) & \subset & (\mathscr{D}_{L^p}) & \subset & (\mathscr{D}_{L^q}) & \subset & (\dot{\mathscr{B}}) & \subset & (\mathscr{B}) & \subset & (\mathscr{O}_M) & \subset & (\mathscr{E}) \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
(\mathscr{E}') & \subset & (\mathscr{O}'_C) & \subset & (\mathscr{D}'_{L^p}) & \subset & (\mathscr{D}'_{L^q}) & \subset & (\dot{\mathscr{B}}') & \subset & (\mathscr{B}') & \subset & (\mathscr{S}') & \subset & (\mathscr{D}') \\
 & & & & p & \leqslant & q & & & & & & & &
\end{array}
$$

本书是关于广义函数的第一本专著。全书共分九章，书中系统总结、高度概括了作者 L. 施瓦兹当年得以获得“菲尔兹奖”的主要工作，讨论了广义函数的各种基本性质、运算与变换，特别是阐明了著名的Dirac函数其实是一个测度而不是一个函数，从而为Dirac测度在量子力学以及其他学科中的广泛应用打下了坚实的数学基础。

本书包含了当时与广义函数论有关的许多重要的理论和原始思想，在其法文版首次出版后半个多世纪的今天仍有理论价值和参考价值，尤其适合于数学系高年级本科生或研究生研读。

学科类别：数学

academic.hep.com.cn


ISBN 978-7-04-028417-1

9 787040 284171 >

定价 59.00 元